

## 論數學素養之意涵

陸昱任 譚克平

國立台灣師範大學科學教育研究所

hitachi@ilc.edu.tw、t45003@ntnu.edu.tw

### 摘 要

近年來數學素養的相關主題逐漸受到歐美等國的重視，儘管數學教育社群對於學生或公民數學素養的提升有志一同，不過對於數學素養意涵的見解，卻也出現許多分歧的意見，致使其意義顯模糊，故本研究嘗試透過文獻的分析與討論，期能予以澄清數學素養的意涵。基於上述的目的，在參考了素養的意義、國外數學素養意涵的相關文獻以及考量時代的需求，本研究認為一個具備數學素養的個體應當能在社會文化的脈絡下，傾向並能以數學的方式與其所處的周遭產生合理與有效的互動，並在互動的過程中，能評估該方式與結果的適切性並予以修正。在文章結構的安排上，將以數學素養的用詞與緣起以及數學素養意義的多樣性開始談起，再就數學與數學素養之間的關係予以探討，爾後再佐以素養的意涵與時代的需求，逐步釐清數學素養的意涵。

關鍵詞：數學素養、數學素質

晚近十數年來，許多與素養有關的用語諸如：科學素養 (Scientific literacy)、環境素養 (Environmental literacy)、電腦素養 (Computer literacy)、科技素養 (Technological literacy)、經濟素養 (Economic literacy) 與政治素養 (Political literacy) 等無不紛紛見諸於專業或日常的討論中 (靳知勤, 2002; Mathematics Council of The Alberta Teachers' Association [MCATA], 2001; Steen, 1990)。而近年來，有不少數學課程與數學教育團體，都將學生或公民數學素養的提升視為是數學教育的首要目標 (教育部, 2001; American Association for the Advancement of Science [AAAS], 1989; Australian Association of Mathematics Teachers [AAMT], 1997, 1998; Cooper, 1999; D'Ambrosio, 1998, 1999a; Department of Education, Training and Youth Affairs [DETYA], 2000; Doig, McCrae & Rowe, 2003; Gal, 1995; Educational Testing Service [ETS], 1999; Kemp & Hogan, 2000; MCATA, 2001; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 1991; Niss, 1996; Romberg, 2001a, 2001b)。儘管眾多學者與機構對於數學素養的提升有志一同，然其對數學素養的用字與意涵的認定在見解上卻出現頗多的分歧，以致造成一個數學素養各自表述之窘境 (Bishop, 2000; Cooper, 1999; D'Ambrosio, 1999a, 1999b; DETYA, 2000; Doig et al., 2003; Gal, 2002; Hoogland, 2003; Jablonka, 2003; Kemp & Hogan, 2000; Pugalee, 1999a, 1999b; Steen, 1999)。而 Kilpatrick (2001) 更認為，儘管

數學教育研究的網絡相當廣泛，但卻未適當地說明有關數學素養的相關問題。因此值此數學深化與提升全民素養的時代下，實應針對數學素養此一構念予以探析，以藉此作為未來據以實踐之方向與依據。

為此本文期透過文獻的蒐集與內容分析澄清數學素養的意涵，在此目的下底下將就數學素養的用詞與緣起以及數學素養意義的多樣性開始談起，再就數學與數學素養之間的關係予以探討，爾後再佐以素養的意涵與時代的需求，逐步釐清數學素養的意義。

## 一、數學素養的用詞與緣起

在檢視數學素養文獻時可發現，許多的機構或學者在討論數學素養時採用不同的用字來詮釋與探討數學素養之相關議題。Hoogland (2003) 認為，不同的國家會使用不同的用字來包含數學素養的概念，舉例來說，英國多用 Numeracy 及 Mathematical Literacy；美國多用 Mathematical Literacy 與 Mathematical Proficiency。亦有其他學者在文獻中使用其他的用字來函蓋數學素養的意涵，例如部分學者使用 Matheracy 來討論數學素養 (Bishop, 2000; Bonotto, 2001; D'Ambrosio, 1999b; Skovsmose, 1998)。

Numeracy 最早源起於 1959 年英國的 Crowther Report，該報告首次使用 Numeracy 來作為與讀寫素養 (literacy) 相對應之用字 (郭慧玲, 2002; DETYA, 2000; Doig et al., 2003; Kemp & Hogan, 2000; National Research Council, 1989)。Numeracy 是最早出現有關數學素養的相關用詞，此一用詞較常於英國及其過去一些殖民地地區使用，特別像是澳洲和紐西蘭等地區 (Doig et al., 2003)。Literacy 是在 1970 年代英國的教育評論中逐漸嶄露頭角，該字在當時主要著眼於學生讀寫能力的不足，不過之後的意涵與用途廣泛的擴及語言使用的所有範疇 (Stoessiger, 2003)，Mathematical literacy 首次作為實際課程與教學的核心討論是美國數學教師協會 (NCTM) 所組織的學校數學標準委員會 (Commission on Standards for School Mathematics) 於 1986 年在著手擬定學校數學改革的任務時首度所提出的願景 (NCTM, 1989, 1991; Romberg, 2001a)。Mathematical Proficiency 主要源自於 2001 年 Adding it up: Helping children learn mathematics，其目的旨在調和困擾美國某些地區的數學戰爭 (Math War) 的爭議，並選定 Mathematical Proficiency 作為一個成功數學學習相對應的用詞 (Kilpatrick, 2001)。文獻中有關 Mathematical Proficiency 的討論亦都沿用該書中對於 Mathematical Proficiency 的結構 (Hyman, 2003; RAND Mathematics Study Panel, 2002)。Matheracy 一詞的提出，主要是呼應在十九世紀早期，課程主要是以閱讀、書寫以及算術 (3Rs) 為基礎，不過隨著時代的變遷，過去所強調的 3Rs 已不為時代所需。因此 D'Ambrosio (1998, 1999a, 1999b) 提出 Literacy、Matheracy 以及 Technoracy 應是取代過去 3Rs，回應新時代的新取向。

## 二、從數學素養意義的多樣性談數學素養

由數學素養的用詞與緣起中的討論可瞭解數學素養用字的混亂，而在檢視有關數學素養意涵的文獻時亦出現多頭馬車的情形。諸如 Stoessiger(2003)認為所謂的數學素養是指能「將數學技能在日常生活、工作場合與社群中發揮功能。」而經濟合作暨發展組織(Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD])所主持的國際學生評量計畫(Program for International Student Assessment [PISA])中，則是將數學素養的意涵視為是：

個體應能確認與瞭解數學在這個世界所扮演的角色、能做出有充分根據的判斷並且能使用及投入(engage in)數學以符合作為積極的(constructive)、參與的(concerned)以及具反思(reflective)之公民的需要。

(OECD, 1999, 2003)

由此不難發現不同學者或專業機構對於數學素養意涵的論述的確有差異存在，故有學者針對不同數學素養的取向進行歸納討論(Gellert, Jablonka & Keitel, 2001; Jablonka, 2003; National Research Council, 1989; Steen, 1990)。National Research Council(1989)與 Steen(1990)認為不同數學素養的取向應當反應數學或統計概念運作不同面向，而將數學素養的取向分為五類，第一個實用數學素養(Practical numeracy)著眼於個體的利益，將數學及統計技能立即應用在日常生活的工作；第二個公民數學素養(Civic numeracy)著眼於社會的利益，其在於確認公民有能力了解來自於重要公共議題的數學概念；第三個專業數學素養(Professional numeracy)著眼於工作場合的需求，不同工作皆對數學能力有所需求；第四個休閒數學素養(Numeracy for leisure)則是在考量許多休閒娛樂皆需要的數學素養；第五個文化數學素養(Cultural numeracy)則是著眼於個體能體會數學的力量與美，並且是有關於哲學、歷史與認識論的層次。

由此可知，數學素養意涵的討論總離不開個體、數學以及現實與社會之間的論述，在個體的部分當然牽涉到個體的背景與發展階段等；在數學的部分則是涉及數學內容、數學能力與使用數學的意向等；在現實與社會的部分則是會考量到時代的要求以及社群文化的差異性。簡而言之數學素養不外乎是在討論個體在周遭環境中如何與其他的人、事、物之間產生數學的鏈結關係，當然在這裡就產生了一些值得思考的問題，諸如從這樣的討論中可以發現數學素養絕不等同於數學，數學素養應當是一種整合性的能力，也包含了對周遭環境的認識與瞭解，但是數學素養到底與數學有甚麼關係？此外，時代不斷的在躍進，時代的轉變到底帶給了素養甚麼樣的轉折？底下將就這兩個問題持續探索，以達成瞭解與澄清數學素養意涵的目的。

## 三、從數學與數學素養的關係談數學素養

一般而言在許多學者的論述中皆認為數學與數學素養是不同的，數學素養是較直

觀的少形式化的，較與情境有關的少抽象的，較具體的少符號化的（Kerka, 1995; Stoessiger, 2003; Steen, 2001）。但是對於數學與數學素養的關係而言，則咸認為數學是數學素養的根基，其對於培養具有數學素養的個體擔有重要的角色（AAMT, 1998; DEA, 1995; DETYA, 2000; Steen, 1999）。因此數學素養的強化與重視並非排斥數學的學習，相反的數學是支持學生數學素養的要素，是故應該提升學校數學教與學的品質，以確保作為數學素養基礎的學校數學能被學生好好的學習（AAMT, 1998; DETYA, 2000）。

至於內容主題與數學能力的部分，則可以從使用甚麼樣的數學形成之間的連結關係、怎樣使用數學形成之間的連結關係以及連結關係的強弱等三個層面來討論。在使用甚麼數學的部分，包含不同的數學內容抑或數學能力的討論，有些機構或學者在闡述數學素養時在數學內容主題的說明部分僅涉及數、量與統計的應用（例如：Cockcroft Report），而未涉及其他諸如幾何與代數等相關主題，不過由於數學素養主要是涉及個體與生活周遭的數學連結關係，而生活周遭又充斥了許多的形體及方位的關係，也就是說數學素養的數學內容實不應侷限在部分的主題內容，而應反應真實世界中處理現象的數學需求，而這些的需求又非侷限在如傳統對於數學內容分類的單一類別中，因此如 Steen（1990）與 OECD（1999, 2003）則是用現象組織的方式來說明數學內容的分類。在怎樣使用數學形成之間的連結關係則牽涉到數學能力的展現，PISA 是以數學化來說明解決生活實際問題的基本過程，而這個過程所需展現的數學能力是以 Niss 與其在丹麥的同事於 1999 年所發表的八個數學能力為依據（OECD, 2003）。由此可知，OECD 視數學素養所需的數學能力，實際上就是數學課堂上應當被重視的數學能力。連結關係強弱問題則會牽涉到個體是否傾向以數學的方式與生活的周遭互動，能展現自身數學的條件在其所處的周遭發揮應有的功能（Steen, 1990）。總而言之，數學素養的體現在數學的範疇應包含多元的主題內容與能力表現，亦應表現出一種感知與使用數學的傾向。

#### 四、由素養意涵與時代需求談數學素養

在過去素養不外乎是意指能夠讀或寫的能力（Allen, 1990; Collis, 1973; Cooper, 1999; Cremin, 1988; Good, 1973; Guralnik, 1972; Pearsall & Hanks, 1998; Neil, 2001）。但是隨著時代的邁進，一個僅會寫自己的姓名或讀出路名的個體現已不符期待，同理在資訊時代下一個僅會計算（arithmetic）的個體將無法滿足時代的需求，正如同 Hiebert 等人（1997）認為獲致成功的技能將因時代的改變而有所不同，儘管我們無從確切得知往後的改變為何。所以符合時代需求的數學素養絕非僅是局現在過去的 3R，而是應當呼應時代的需求。Packer 於 1999 年整合有關市場工作需求的報告，認為高深的或高階的數學內容並不被大部分的現代國民所需要，就業市場需要的是解決一般、重要問題的能力（引自 Cooper, 1999）。陳恒安（2003）在討論科學素養時亦認為，雖然科學知識內容在特定條件下有其有效性，但卻不是一般民眾所需要的科學素養中最重要或最急迫的一項，也就是說儘管數學知識內容是構成數學素養的基礎，但是在討論數學

素養的意涵時數學的知識與內容絕非最重要的因素。孔企平(2002)與朱德江(2004)認為，在過去只要掌握熟練的運算技能就被認為具有數學素養，而社會在不斷資訊化的狀況下，許多制式的工作已經都交由電腦或計算機處理，對於運算技能的要求逐步降低，而對蒐集信息、處理信息的能力和運用數學知識解決實際問題等數學素養的要求卻逐步提高，而這樣的論述更提升了一個具備數學素養的個體對於評估能力需求的迫切性。在知識爆炸的現今社會，儘管知識內容在特定條件下有其有效性，但一個人並無法習得所有的知識，因此作為一個後工業時代具備素養的個體，最重要或最急迫的應該是對知識生產與傳播的真實過程抱有批判與質疑的勇氣(陳恒安, 2003)，以符合身處新時代下的普遍大眾之所需，而此一觀點亦再反應評估或反思的表現對於一個具備素養的個體是重要的。

素養在古代漢文中隱含著道德和價值的觀念，是同時兼具德行與才能的，所指的是好的修養(三民書局大辭典編纂委員會, 1985)。時至今日尹建中等(1997)則認為，素養是指個人與外界作合理而有效的溝通或互動所需具備的條件。其中「外界」包括了人、事(組織、制度)及物(工具)；「合理」即蘊涵了客觀的價值判斷；「有效」則意味著素養的水準是可以有程度性差異；「條件」則包括了認知、技能(行為)及情意三方面。這樣對於素養意涵的詮釋雖然強調了與周遭的溝通與互動，正反應了數學素養中的連結關係，僅不過一個具備數學素養的個體倘若只是圖具條件而無法具以實踐，實不符許多專家學者對於數學素養意涵的論述。

## 五、結論

數學素養意涵的討論總離不開個體、數學以及現實與社會之間的論述，整體而言是關乎個體在周遭環境中如何與其他的人、事、物之間產生數學的連結關係，也就是說這個數學的連結關係涉及多元的數學主題與數學能力，且應反應使用數學的感知與傾向，而周遭的環境亦當在社會文化的脈絡底下。此外社會的變遷反映了時代的需求，一個具備數學素養的個體應當具備評估或反思的能力。再者從素養的意涵得知，一個具備數學素養的個體應能以自身的數學條件與周遭產生合理而有效的溝通與互動。綜合數學素養相關論述、素養的意涵與時代的需求，本研究認為一個具備數學素養的個體應當能在社會文化的脈絡下，傾向並能以數學的方式與其所處的周遭產生合理與有效的互動，並在互動的過程中能評估該方式與結果的適切性並予以修正。儘管本文僅以極短的篇幅試圖說明與澄清數學素養的意涵，但仍期望藉此能拋磚引玉並對學生與全民數學素養的提升有所貢獻，若對本文相關論述欲更進一步瞭解者，可參閱陸昱任(2005)中對於數學素養意涵的論述及相關議題的討論。

## 參考文獻

陸昱任(2005)。論數學素養之意涵與小學評量工具之開發。國立台灣師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版，台北。

- 教育部 (2001)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要—數學學習領域。台北：作者。
- Australian Association of Mathematics Teachers (1997). *Numeracy = Everyone's Business*. The Report of the Numeracy Strategy Development Conference, Perth, April, Australian Association of Mathematics Teachers, Adelaide.
- D'Ambrosio, U. (1998). Literacy, *Matheracy*.and *Technoracy* – *The New Trivium for the Era of Technology*. Paper presented at the meeting The First Mathematics Education and Society Conference, Nottingham, UK.
- D'Ambrosio, U. (1999a). Literacy, Matheracy, and Techonoracy: A New Trivium for Today. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 131-153.
- D'Ambrosio, U. (1999b). In Focus...Mathematics, History, Ethnomathematics and Education: A Comprehension Program. *The Mathematics Educator*, 9(2), 34-36.
- Department of Education, Training and Youth Affairs (2000) *Numeracy, A Priority for All: Challenges for Australian Schools*. Canberra, New South Wales: Author.
- Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. In A.J. Bishop, M.A.Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, F.K.S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 75-102). The Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kilpatrick, J. (2001). Understanding Mathematics Literacy: The Contribution of Research. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 101-116.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston VA: Author.
- National Research Council (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington, D. C.: National Academy Press.
- Organization for Economic Co-operation and Development. (1999). *Measuring student knowledge and skills - A new framework for assessment*. Paris: Author.
- Organization for Economic Co-operation and Development. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: Author.
- Romberg, T. A. (2001a). Mathematical Literacy: What does It Mean for School Mathematics? *Wisconsin School News*, 56(6), 5-31.
- Romberg, T. A. (2001b). *Mathematics goals and achievement in the United States*. Paper presented at the Proceedings of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Netherlands, Utrecht.
- Steen, L. A. (1990). Numeracy. *Daedalus*, 119 (2), 211-231.
- Steen, L. A. (1999). Numeracy: The New Literacy for a Data-Drenched Society. *Educational Leadership*, 57(2), 8-13.

【因考量版面參考文獻不及備載，有興趣較詳細的參考文獻者可與本文作者聯繫】