

學生對數學敘述的角色認知及特殊化能力的關係

楊凱琳* 林福來** 吳俊德***

*國立彰化師範大學數學系 kailinyang3@yahoo.com.tw

**國立台灣師範大學數學系 linfl@math.ntnu.edu.tw

***國立彰化師範大學科學教育所 sunbow49@yahoo.com.tw

摘要

本研究旨在了解學生對於數學敘述的角色認知，以及此認知與特殊化能力的關聯性。研究問題包含：(1)教師對於數學敘述的看法和用語為何？(2)數學敘述中圖形名詞的順序、圖形概念階層關係和精簡冗長的因素如何影響學生對此敘述之角色的判斷？(3)學生在理解敘述的角色、特殊化命題和判斷歸納的結果中的表現有何關聯？研究工具除了從敘述的結構與角色來設計問卷外，也依據教師在課室中對於數學敘述的用語，來修改欲給學生作答的問卷。此研究結果除了更進一步瞭解學生理解數學的特徵外，也可以對教材安排的順序及論證教學的技巧提出具體的建議。

關鍵詞：角色認知(epistemic recognition)、特殊化能力、數學敘述

一、研究動機

數學是一種語言，而數學證明是數學知識體系中的主角。就數學發展過程而言，數學證明是一種辯證的思維；就數學發展結果而言，數學證明是一種表達思維的形式。依此敘述，不難看出語言和思維互相交錯的關係。數學裡含有例子、概念和性質，而表達概念和性質的結果都可以用一個敘述來呈現，而某一敘述的角色會因其邏輯地位而有不同的稱呼，例如：「等腰三角形是有兩邊相等的三角形」是一個定義，「三角形的內角和是 180 度」是一個定理，「等腰三角形的兩個底角相等」是一個性質。但有時候「三角形的內角和是 180 度」也可能是一個臆測，當這個敘述是經由歸納一些例子所得的結果，我們則稱為此結果只是一個臆測，因為它可能僅是在某些例子裡是對的。

學生對於數學敘述的認識在數學論證中扮演著重要的角色，例如若判斷此敘述為定義則不用再經過證明，我們就可以直接利用；若判斷此數學敘述是一個臆測，我們則無法直接使用此敘述來證明，而需要先證明這個臆測成立，我們才可以使用它。就數學敘述在數學論證中的不同角色(例如：定義、定理、臆測等)而言，最多出現在國中二、三年級的幾何單元，以及高一的邏輯和整數論單元。在這些單元的教學過程中，教師會用哪些語詞來描述各式各樣的敘述？而學生在教師這樣的教學用語中，學生對不同敘述的角色所形成的自發性概念是什麼？當國中學過畢氏定理後，再面對高中的餘弦定理時，這兩個定理的角色對學生而言又有何不同？學生以畢氏定理只是餘弦定理的特殊化結果，還是以證明餘弦定理的過程中引用了畢氏定理來評估這兩個定理的角色？這些判斷背後是否和其特殊化一個命題的能力相關？本研究將就這些問題深入瞭解在學生認知

中數學敘述的潛在結構是什麼。

二、研究目的與問題

為了深入瞭解學生認知中數學敘述的潛在結構，本研究擬以下的五個研究問題：

- (一) 教師對於數學敘述的看法和用語為何？
- (二) 數學敘述中圖形名詞的順序、圖形概念階層關係和精簡冗長的因素如何影響學生對此敘述之角色的判斷？
- (三) 學生在理解敘述的角色、特殊化命題和判斷歸納的結果中的表現有何關聯？

三、研究方法

(一) 研究設計

此研究以學生的問卷調查和教師的半結構訪談作為蒐集資料的方法，再以敘述統計和在既有目標下意義化的歷程作為分析量化和質性資料的方法。研究小組首先從國中二、三年級的教科書中找出有關幾何概念的敘述，再經過研究小組的討論設計調查學生和訪談教師的問卷。研究工具除了從敘述的結構與角色來設計問卷外，擬從半結構訪談收集教師在教學過程中對敘述角色的用語，依據教師的用語修改欲給學生作答的問卷。

(二) 研究對象

前置研究先以彰化縣郊區某所國中的三位國中數學老師和國中三年級學生共 96 人為研究對象，對於研究問題先作初步的回應。將依此初步結果作工具上或方法上的調整後，再進一步蒐集高中和更多研究對象的資料。本文主要報導前置研究的過程與成果。

(三) 研究工具

1、訪談問卷

(1) 訪談目的

訪談目的在於瞭解教師在教學時會使用哪些語詞來描述一個敘述的角色。因為學生對敘述的認知是受到教師教學影響，例如有些老師會告訴學生要記下來的就是定義、定理就是比較有價值而性質就是沒有價值...等。所以研究者預期透過訪談得到教師在教學過程中使用什麼語詞來形容數學敘述的角色。

(2) 訪談內容與方式

研究者對教師做半結構的訪談方式，訪談問題會隨著每位受訪者（教師）不同的反應有所調整，訪問內容主要是在數學知識和教學相關中的數學敘述之角色。在訪談過程中，主要是採一對一的方式，每位教師的訪談時間約 20 分至 25 分。根據第一次訪談的內容，研究者可能會針對資料不足的部分對受訪者作第二次的訪談。

2、調查問卷

本研究以敘述方式和外在判斷作為設計「數學敘述之角色判斷」問卷的兩個因素，以下先描述何謂敘述方式和外在判斷，再針對問卷架構進行說明。

(1) 敘述方式

Zaslavsky & Shir (2005) 在針對某概念的定義設計問卷時，考慮到的變因有精簡 (minimal)、階層關係 (level of hierarchy) 和種類 (type)。我們這裡除了以精簡和階層關係作為敘述方式的變因外，還另外考量語法上的表達順序。精簡敘述的例子和非例子

如：「平面上，一角為直角的菱形是正方形。」和「平面上，如果一菱形的一角為直角，則此菱形為正方形。」。階層關係是指用來定義某概念所用到的概念之階層關係，以定義正方形為例：「平面上，一角為直角的**菱形**是正方形。」、「平面上，對角線相等且垂直的**平行四邊形**是正方形。」、「平面上，四邊皆等長且四角皆為 90 度的**四邊形**是正方形。」等三種定義方式的概念階層分別是由低階至高階，即特殊到一般。另外，每一種概念都有兩種不同的表達順序，例如：「平面上，正方形是有一角為直角的菱形。」和「平面上，一角為直角的菱形是正方形。」。

(2) 外在判斷

外在判斷是指對敘述之正確性和敘述之有效性的判斷，以及對敘述的認識性評論。有關判斷正確性和有效性的例子是：認為某敘述是對的但不知道為何是對的理由則屬於臆測；或是認為某敘述是錯的可是舉不出反例也屬於臆測。但是，學生的認知是否符合外在客觀的判斷則需要進一步的調查。有關認識性評論的例子是：定義是需要背的；或是定理是比性質高級的。

(3) 問卷設計架構

發展中的問卷題目可區分成四個部份：第一部份以問答題的方式命題，測驗目的是在學生回答相關概念的敘述角色之前，想瞭解學生本身對於此相關概念的數學知識以及對不同角色用語的認識性評論。第二部份以選擇題的方式命題，想瞭解不同的敘述方式是否會影響到學生判斷、學生如何理解和接受這樣的敘述方式，同時也想知道在階層關係和精簡程度上之差異是否同樣會對學生產生影響。在答案部份由於考慮到學生對於敘述有效性的看法，所以有「知道理由」和「不知道理由」。這兩者之含意：前者包括聽過、看過或能寫出來，而後者答案則包括沒聽過、沒看過或不能寫出來。問卷中的數學敘述主要是和四邊形和三角形相關的概念。

第三部分以選擇題的方式命題，想瞭解學生特殊化一個命題的能力。每個子問題都有兩個敘述，某一敘述的前提或結論是另一個敘述之前提或結論的特殊化。此部分有三個題組，其各包含不同的推理的概念；(a) 已知 $P \rightarrow Q$ 、 $P_1 \rightarrow P$ ，所以 $P_1 \rightarrow Q$ 不需證明；(b) 已知 $P \rightarrow Q$ 、 $P_1 \rightarrow P$ 、 $Q \rightarrow Q_1$ ，所以 $P_1 \rightarrow Q_1$ 不需證明和(c) 已知 $P \rightarrow Q$ 、 $P \rightarrow P_1$ 、 $Q_1 \rightarrow Q$ ，不能推得 $P_1 \rightarrow Q_1$ 。第四部分以選擇題的方式命題，讓學生能在研究者設計的歸納情境脈絡中去判斷歸納出來的敘述之角色，瞭解學生是否會根據其情境脈絡做出敘述是臆測的判斷。

(4) 問卷版本

問卷中的第二部份由於考慮到三個面向（名詞順序、概念階層關係、精簡和冗長）對學生的影響，所以需要較多的題目。為了避免過多問題造成學生失去回答問題的耐性，因而影響到學生回答問卷之信度，所以將第二部分的問題分成三組，使用同樣的問卷架構分配問題後形成三種版本。

(四) 資料收集與資料分析

本研究的資料分析包含質性資料與量化資料。質性資料為半結構式訪談；量化資料為調查學生對於數學敘述的認識和其推理關係之問卷。其中質性資料是教師的訪談，會利用錄音的方式紀錄，將錄音資料轉換為對談記錄之電腦檔留存，並加以編碼、分類、分析；對學生做的問卷調查也會輸入電腦存留，並用統計的方式分析。其中量化資料的

處理先以 Microsoft Excel 軟體建立資料庫，再加以進行統計分析。

四、結果與討論

(一) 教師對數學敘述在數學和教學上的看法

受訪教師認為定義就是以前的數學家對某一種概念下的定義、經過長時間和很多學者的驗證、不變的；名詞解釋偏向口語和個人的使用；定理是推出來的；性質則是從定義來的需要證明的。雖然數學教師本身對於中學數學知識有較深入的瞭解和認識，因此對於如何判斷數學敘述有自己一套的認知和想法，但其對於如何教導這些數學敘述給學生知道並理解卻有另外一套的想法，因為他們必須要考慮到其他的外在因素，例如學生數學能力的差異、考試的壓力...等，所以他們雖然知道數學敘述的判斷對學生以後在學習數學上扮演著很重要的角色，但他們也不會很嚴格的要求學生理解如何區別這些敘述的差異。

受訪教師認為數學課本對於數學敘述都有註明其數學敘述是定義、定理...等等，但由於國中生並不需要學會這些敘述的身分和如何區辨這些不同的敘述，所以教師在教學過程中並不會太強調或是刻意區分其名詞不同的因素為何，想當然學生也不會注意到這些名詞的差別。在全文時，我們將更詳細呈現教師對於數學敘述不同用語的看法。

(二) 不同數學敘述方式對學生判斷敘述角色之影響

認為名詞放在前面的數學敘述是定義的學生有 40.5%，定理或性質的學生有 29%。認為名詞放在後面的數學敘述是定義的學生有 36.5%，定理或性質的學生有 32.5%。對名詞放在前面的數學敘述，約有 39.4%的學生認為是簡潔明瞭的、30.2%的學生認為是尚可、14.9%的學生認為是冗長。對名詞放在後面的數學敘述，約有 29.5%的學生認為是簡潔明瞭的、38.3%的學生認為是尚可、16.3%的學生則認為太冗長。幾乎所有的題組中，學生受到數學敘述順序影響而做出前後不同判斷的比例約在 41.1~46.2%，而在改變判斷的學生中有 36.0%的學生都在定義和定理(或性質)兩種角色之間產生變化。但是，特別有一個題組的變化率只有 25.6%。學生回答什麼是正方形時，有 91.7%的學生至少寫下四邊等長或四個直角，兩者都寫的有 57.3%的學生；而變化率最低的這個題組的敘述正是用四個邊和四個角來描述正方形。所以，研究者推論學生對於熟悉的敘述比較不會受到名詞順序的影響來判斷此敘述的角色。另一方面，在所有題組中，有 34.6%的學生認為名詞在前面的數學敘述是容易理解的，也有 31.5%的學生認為名詞在後面的數學敘述是容易理解的。

認為高階層(如：四邊形)的數學敘述是定義的學生有 43.5%，是定理或性質的學生有 29.2%。認為低階層(如：菱形)的數學敘述是定義的學生有 31.3%，是定理或性質的學生有 35.4%。對高階層的數學敘述，約有 37%的學生認為是簡潔明瞭的、33.9%的學生認為是尚可、15.1%的學生認為是冗長。對低階層的數學敘述，約有 29.2%的學生認為是簡潔明瞭的、37%的學生認為是尚可、13.5%的學生認為是冗長。在所有的題組中，學生受到數學敘述是高階或低階的影響而做出前後不同判斷的比例在多邊形和平行四邊形敘述中約有 57.1%、四邊形和矩形敘述中約有 32.7%、四邊形和菱形敘述中約有 37.1%，其中 36.2%的學生都在定義和定理(或性質)兩種角色之間產生變化。總之，學生傾向將高階層的數學敘述判斷成定義，將低階層的數學敘述判斷成定理或性質。另一方

面，在所有題組中，有 31.8% 的學生認為低階層的數學敘述是容易理解的，也有 35.3% 的學生認為高階層的數學敘述是容易理解的。

認為精簡的數學敘述是定義的學生有 32.9%，是定理或性質的學生有 22.6%。認為冗長的數學敘述是定義的學生有 30.7%，是定理或性質的學生有 25.5%。對精簡的數學敘述，約有 37.8% 的學生認為是簡潔明瞭的、36.8% 的學生認為是尚可、11.3% 的學生認為是冗長。對冗長的數學敘述，約有 31.1% 的學生認為是簡潔明瞭的、31.8% 的學生認為是尚可、20% 的學生認為是冗長。在所有的題組中，學生受到數學敘述是精簡或冗長的影響而做出前後不同判斷的比例約在 37.1~66.1%，其中 33.3% 的學生都在定義和定理(或性質)兩種角色之間產生變化。另一方面，在所有題組中，有 65.3% 的學生認為精簡的數學敘述是容易理解的，也有 64.9% 的學生認為冗長的數學敘述是容易理解的。

整體而言，約有 57.8% 的學生不受名詞順序影響，41.7% 的學生不受敘述的概念階層影響，51.4% 的學生不受精簡冗長的影響。也就是說，概念階層是三個因素中對學生判斷敘述角色之影響力較大的一個因素。

(三) 學生對於數學敘述認識及其特殊化命題的關係

第三部份總共有三個題組，每個題組中都有兩個敘述，某一敘述的前提或結論是另一個敘述之前提或結論的特殊化。學生在第一題組正確回答的有 21.9%，第二題組正確回答的有 22.9%，第三題組正確回答的有 39.5%。表一是學生特殊化一個命題的表現，結果顯示 37.6% 的學生在特殊化命題的回答全錯；31.2% 的學生只對一個題組，而且主要是正確回答第三題組；13.5% 的學生只對兩個題組，主要是正確回答第一、二題組。

表一：特殊化一個命題的回答情形之分佈

第一題組	第二題組	第三題組	人數	%
O	O	O	4	4.2
O	O	X	9	9.4
O	X	O	3	3.1
O	X	X	5	5.2
X	O	O	1	1.0
X	O	X	8	8.3
X	X	O	30	31.2
X	X	X	36	37.6

在第一題組特殊化結果正確的學生中，有 85.7% 的學生都正確判斷兩個敘述的真實性；特殊化結果錯誤的學生中，有 75.0% 的學生正確判斷兩個敘述的真實性。在第二題組特殊化結果正確的學生中，有 52.6% 的學生能正確判斷兩個敘述的真實性；特殊化結果錯誤的學生中，則有 30.8% 的學生正確判斷兩個敘述的真實性。在第三題組特殊化結果正確的學生中，有 70.6% 的學生可以正確判斷兩個敘述的真實性；特殊化結果錯誤的學生中，有 75.9% 的學生都正確判斷兩個敘述的真實性。從上面的數據顯示，除了第三題組外，有較多比例會特殊化的學生比不會的學生更能正確判斷命題敘述的真實性。如此，可以合理推論如果學生無法正確判斷數學敘述的真實性，其特殊化的表現也會不佳。

由於第三題組和前兩個題組的差異較大，而且正確回答第三題組的學生可能不是因為能夠特殊化，而是受到證明概念的影響。所以我們將以前兩個題組將學生分群，再作

進一步的比較。至少對一題的學生，其判斷數學敘述時約有 56.1% 的學生不會受到名詞順序的影響、32.5% 的學生不會受到概念階層的影響和 55.6% 的學生不會受到精簡冗長的影響。兩題全錯的學生，其判斷數學敘述時是約有 55.6% 的學生不會受到名詞順序的影響、43.3% 的學生不會受到概念階層的影響和 48.6% 的學生不會受到精簡冗長的影響。

(四) 學生判斷歸納臆測及其對數學敘述的認識與特殊化命題的關係

表二：在歸納情境中判斷敘述角色的回答情形之分佈

第一題組	第二題組	人數	%
O	O	1	1.0
O	X	5	5.2
X	O	1	1.0
X	X	89	92.8

第四部份總共有兩個題組，表二是學生在歸納情境中判斷敘述角色的表現。結果顯示全部答對的有 1.0%、第一題組正確而第二題組錯誤的有 5.2%、第一題組錯誤而第二題組正確的有 1.0%，全錯的有 92.8%。

表三：在歸納情境中判斷特殊命題的回答情形之人數分佈

歸納 \ 特殊化	全對	至少對一題	全錯
至少對一題	16	13	60
全錯	0	0	7

原本想要繼續比較在兩題歸納情境中能正確與不能正確判斷敘述是臆測的學生，其判斷數學敘述時受到名詞順序、概念階層或精簡冗長影響的比例，以及其能正確特殊化一個命題的比例是否不同。可是，因為有 92.8% 的研究樣本都無法正確判斷敘述是臆測的學生，使得能正確判斷敘述是臆測的學生之樣本只有 7 位，不適合直接比較這兩群學生在其它面向的表現之比例。所以，目前需要繼續蒐集高中學生的樣本，看看是否能增加正確判斷敘述是臆測的學生人數，再回答判斷歸納的結果為臆測和理解敘述的角色。

五、結論與建議

數學教師在知識上雖然比較能夠區分數學敘述的角色，但還是會把在幾何原本屬於性質的敘述當成定義(例如：三角形內角和 180 度)。數學教師在教學上會使用定義、名詞解釋、性質、定理、公式等語詞來介紹數學敘述，但是並不強調學生分辨這些用語在知識結構上的差異。在此，建議教師注意自己的教學用詞，即使不明確介紹這些敘述的角色，學生仍舊受到教師用語的影響也才能瞭解不同角色的數學敘述。

在本研究所提供的各種敘述中，學生因名詞順序而改變其敘述角色的比例約在 25.6%~46.2%，因概念階層不同而改變其敘述角色的比例約在 32.7%~57.1%，因精簡冗長而改變其敘述角色的比例約在 37.1%~66.1%。研究發現敘述中所使用的內容符合學生對此敘述所指概念的認識時，會減少學生因名詞順序不同、概念階層不同或精簡冗長而改變敘述角色的比例。另一方面，這三個因素並不會明顯地造成學生認為是否容易理解的差異。特別的是，有 11.3% 的學生認為精簡的敘述(客觀上)是冗長的，有 31.1% 的學生認為冗長的敘述(客觀上)是簡潔明瞭的。

能正確特殊化一個命題的學生之比例並不高，這和之前的研究結果(林福來等, 2003) 有很大的差異。此原因是之前的特殊化問題只問單向的特殊化(由敘述 A 到敘述 B)，本研究修改成雙向的特殊化(由敘述 A 到敘述 B，和由敘述 B 到敘述 A)，希望能更有效地檢測學生是否具有特殊化一個命題的能力。比較學生能和不能特殊化一個命題，其對數學敘述之認識有何不同時，結果發現能特殊化一個命題的學生並沒有明顯較多的比例不受名詞順序、概念階層和精簡冗長的影響。能正確判斷歸納情境的敘述之角色的學生之比例非常的低，這個現象值得數學教育者的關注。因為在推行探究式的論證教學或形成臆測的活動時，學生可能把探究的過程當成證明，把形成的臆測當成已證的性質或定理。如此，就難以實現能判斷有效性以及能區分真實性與有效性的教學目標。

研究結果尚未顯現學生對數學敘述角色之認識和其特殊化命題、判斷歸納情境的敘述之角色間有什麼關聯性，一方面可能是此關聯非靜態的差異，而是一種動態過程的現象；另一方面可能是本研究樣本的歧異性不夠，而削弱了潛在的關聯性。所以，建議未來除了蒐集更多的樣本進行分析，也透過訪談過程進一步瞭解學生在特殊化命題時或是在歸納情境中以什麼用語描述命題，以及這些用語又如何影響學生的判斷。

參考文獻

- 林福來等 (2003)。青少年數學論證能力發展研究(3/3)。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告。計畫編號：NSC 91-2522-S-003 -002。
- Zaslavsky, O. & Shir, K. (2005). Student's conception of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 347-395.