教師對學生解題信念與學生解題表現之差異

劉家樟　楊凱琳
桃園縣中壢國小　國立彰化師範大學數學系
jj580125@yahoo.com.tw　kailinyang3@yahoo.com.tw

摘　要

本研究以改編的「學生文字題基本測驗」及「教師對學生解文字題信念問卷」為研究工具，藉以瞭解國小六年級學生在文字題測驗之解題表現，並探討國小教師文字題解題教學信念的特徵及其與學生解題表現的差異。研究結果發現：不同背景變項之國小教師文字題教學信念有差異；不同文字題解題教學信念的教師對學生解題表現之評估與學生解題表現有差異。

關鍵字：數學教學信念、解題表現、解文字題信念

一、　緒言

教師在他們的數學課室裡，面對教學「關鍵時刻」的判斷時，取決於教師個人關於數學的信念和他從前的學習過程（Shroyer, 1978），同時，教師的數學知識及他們預期學生能達成教學目標的信念影響其教學內容的決定（Nathan ＆ Koedinger, 2000a; Porter, Floden, Freeman, Schmidt, ＆ Schwille, 1988; Simon, 1995）。故，深入探討教師的教學信念，將有助於瞭解教師教學時的思考；教師釐清自己教學時的想法，也使其能在實際的教學中達最佳的成效（Richardson, 1996; Thompson, 1992）。因此，教師在數學教學方面有責任面對他們現有的信念和知識；亦即，教師必須有能力去了解數學和做數學的方法以及關於孩子怎樣學習數學，進而改善其數學教學的策略。

國內外有關解題的研究大多把焦點投注在解題的歷程（Lester, 1980; Mayer, 1992; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985）及如何提升解題能力（Lee, 1977; English ＆ Halford, 1995）；但在教學情境中，師生隨時會因其個殊的理解與感受，採取自認為有意義的方式，互動於教學環境中。這些個殊的理解與感受及自認為有意義的方式便牽涉到信念的問題，故許多問題解決的研究亦提到與教學者之信念或態度有關（Yackel, Cobb, Wood, Wheatley, ＆ Merkel, 1990；Shroyer, 1978）。以數學解題為例，許多研究已經特別地注意到教師對學生實際問題解決行為的信念與學生答題表現之間的關係（劉家樟、楊凱琳，2005；Nathan ＆ Koedinger, 2000a, 2000b, 2000c; Nathan & Petrosino, 2003; Koedinger, 2004）。其中劉家樟、楊凱琳（2005）的研究中，已探討國中一年級新生由算數過渡至代數之解題表現，並以三位焦點教師作為個案，進行問卷及訪談來了解教師對學生解題信念的差異。本研究進一步探討學生解題策略對其解題表現之影響，並以量化研究的方式，調查國小六年級數學授課教師對學生解題之信念，進而比較學生解題表現與教師對學生解題信念之差異。具體而言，本研究之目的如下：

1. 瞭解國小教師對學生解不同表徵與不同未知數位置的問題時之解題表現信念及教學信念。
2. 探討國小教師解文字題教學信念、對學生解題表現信念與學生解題表現之差異。

二、 文獻探討

（一）數學解題

有關解題的研究，許多學者發現解題的過程似乎呈現一定的次序規則（Lester, 1980; Mayer, 1992; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985）。在數學解題教學過程中，不同類型的題目具有不同的難度，學生在解題思維或解題方法上也有所不同。Polya（1945）在解題歷程中提到的理解問題與解題計畫；Lester（1980）在解題歷程中對問題的目標分析及計畫發展，均與解題者思維的歷程有關；而 Schoenfeld（1985）的「放聲思考」法及強調後設認知的能力，更顯示其對解題者思維活動的重視。此外 Mayer（1992）在其解題歷程中，提及解題者需要運用解題策略並監控解題計畫，亦與解題者之思維息息相關。因此解題無論在過程上或結果表現，其個人認知基模的善用與對問題的掌握度，對問題解決的成敗是最關鍵性的，也就是說個人對問題的思維歷程將影響其解題的表現。

九年一貫數學領域課程，國小六年級開始進入代數的學習，其中算術思維到代數思維的轉換，是許多數學學習者面臨到的困難之一（Kieran, 1989; Booth, 1984），其學習上的困難主要來自於算術與代數之間本質上的差異（Booth,1984; Van Amerom,2003）。此外，數學領域中文字應用題的學習更是此階段數學課程的重要內容，這些文字題，有配合故事情境也有以文字敘述表達的（Koedinger, 2004）。而學生的解題方式可能用先前學習的算術方式，亦可提昇至假設文字符號的代數方程式解題。在解題的思維歷程中，或代數、或算術，解題者必須選擇最容易理解且快速的方法；以國小六年級的數學課程而言，學生的解題方法，尚未有固定的模式，故本研究想藉由不同表徵形式的問題來瞭解國小六年級學生在算術過渡至代數的解題階段中解題策略的運用對解題表現之影響。

（二）數學表徵

數學教育中，表徵（representation）這個字同時含有過程和結果的意思（蔣治邦，1994）：Mayer（1992）從認知心理學的觀點來看數學解題的過程，認為表徵是內部數學思考的歷程，以及外在數學形式的展現。九年一貫課程綱要將數學當作一種語言，表示數學是種溝通的工具（教育部，2003），因此，數學表徵是個人對於問題的理解所形成的一種轉譯方式，用來幫助思考、溝通、以及解決問題，也就是數學思考過程的表達以及結果的呈現，並藉此作為與他人溝通的方式。表徵在解題歷程中扮演著兩種重要的角色（羅素貞，1996）：（1）問題瞭解的指標：問題表徵是個體在瞭解問題時所建構的，而瞭解問題是解題者先備知識的作用，它能影響問題表徵的發展，故解題者對問題的瞭解影響其內在表徵的建立，而解題者所形成的問題表徵的品質或問題表徵的量又可幫助問題的瞭解。（2）解題表現的預測值：解題者在初始的問題解決活動中所形成的問題表徵的品質、連慣性及完整性，決定之後的思考效率與正確性。也就是說，我們可以從解題者一開始形成的問題表徵來預測他後續的解題表現。

（三）數學教學信念

Thompson（1992）透過文獻探討提出數學教學信念方面的研究，應重視數學信念、數學教學信念、數學教學信念與學習間的關係。其中數學信念意指「個人對數學的理解與感覺構成其數學的概念，而表現於數學的行為」（Schoenfeld, 1992）。Stigler 和 Perry 將美國、日本和中國社會中強調有關數學的信念分為三類（Schoenfeld , 1992）：（1）有關能學什麼的信念：指不同的年齡的學童，在數學的學習上可瞭解的數學層次為何？或可具有的數學能力為何？（2）有關應學什麼的信念：指學童想要的、合乎需求的數學是什麼，亦即，怎樣的數學是孩子應該學習的？（3）有關應如何教的信念：指教師應如何實施數學教學，或學生應如何被教。前兩點一般人或許認為是數學家、數學教育家或數學課程發展委員應關心的事情，但第三點，無疑的是身為數學教學者無可旁貸的責任。基於此，數學教師有必要瞭解其數學教學信念與學習間的關係。

許多研究指出，教師對於數學概念所建立的知識基模，是影響其教學設計的潛在動力，教師如何教導學生學習數學，會受到個人在數學概念理解上的影響（黃幸美，2000；Thompson 和 Thompson, 1996; Swafford, Jones,和 Thornton, 1997）。換言之，教師對數學的信念及對數學教與學的信念，將呈現在其數學課堂的教學文化，進而影響學生的學習表現。Simon（1995）在其「假設性學習路徑（Hypothetical Learning Trajectory）」的概念中，認為教師是一個建構者的角色，可根據學生的學習目標、學習活動及思考等預期路徑來構築一個假設性學習軌道，而真正在教室中教學的過程，可提供教師去發現學生實際的和假設的學習軌道間的符合程度。根據這些新的了解，可以形成修正過的假設性學習軌道，做為後續課程進行的基礎，Simon 稱這個過程是一個「數學教學環」（圖 1）。

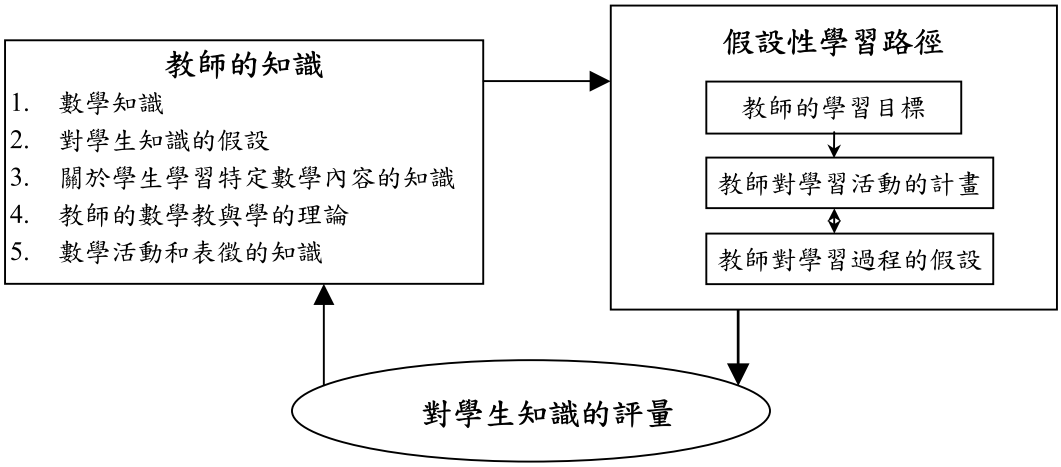

圖 1　數學教學環（簡化，引自 Simon, 1995, p.136）

教師對學生解題表現信念之相關研究中：林宏仁（2003）的研究發現教師在學生分數概念學習表現的教學評估與學生在分數概念學習表現上有所不同。Nathan 和 Koedinger（2000a,2000b）的研究結果發現：高中教師對高一學生的解題信念與學生解代數文字及故事表徵的問題與符號表徵問題的成績表現是相矛盾的。Nathan 和 Petrosino（2003）更進一步探討教師的背景與教學信念的關係時，發現具有較高數學領域知識的數學教師，傾向於過高估計學生解題的能力。由上述文獻中可發現教師對學生解題表現之信念與學生實際解題表現間，是有差距的？若以 Simon（1995）「假設性學習路徑」的

觀點來看，教師知識中「對學生知識的假設」將產生錯誤的估計，「關於學生學習特定數學內容的知識」也顯得不足，相對的可能影響其「對數學教與學的理論」，進而在課堂中使用的「數學活動和表徵的知識」對學生可能是不恰當的。

三、 研究方法

（一）研究設計：本研究以 Nathan 和 Koedinger（2000a, 2000b）的研究為基礎。以紙筆測驗瞭解學童在文字題的解題表現及解題策略；藉由問卷調查瞭解教師評估學生答題的表現及教師文字題教學信念進而探討教師對學生解文字題信念與學生解題表現之差異。

（二）研究對象：研究對象包括國小六年級學生及近三年曾教授小六數學課程之教師。

（三）研究工具：包括以下兩部分。

1. 學生文字題基本測驗：包括 6 個數學問題（如表 1），在「數學結構」上，分成「起始未知」（第 1、2、3 題）及「結果未知」（第 4、5、6 題）兩個層次，藉以瞭解學生在算術過渡至前代數期的解題表現。表徵類型分為故事表徵（1、4 兩題）、文字表徵（2、5 兩題）及符號表徵（3、6 兩題）3 個層次，探討等同數學結構下，「有真實情境的故事」題，與「單純口語敘述的文字」題和「以數字、數學符號或文字符號等所列的方程式」三者不同數學表徵類型下，學生的解題表現為何？

表 1　學生文字題基本測驗內容摘要表

數學結構	表徵類型		
	口語問題：故事表徵	口語問題：文字表徵	方程式：符號表徵
起始未知	P1：小明從大賣場買了面紙回家後，他將每盒面紙的價錢乘以 8，然後他加上錢包內剩下的 72 元，發現他原有 200 元，請問每盒面紙的價錢是多少元？	P2：一個數，將它乘以 8 再加上 72，我的答案是 200，這個數字是多少?	P3：解 X： $X \times 8 + 76 = 200$
結果未知	P4：小明帶了 200 元到大賣場買了面紙回家後，剩下 72 元，然後他把用掉的錢分成 8 份，計算出每盒面紙的價錢，問每盒面紙多少元？	P5：把 200 減去 72，然後除以 8，我得到的數字是多少?	P6：解 X： $(200-72) \div 8 = X$

2. 教師對學生解題信念問卷：本問卷參考 Nathan 和 Koedinger（2000a）所編「教師對學生非正式策略使用信念問卷」第二版及相關文獻後，修改為「教師文字題教學信念問卷」，採 Likert 六點量表記分。內容除基本資料外尚包括（1）問題困難評分活動表（2）教師文字題教學信念問卷。問題困難評分部分，請受測教師針對表 1 的六個問題，思考自己教授的學生（國小六年級）完成這些問題時的難易度，並與學生解題表現的結果作分析比較，以瞭解教師對學生之解題信念與學生實際表現之差異。教師文字題教學信念問卷，在於探討樣本內的數學教師之文字題教學信念，並與前述之問題困難評分作比較分析。問卷信度分析採用 Cronbach's α 係數，量表整體之 Cronbach's α 係數為.885，在效度方面，以主成份分析法（principal components analysis）萃取因素，採用最大變異數（Varimax）直交轉軸法（orthogonal rotations）進行轉軸，因素分析結果顯示，「教師文字題教學信念量表」可以得到三個因素，分別命名「文字題教學觀」、「代數地位觀」及「符號領先觀」。

（四）資料分析

本研究資料處理以 SPSS for Windows 12.0 電腦統計套裝軟體程式，進行資料處理與統計分析。

四、 結果與討論

（一）教師對學生之解題信念及文字題教學信念

透過單因子變異數分析，國小教師在問題困難評分難易度之 F 值為 141.482，p＜.05，達顯著差異，事後分析比較如表 2：

表 2　教師在一般情境題之問題困難評分單因子變異數分析摘要表

題項	個數	平均數	標準差	F值	事後比較
P1	316	4.78	1.465	141.482***	P1＞P4＞P2＞P3＞P5 P1＞P4＞P2＞P3＞P6
P2	316	3.48	1.204		
P3	316	3.00	1.466		
P4	316	4.01	1.541		
P5	316	2.37	1.277		
P6	316	2.36	1.574		

*** p＜.001

國小教師對問題困難之評分，由難到易依序為：起始未知故事表徵題（P1）最難，其次為結果未知故事表徵題（P4），再其次為起始未知文字表徵題（P2），又其次為起始未知符號表徵題（P3），最容易則為結果未知文字表徵題（P5）及結果未知符號表徵題（P6），且除了 P5 和 P6 兩題外，其餘各題相互間均達顯著差異。可知國小教師對學生解題之困難評分的信念裡，認為起始未知故事表徵題（P1）是最困難的，其次則為結果未知故事表徵題（P4）；也就是說，國小教師多數認為故事表徵的問題（P1 及 P4）難度較高。

從國小教師文字題教學信念來看，量表總分之平均數為 83.88（18 題）分，每題平均得分為 4.41 分，在「文字題教學觀」、「代數地位觀」及「符號領先觀」三因素層面，平均數為 27.93（7 題）、27.78（6 題）與 28.17（6 題），換算每題平均為 3.99、4.63 與 4.70，均高於每題平均得分評定標準 3.5 分，顯示全體受試者之文字題教學信念傾向認同本量表之架構：即在「文字題教學觀」較認同文字題的教學應先做清楚明確的教學或先示範清楚明確的解題法，其數學文字題之教學信念較傾向傳統取向教學。在「代數地位觀」較贊同代數方程式是解決語詞（故事或文字）表徵文字題最有效的方法。在「符號領先觀」則認為符號表徵的問題較故事表徵或文字表徵的問題容易。而不同背景變項之國小教師文字題教學信念具顯著差異者如表 3。在量表總分上，數學相關科系的得分顯著低於理化相關科系及其他科系（F＝12.629，p＜.001）。在「文字題教學觀」，數學相關科系的得分顯著低於理化相關科系及其他科系（F＝13.831，p＜.001），顯示數學相關科系之國小教師與理化相關科系及其他科系相比，較不認同文字題的教學應先做清楚明確的教學或先示範清楚明確的解題法。在「代數地位觀」，數學相關科系的得分顯著低於其他科系（F＝5.560，p＜.01），顯示數學相關科系比其他科系之國小教師較不認同「使用代數方程式，是解語詞表徵文字題最好的方法」的觀點。在「符號領先觀」，

男性之得分顯著高於女性國小教師（t＝2.652，p＜.01），數學相關科系之得分顯著低於理化相關科系之國小教師，即「男性比女性」且「理化相關科系比數學相關科系」之國小教師更認同「符號表徵的問題較故事表徵或文字表徵的問題簡單」的觀點。

表 3 不同背景變項之國小教師文字題教學信念事後比較一覽表

背景變項	文字題教學觀	代數地位觀	符號領先觀	量表總分
性別	N.S.	N.S.	男＞女	N.S.
教師級別	N.S.	N.S.	N.S.	N.S.
教學年資	N.S.	N.S.	N.S.	N.S.
擔任職務	N.S.	N.S.	N.S.	N.S.
教育背景	數學＜理化	數學＜其他	數學＜理化	數學＜理化
	數學＜其他			數學＜其他

N.S. 無顯著差異。

（二）教師解題信念與學生解題表現之差異

以教師對「學生數學基礎測驗問題困難評分表」的評分排序，與六年級學童「數學基礎測驗」答題表現之排序，進行差異情形的比較及探討，比較不同文字題教學信念的教師在問題困難評分與學生解題表現之差異。表 4 呈現學生解題表現排序與全體教師對學生解題的困難評分比較表，由表中可看出老師對學生解題困難評分，與學生解題表現最差的兩題：P1（起始未知故事表徵）及 P4（結果未知故事表徵），教師的評估順序與學生解題表現完全相同。在學生解題表現居中的兩題：P3（起始未知符號表徵）及 P2（起始未知文字表徵），教師的評估分居第三及第四，學生解題表現則均為第三。而學生解題表現最好的兩題：P5（結果未知文字表徵）及 P6（結果未知符號表徵），教師的評估順序則為第二及第一。整體而言，國小教師對問題困難評分與學生解題表現的排序，大致上相近。

表 4　學生解題表現排序與教師對學生解題的困難評分比較表

數學結構	表徵類型	學生解題表現（n＝318）		教師困難評分（n＝316）	
		平均	排序	平均	排序
起始未知	故事表徵（P1）	.80	6	4.78	6
	文字表徵（P2）	.83[a]	3	3.48	4
	符號表徵（P3）	.83[a]	3	3.00	3
結果未知	故事表徵（P4）	.83[b]	5	4.01	5
	文字表徵（P5）	.88	1	2.37	2
	符號表徵（P6）	.85	2	2.36	1

另以教師之文字題教學信念作分類來探討教師對學生解題表現之差異（如表 5），發現，對學生解題表現之評估最為正確的是不認同「文字題教學觀」的老師。也就是認為「文字題教學應鼓勵學生自我發現或支持學生非正式策略解題的老師」，對學生解題表現的評估是最準確的。換言之，這些老師認為文字題的教學應鼓勵學生自己發現解題的方法，或認為學生自己熟悉的解題策略對學生的學習才是有意義的，其教學信念與 Koedinger（2004）的研究中，認為「當解題時所使用的表徵對學生來說是確實且有意義的策略時，能影響其學習成就表現」的觀點是較相近的。

就 Simon（1995）的「假設性學習路徑」的觀點看來，不認同「代數地位觀」及「符

號領先觀」因素層面的教師，其對學生解題表現的評估是較差的。這些教師對「學生知識的假設」，及「學生學習特定數學內容的知識」（此處指文字題的學習）是不足的，將相對影響其對學習過程的假設，進而影響教師對學習活動的計畫。基於此，身為一位數學教師，其擔任的角色不再是別人發展好的創新教學法的消費者，而是致力於教案的改進和局部教學理論的發展者。故教師在數學教學的信念及作法上應達成如下的目標：（1）相信學生有發現解題方法的能力，提供學童解題的機會。（2）瞭解學童使用他們自己的策略解題之價值，讓學童和同儕、教師分享其解題思維。（3）教師引發和瞭解學童的思維，並使用學童的思維做為教學決策的依據。

表 5　不同文字題教學信念教師之困難評分與學生解題表現排序比較表

未知數位置	表徵類型	學生解題表現	教師困難評分							
			文字題教學觀		代數地位觀		符號領先觀		量表整體	
			認同	不認同	認同	不認同	認同	不認同	認同	不認同
		平均(排序)	平均(排序)	平均(排序)	平均(排序)	平均(排序)	平均(排序)	平均(排序)	平均(排序)	平均(排序)
起始未知	故事表徵	.80	4.81	4.70	4.86	3.84	4.85	4.22	4.83	4.34
	（P1）	（6）	（6）	（6）	（6）	（5）	（6）	（6）	（6）	（6）
	文字表徵	.83[a]	3.46	3.56	3.53	3.00	3.51	3.30	3.47	3.63
	（P2）	（3）	（4）	（4）	（4）	（3）	（4）	（3）	（4）	（4）
	符號表徵	.83[a]	2.81	3.54	2.91	3.96	2.86	4.00	2.88	4.00
	（P3）	（3）	（3）	（3）	（3）	（6）	（3）	（5）	（3）	（5）
結果未知	故事表徵	.83[b]	4.10	3.74	4.11	2.76	4.16	2.81	4.10	3.16
	（P4）	（5）	（5）	（5）	（5）	（2）	（5）	（2）	（5）	（3）
	文字表徵	.88	2.51	1.95	2.38	2.24	2.42	2.00	2.39	2.13
	（P5）	（1）	（2）	（1）	（2）	（1）	（2）	（1）	（2）	（1）
	符號表徵	.85	2.27	2.61	2.24	3.72	2.19	3.59	2.27	3.16
	（P6）	（2）	（1）	（2）	（1）	（4）	（1）	（4）	（1）	（2）

註：1. 排序 1 分表示最容易，6 分表示最難，餘類推。
2. 學生的解題表現平均愈高表示題目較容易，教師困難評分的平均愈高表示題目較難。
3. a.總分為 264 分　b.總分為 263 分。

參考文獻

蔣治邦（1994）。由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。**國民小學數學科新課程概說（低年級）**（頁 60－76）。臺北縣：臺灣省國民學校教師研習會。

劉家樟、楊凱琳（2005）。**探討國中老師對學生代數解題信念與學生解題表現的異同**。2005 年中華民國第廿一屆科學教育學術研討會論文發表，彰化，12 月 17-18 日。

羅素貞（1996）。問題表徵與問題解決。**國立屏東師範學院學報，9**，149-176。

Koedinger, K. R. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences, 13*（2）, 129-136.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000a). An investigation of teachers’ beliefs of students’ algebra development. *Cognition & Instruction, 18*（2）, 209-237.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving , metacognition , and sence making in mathematics. In D. A. Grouws(Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*(pp. 334-379). New York: Macmillen Publishing Company.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*（2）,114-145.（餘略）