

# 由表徵觀點初探國小兒童立體幾何概念之研究

吳德邦

國立台中師範學院數學教育研究所

電話：04-22263181

0936731088

傳真：04-22200818

Email: dwu@mail.ntctc.edu.tw

鄭佳昇

南投縣名間鄉中山國民小學

電話：049-2582335

傳真：049-2580177

Email: raych@cspss.ntct.edu.tw

## 摘要

本研究以表徵觀點嘗試了解兒童立體幾何概念的形成，以提供教師在進行立體幾何教學時的參考。

研究結果顯示，國小階段學生對於立體幾何的表徵能力可以分為兩階段，第一階段：完全以平面幾何的認知來擴展立體幾何的知識，第二階段：能夠直接分析立體圖形，每個年級中都有分屬於第一、二階段的學生。

關鍵詞：立體幾何、空間表徵、空間思考

## 一、研究動機

人類居住在立體的世界當中，當一個人脫離母體哇哇落地之後，首先接觸到的就是一個立體的世界，而後生活所接觸到的種種，比如說玩具、奶嘴、奶瓶...等也都是立體的造型，甚至母親的臉更是一個複雜的立體造型。但從數學教育的觀點看一般人的立體幾何概念卻甚為薄弱（朱建正，民87）。

研究者從事國小數學科教學多年，深感在國小的幾何課程中，過分偏重於平面幾何的教學，而忽略了培養學生空間表徵能力的重要性。有些研究指出幾何理解和空間推理能力與智力或一般學習能力有關，有些研究發現，在各年級空間能力與數學成就有正相關（Clements & Battista, 1992）。

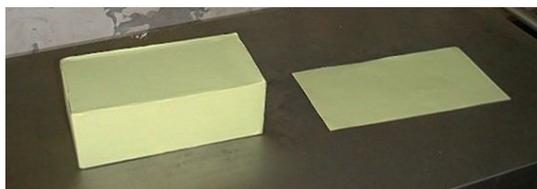
有鑑於此，此研究以「國小學生立體幾何概念」為研究題目，企圖了解兒童立體幾何概念的形成背景與空間表徵能力的獲得歷程，以提供教師在進行立體幾何教學時的參考。

## 二、研究方法與對象

### （一）研究設計

本研究設計，嘗試以表徵的觀點，初探國民小學學生立體幾何的概念，表徵是用某一種形式（物理或心理），將一種事、物或想法，重新表現出來，以達成溝通的目的（國立編譯館，民70）。研究者從事國小數學科教學多年，深覺學生長期困惑於立體幾何的教材，尤其在測驗方面，大部分的立體幾何圖形均以平面呈現，加深學生得恐懼感，盼能以此研究，初探學生立體幾何的概念，提供教師往後教學的參考。

首先研究者展示一個長方體和一個平面的長方形（如圖一）。讓小朋友仔細的觀看後，在紙上畫出兩個物體，在畫的過程當中，小朋友可以上前操弄兩個物體，但不可以觀察別人的畫圖過程。



圖一

其次根據回收的資料，仿照「皮亞傑對兒童幾何概念發展之順序」加以分類，並提出建議。

### （二）研究對象

本研究係以國民小學一到五年級的學生為研究對象，主要原因是要作為下一年的追蹤研究，研究者選取南投縣某國小一到五年級各一班，實施學童的立體幾何表徵能力的測驗。各班學童不分成就高低，均參予測驗，合計共 107 人。以下是研究者所施測和回收的是畫圖紙比例（表一）。

表一：各年級施測人數和回收比例

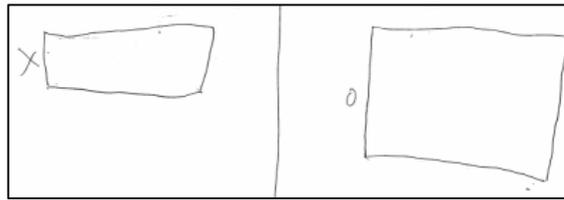
年級	施測人數	回收數	回收率
一年級	18 人	18 人	100%
二年級	21 人	21 人	100%
三年級	21 人	21 人	100%
四年級	19 人	19 人	100%
五年級	28 人	28 人	100%

### 三、研究結果與討論

#### (一) 回收圖畫分析

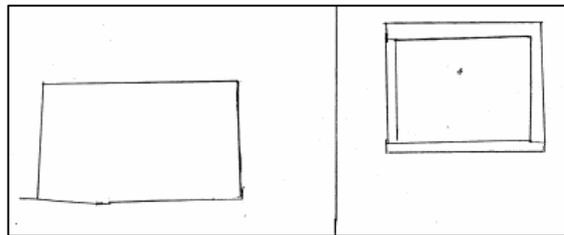
研究者對所回收的圖畫，仿照皮亞傑對兒童幾何概念發展之順序的分類進行分析，將回收圖畫概分成下面三種類型：

1. 毫無任何立體表徵概念：此類兒童沒有任何立體表徵概念，他們所畫出的長方體和長方形並無任何不同之處，如圖二



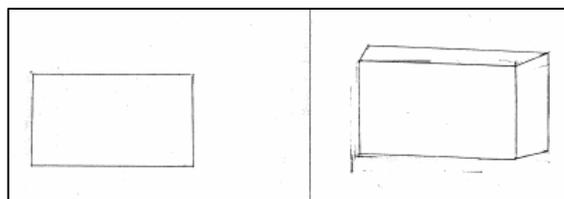
圖二：x表示長方形，○表示長方體

2. 有立體概念但無法表徵：對於長方體和長方形在以視覺上能夠觀察出不同之處，但是無法以圖畫表徵出立體圖形，所以此類小朋友在做長方體繪圖時，只能在長方形的周圍在畫出長方形，而無法表達出立體概念。如圖三



圖三

3. 有完整立體表徵概念：能夠完整的畫出長方體和長方形的不同，並且能清楚的表徵出立體圖形。如圖四



圖四

#### (二) 概念情形比較

將回收的圖畫依上述三種類型加以類，整理分析後可得下表：

表 2：各年級立體表徵概念統計表

國小學生立體表徵概念			
年級	第一型	第二型	第三型
一年級	77.8% (14)	11% (2)	11% (2)
二年級	81% (17)	14.3% (3)	5% (1)
三年級	14.3% (3)	14.3% (3)	71.4% (15)
四年級	5% (1)	15.8% (3)	78.9% (15)
五年級	7% (2)	17.9% (5)	75% (21)

由表 2 中我們可以明顯的看出，第一型（毫無任何立體表徵概念）其各年級分的百分比的分布，一、二年級都高達 70% 以上，而到三年級以後就有很明顯的下降，其長條圖如下：

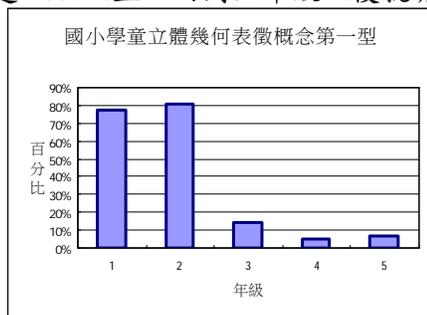


圖 5：立體表徵概念第一型（毫無任何立體表徵概念）其各年級分的百分比長條圖

第二型（有立體概念但無法表徵）在各年級中都有出現，可能是一種過渡時期，各年級中所佔的比例都不高，大概是 10% 到 20% 之間，其分布的長條圖形如下：

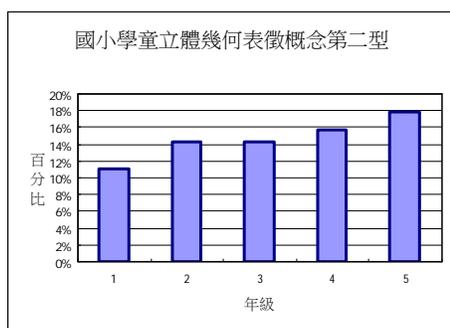


圖 6：立體表徵概念第二型（有立體概念但無法表徵）其各年級分的百分比圖

第三型（有完整立體表徵概念）在低年級中所佔的比例較少，約有 10%，但是到三年級以上，所佔的比例明顯增加，可達到 70% 以上，各年級所佔的比例直條圖形如下：

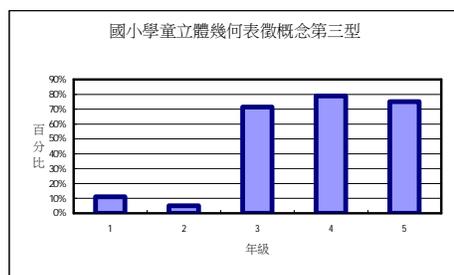


圖 6：立體表徵概念第三型（有完整立體表徵概念）其各年級分的百分比圖

### （三）教材分析與訪談

根據上一節所做的研究，我們可以得知兒童的立體幾何表徵概念在國小二到三年級有了很大的改變。在依據該國小所採用的數學教科書一部編本來分析，部編本數學課本在國小二年級以前（含二年級）所學有關的幾何教材為：

第一冊：由圖形外貌認識正方形、長方形、三角形、圓形。配合數概念數圖形的個數。

第二冊：分類，數個數，尚未進入認識立體圖形。

第二冊：用等腰直角三角形色板排出三角形、四邊形及各種圖形，並由圖形的外貌說明這些圖形是什麼圖形。以等腰直角三角形色紙依各種圖形排排看，各用幾張，並比較大小。

第三冊：依圖形形狀分類來認識三角形四邊形，認識三角形、四邊形的元素：頂點、邊、角；認識直角及直角三角形；理解長方形、正方形的性質。正方形、長方形與直角三角形之間的分割與合併。

第四冊：由實物（如盒子、積木）外貌認識長方體、正方體的面、邊、頂點及其個數，面的形狀大小。

三年級學生增加了：

第五冊：認識圓，劃圓，認識圓周、圓心、半徑、直徑。由實驗理解圓周長約為直徑三倍。認識球、球剖面形狀、球心、半徑、直徑。

第六冊：操作竹筷排出各種三角形，並從中發現不能排出三角形的道理。理解正三角形、等腰三角形的性質。劃正三角形、等腰三角形。認識角（不依附圓形）、角的邊、角的頂點、角的大小。實測認識等腰三角形有兩個角一樣大、正三角形有三個角一樣大。會將兩個一樣三角板拼成一個等腰三角形或正三角形。

我們可以知道其實三年級的教材並沒有對立體圖形有更深的教學，只有對球和圓有做簡單的介紹，但是為什麼二、三年級的區別會這麼的大，研究者選擇一位二年級的學生做訪談，企圖了解該學生無法完整表徵的原因。

訪談地點是研究者的教室，除了錄音機、立體幾何模型、平面幾何模型、紙和筆外，排

除一切可能影響晤談者的因素的情形下進行訪談。

#### 原案一

- 001 師：(展示一個三角錐) 這個是什麼？  
002 生：三角形。  
003 師：(展示一個三角形) 這個又是什麼？  
004 生：三角形。  
005 師：(展示一個鳶型  $\wedge$ ) 這個是不是三角形？。  
006 生：不是。  
007 師：為什麼？  
008 生：(紙鳶形下面尖尖的地方) 因為這邊尖尖的。  
009 師：(展示 ) 這個是不是三角形？  
010 生：是三角形。  
011 師：(一起拿出圓錐和三角形並先拿圓錐再問) 這個是什麼？  
012 生：三角形。  
013 師：(再拿三角形) 這個又是什麼？  
014 生：三角形。  
015 師：這兩個都是三角形，你覺得它們一樣嗎？  
016 生：不一樣。  
017 師：(展示圓錐) 那為什麼你會覺得這是三角形呢？  
018 生：因為它看起來像是三角形。

由原案的 003 到 010 中，我們可以知道學生對三角形已具有 Van Hiele 的第一層次，也就是視覺層次，它可以清楚的判別三角形看起來像什麼，但是它無法對鳶形的圖案說出這個圖形共有四個邊，所以不是三角形這種話語。學生只能說出下面有尖尖的，所以不是三角形，有此可知該同未達 Van Hiele 的第二層次（分析期）。

在 011 到 018 當中，我們可以了解該學童在做立體圖形的判別時，也很容易的運用基本的視覺感官去做單純且簡單決定，而無法做完整的表達。

## 四、結論與建議

### (一) 結論

在上一節中，研究者首先對國小一到五年級學生實施立體幾何表徵概念的測驗，然後針對所回收的圖畫進行分析並加以分類，嘗試以表徵觀點初探學生的立體幾何概念的形成背景及階段，以下歸納本實驗所獲得之結果：

#### 1、立體幾何表徵能力

在立體幾何表徵能力方面，我們可以很清楚的發現一年級和二年級的差異性不大，但是二年級和三年級之間卻有非常明顯的差異性存在，爾後三、四、五各年級之間的差異性又不大。審慎分析二、三年級教材的部分，我們也可以得到二、三年級對於幾何教材的部分，三

年級學生只增加了圓、球、三角形的教材，並沒有對長方體多做分析，但是三年級學生的表現卻和二年級學生有相當大的差異。所以我們可以知道國小兒童在立體幾何表徵方面應該可以概分為兩個階段。

## 2、國小學生立體幾何概念分析

由第一個結論可知到國小階段學生對於立體幾何的認知應該可以分為兩個階段，而根據研究者訪談的結果，我們可以大膽的對這兩個階段下一個較為明確的定義：

階段一：完全以平面幾何的認知來擴展立體幾何的知識：此階段的學童對於立體圖形的認知來自於平面幾何，並且先以視覺的觀點來檢視立體圖形，然後運用他們舊有的平面幾何知識來類化立體圖形，而形成初步的立體幾何概念。

階段二：能夠直接分析立體圖形：此階段的學童已有空間思考的能力，能夠在腦海中構成立體圖形的心像 (image)，並且透過圖畫表達出來。學童達此階段，對於立體幾何的概念不再侷限於所認知的平面幾何圖形，而是能夠直接操弄立體圖形，並形成表徵。

### (二) 建議

本節分二方面，首先提出課程編制方面與教學過程方面的建議。

#### 1、數學課程編製方面

本研究中，可以將國小學童立體幾何的認知概念分為兩個階段，但是在研究中發現各年級中都有屬於第一階段的學生，所以在數學課程編製方面應該要立體幾何和平面幾何一起編製，而不是採用分開的方法。同時立體幾何的課程過少，而且間斷其頗大，建議每個學期至少納入一個單元，並且將平面幾何和立體幾何混合在一起，由立體幾何導出平面幾何的同時也必須注重由平面幾何邁入立體幾何。

#### 2、教學方面

國小教師常將立體幾何的教材視為很簡單的教材，所以縱有完整的教具，也很少使用，並且由於時間的關係，很少有時間可以讓學童慢慢的把玩每個立體圖形。而立體圖形的測驗方面，都是以平面來表現立體圖形，造成空間概念不夠的學童無法理解，甚至害怕立體幾何，所以建議教師教學時能夠多給學生時間操弄幾何圖形，並且在測驗時能提供基本的幾何模型讓學生操弄。

### 參考文獻：\

朱建正 (民 87)。立體圖形的教材處理。國民小學數學科新課程概說(高年級)。國民學校教師研習會。

阮淑宜 (民 87)。幼兒空間概念之探討。國教輔導。30(3)。：台中師範學院

邱顯場 (民 87)。國小兒童小數解題活動類型：一個五年級兒童的個案研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文。

吳德邦 (民 88)。台灣中部地區國小學童范析理幾何思考層次。八十八學年度師範學院教育學術論文發表會論文集。

- 吳幸宜譯/Margaret E. Gredler 著 (民 83)。學習理論與教學應用。台北：心理出版社。
- 林軍治 (民 81)。兒童幾何思考之 *Van Hiele* 水準分析。台中：書恆出版社。
- 張平東 (民 78)。國小數學教材教法新論。台北：五南圖書出版公司。
- 張景中、曹培生 (民 85)。從數學教育到教育數學。台北：九章出版社。
- 張漢宜、郭博安 (民 89)。發展兒童空間感及其在數學學習與閱讀障礙上的運用。教育資料與研究，36，國立教育資料館。
- 數學科教材教法編輯小組編 (民 89)。數學科教材教法。台北：許氏。
- 教育部 (民 82 年)。國民小學數學課本 1~10 冊。出版：教育部。
- 教育部 (民 82 年)。國民小學數學科教學指引 1~10 冊。出版：教育部。
- 甯自強 (民 86)。教育論文集。嘉義：嘉義師範學院。
- 劉秋木 (民 85)。國小數學科教學研究。台北：五南圖書出版公司。
- 盧銘法 (民 85)。國小中高年級學生幾何概念之分析研究。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文。
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.