

探討學生解讀證明的認知特徵

楊凱琳*林福來**王繹婷***

*國立彰化師範大學數學系 kailinyang3@yahoo.com.tw

**國立台灣師範大學數學系 linfl@math.ntnu.edu.tw

***國立彰化師範大學數學所 yitingwang50@gmail.com

摘要

本研究旨在探討學生解讀幾何證明的認知特徵，依據學生對幾何證明的理解推論之表現，分析他們解讀證明的閱讀特徵、誤解證明的認知方式與妨礙學生理解證明的因素。首先調查三班國中生（共 153 位）與三班高中生（共 90 位）對不同複雜度與不同寫法的數學證明之微觀、局部與整體推論理解，依此理解結果以統計階層集群分析法將學生分成幾個相異性最大的群組；另一方面，從閱讀目標、過程與結果作為訪談問題的設計架構，從各群組中共挑選十八位學生進行半結構式的訪談。研究結果除了驗證和補充文獻上已提出的學生解讀證明之思考特徵外，也進一步提出適合學生學習證明閱讀推論理解的教學建議。

關鍵詞：幾何證明、解讀、認知特徵

一. 研究動機與問題

閱讀理解的程度和其閱讀過程中所使用的思考、推理和策略息息相關，沒有思考的閱讀只能建構表層的意義，沒有推理的閱讀會喪失預測資訊的機會，沒有策略的閱讀造成理解歷程的負擔。尤其當學生閱讀數學證明時，思考、推理和策略的運用更是扮演著關鍵的角色(楊凱琳，2004；葉明達，2004)。在論證教學上，Hersh(1993)建議應提供具有解釋性為導向的證明。可是，對學生而言具有解釋性的證明可能是測量的方法(Chazan,1993)，這也顯現論證和證明的差異性正是學生學習數學證明的難處之一(Duval,1991)。

Duval(1998)依據資訊的量，將組織資訊的層次分為微觀、局部和整體。微觀層次是指必須從論點中分出被用來證明的前提和結論，局部層次是指能根據命題或圖形至少將三種性質或過程組織起來，整體層次將每個步驟連結成一體。林福來、楊凱琳、王繹婷和吳俊德(2005)依此想法檢測學生幾何證明的閱讀理解表現，但尚未進一步探討不同理解表現的學生之解讀特徵。另一方面，楊凱琳(2004)探討學生如何評析不同論證方式的有效性，結果發現學生可能誤解論證有效性的思考特徵及妨礙理解的因素。本研究主要想要瞭解是什麼原因造成學生幾何證明閱讀理解表現的差異，依此所衍生的研究問題為：

- (一) 不同幾何證明閱讀理解表現的學生，其解讀證明的閱讀特徵有何差異？
- (二) 不同幾何證明閱讀理解表現的學生，其誤解證明的認知方式有何差異？
- (三) 不同幾何證明閱讀理解表現的學生，妨礙其理解證明的因素有何差異？

二.文獻探討：

是何種閱讀特徵造成學生在解讀數學時產生差異呢？秦麗花等（2004）指出數學閱讀理解需要具有數學先備知識、數學圖示理解、數學詞彙與符號理解和數學作圖程序理解等的「數學閱讀特殊技能」，且不同閱讀理解程度學生在數學閱讀子技能上有所差異。

楊凱琳（2004）的研究發現，學生誤解幾何論證的思考特徵有「不當特殊化論證過程」與「過度一般化論證過程」。而可能造成不當特殊化論證過程的認知方式有1.以數字檢驗形式證明；2.受限於未畫出來的圖形；3.把例子中的某種規律是為前提。可能造成過度一般化論證過程的認知方式有：1.擴充演算法或動態圖形的有效性；2.強化圖形或數字的效用；3.開放前提或結論的位置。此外，該研究也發現妨礙學生進一步理解幾何論證的因素有：1.未意識到自己誤解的可能性；2.未區辨證明與解說的不同；3.排斥或不喜歡不瞭解的資訊。

葉明達（2004）以數學論證作為閱讀內容，探討數學論證判讀的認知機制與思維內涵。研究結果發現高、低判讀表現的學生在知識結構、策略使用、接受判準上並不相同，也找出學生在不同階段所出現判讀的困難點。該研究發現學生在閱讀階段的困難有：1.忽視文本編排方式與寫作慣例；2.看錯文本的符號；3.定義與性質混淆不清；4.被附圖所誤導。而在識別階段的困難有：1.不能區辨前提與結論；2.不能識別隱匿的前提；3.誤用潛在假設為前提；4.不能正確識別證明架構。在檢驗階段出現的困難為：1.不會等價變換；2.不能適當的舉出反例；3.錯誤的局部修正；4.未檢核條件是否完全使用。最後，在判斷階段所產生的困難有：1.對待證命題的過度誇張；2.個人對證明的偏好與文本類型不同；3.對不理解部分採接受的立場。

而研究者將綜合統整上述所找出的因素作為檢驗學生的推理特徵與妨礙學生理解證明之因素的架構，並試著找尋是否有其他解讀證明的推理特徵和妨礙因素。

三.研究方法

為了達成研究目的：探究學生解讀證明的認知特徵，須先決定以哪些面向作為學生閱讀理解的表現及用何種架構觀察學生閱讀理解的過程，再依此些面向與架構設計測驗問卷。研究者以微觀、局部、整體(林福來等，2005)的面向作為調查學生理解證明的表現，研究對象包含153位國中學生與90位高中學生。接著，透過階層集群分析挑選十八位學生進行個別訪談，以了解學生解讀證明的思考特徵。本研究量的資料以SPSS 10.0的統計套裝軟體程式進行資料處理與統計分析，質的資料則以既有的架構(楊凱琳，2004；葉明達，2004)作為解讀資料的參考，而架構依據兩位作者與研究者的訪談資料整合如表1、2：

《表 1—檢驗因素之誤解幾何論證有效性的思考特徵》

誤解幾何論證有效性的思考特徵	不當特殊化論證過程	1.以數字檢驗形式證明
		2.受限於未畫出來之圖形
	過度一般化論證過程	3.把例子中的某種規律視為前提
		1.擴充演算法與動態圖形的有效性
		2.強化圖形或數字的效用
		3.開放前提或結論的位置
		4.增加前提或結論的強度
		4-1.對待證命題的過度擴張
		4-2.誤用潛在假設為前提

《表 2—檢驗因素之妨礙學生解讀幾何論證的因素》

妨礙學生解讀幾何論證的因素	認知層面	1.未意識到自己誤解的可能性	1-1.看錯文本的符號
		2.未區辨證明與解說的不同	1-2.被附圖所誤導
		3.未注意文本的編排方式與寫作慣例	
		4.不熟悉證明架構	5-1.定義與性質混淆不清
		5.先備知識不足	5-2.不能識別隱匿的前提
		6.未能察覺證明的方向	
	情意層面	1.排斥或不喜歡不了解的資訊	
		2.對不理解部分採接受立場	

四.結果與討論

(一) 不同幾何證明閱讀理解表現的學生：

研究者將國中生、高中生分別依其在微觀、局部、整體的閱讀推論理解之表現透過階層集群分析之分組結果為表 3、4 所示。

《表 3—國中生在微觀、局部、整體之閱讀推論理解表現組別》

組別	微觀、局部、整體平均值	組別之特徵
均優	(2.151, 2.725, 1.492)	與他組比較後：微觀表現優；局部表現優；整體表現優
整體尚可	(2.405, 2.750, 0.769)	與他組比較後：微觀表現優；局部表現優；整體表現尚可
微觀尚可	(1.294, 2.741, 1.352)	與他組比較後：微觀表現尚可；局部表現優；整體表現優
局部特優	(0.767, 2.833, 0.472)	與他組比較後：微觀表現差；局部表現優；整體表現尚可
均弱	(1.166, 1.500, 0.200)	與他組比較後：微觀表現尚可；局部表現尚可；整體表現差

《表 4—高中生在微觀、局部、整體之閱讀推論理解表現組別》

組別	微觀、局部、整體平均值	組別之特徵
均優	(2.033, 3.000, 1.200)	與他組比較後：微觀表現優；局部表現優；整體表現優
局部尚可	(0.395, 1.158, 0.203)	與他組比較後：微觀表現差；局部表現尚可；整體表現差
均弱	(0.033, 0.000, 0.040)	與他組比較後：微觀表現差；局部表現差；整體表現差

而從上述組別挑出十八位學生做個案訪談，分別如表 5、6 所示：

《表 5—國中生之訪談對象選取》

組別	學生
均優	JS1、JS3、JS4
整體尚可	JS2、JS7、JS12
微觀尚可	JS9、JS11
局部特優	JS5、JS6、JS10
均弱	JS8

《表 6—高中生之訪談對象選取》

組別	學生
均優	SS4
局部尚可	SS3、SS5、SS6
均弱	SS1、SS2

(二) 學生解讀證明的閱讀特徵：

研究者將十八位學生分別在各組中的閱讀特徵分別如表 7、8。

《表 7—國中生之各組閱讀特徵》

組別	閱讀特徵
均優	<ol style="list-style-type: none"> 1. 每一證明題都先大略看過，從第一題開始寫。 2. 會搭配先備知識去思考證明。 3. 證明過程、幾何圖形、性質補充與題目會相互搭配著看。 4. 當看不懂時，會再回憶先備知識思考證明過程；若仍舊不會則先做其他題，之後再思考不會的問題。 5. 認為每一步驟皆是重要的，特別是已知與結論的部份。 6. 會依照證明步驟對幾何圖形做記號。
整體尚可	<ol style="list-style-type: none"> 1 每一證明題都先大略看過，從第一題開始寫。 2 證明過程、幾何圖形、性質補充與題目會相互搭配著看。 3 當看不懂題目時，會從證明步驟中尋找答案；最後，再回來看不會的問題。 4 容易將顯而易見的步驟視為多餘，但是有其存在之必要性的。 5 對於題目有相當的想法，但不知道該如果陳述才能清楚表達題意。
微觀尚可	<ol style="list-style-type: none"> 1. 每一證明題都先大略看過。 2. 認為性質補充有看與否影響並不大。 3. 當看不懂時，會再回憶先備知識思考證明過程、幾何圖形；若仍舊不會則先做其他題，之後再思考不會的問題。 4. 容易將顯而易見的步驟視為多餘，但是有其存在之必要性的。
局部特優	<ol style="list-style-type: none"> 1. 每一證明題都先大略看過。 2. 證明過程、幾何圖形、性質補充與題目會相互搭配著看。 3. 依先備知識配合幾何圖形及證明過程以理解思考。 4. 不容易抓到已知條件與欲證目標。 5. 認為每一個步驟都是必要的。
均弱	<ol style="list-style-type: none"> 1. 先找自認為喜歡的證明題做。 2. 不會臆測下一步驟可能為何。 3. 想不出來時，會在幾何圖形上依據自己的先備知識作記號。 4. 步驟過於冗長的證明不會想看。 5. 不容易抓到證明過程的重點。

《表 8—高中生之各組閱讀特徵》

組別	閱讀特徵
均優	<ol style="list-style-type: none"> 1. 閱讀順序為證明過程而後題目。 2. 性質補充感覺熟悉，所以未仔細閱讀。 3. 以先備知識搭配證明過程便容易思考出答案。 4. 認為每一步驟都是必要的。 5. 認為沒有困難或者不了解的地方。
局部尚可	<ol style="list-style-type: none"> 1. 認為沒有不必要的步驟。 2. 以先備知識容易推導。 3. 認為步驟冗長且圖形不熟悉，所以閱讀起來困難重重。 4. 當看不懂時，再回頭看一次若仍舊看不懂時，就試圖把空格填滿或放棄。
均弱	<ol style="list-style-type: none"> 1. 每一證明題都先大略看過，憑感覺寫。 2. 隨便寫且性質補充沒看。 3. 當看不懂時，會先做其他題，最後再回頭思考不會的問題。

很明顯地，由表 7、8 之學生閱讀推論理解優弱中，可看出若視每一步驟為必要或重要的，且抓到已知條件、欲證目標的學生在閱讀推論理解有較好的表現。這也或許是導致他們閱讀理解之表現懸殊的原因。在閱讀推論理解表現差的學生上也可以看到有較粗糙的閱讀特徵表現，例如：憑感覺寫等等的表現特徵。而研究者猜測主要造成學生表現不同應是在閱讀品質與所捕捉的重點不同。

(三) 學生誤解證明的認知方式：

以下先從此研究的訪談資料檢驗過度一般化和不當特殊化的認知方式，再進一步尋找是否尚有其他誤解證明的認知方式。

《表 9—學生誤解證明的認知方式》

組別	學生	誤解證明的認知方式	原因概述
國中—均優	JS4	受限於未畫出來之圖形	遇無圖形引導的證明題，難以想出答案
國中—整體尚可	此組學生未發現有誤解證明認知方式的情況		
國中—微觀尚可	JS9	受限於未畫出來之圖形	沒有幾何圖形以對照思考，無法理解證明步驟
國中—局部特優	JS6	強化圖形或數字的效用	依幾何圖形而不必證明步驟亦可得知答案
國中—均弱	此組學生未發現有誤解證明認知方式的情況		
高中—均優	此組學生未發現有誤解證明認知方式的情況		
高中—局部尚可	SS5	強化圖形或數字的效用	證明步驟不太需要，僅需幾何圖形即可思考答案
高中—均弱	此組學生未發現有誤解證明認知方式的情況		

研究者從訪談資料中只檢驗到「受限於未畫出來的圖形」、「強化了數字或圖形的效用」兩項誤解幾何論證的思考特徵之因素，但尚未發現有其他新的因素。從表 9 中可看出不管閱讀推論理解表現優或弱的學生都還是有可能產生誤解證明的可能性。

(四) 妨礙學生理解證明的因素：

以下先從本研究的訪談資料檢驗妨礙學生理解幾何論證的因素，再進一步尋找是否還有其他因素。

《表 10—學生妨礙理解證明的因素》

組別	學生	妨礙學生理解證明的因素	原因概述
國中 均優	JS1	a.被附圖所誤導	認為幾何圖形中所給予的輔助線誤導他的思考方向
		b.不熟悉證明架構	對兩欄式的證明寫法陌生增加其理解的困難度
	JS4	a.未意識到自己誤解的可能性	學生未意識到自己理解方向與欲證目標不一致
		b.不熟悉證明架構	因為證明寫法不熟悉而無法清楚抓出已知條件
國中 整體 尚可	JS2	a.無法將想法清楚表達	對證明題有相當的想法，但不知該如何表達清楚
		b.不熟悉證明架構	此學生覺得兩欄式證明寫法不容易理解且易混淆
	JS7	a.無法將想法清楚表達	對證明題有相當的想法，但不知道該如何清楚呈現
		b.排斥或不喜歡不了解的資訊	對於陌生或冗長的證明題，不會想閱讀了解
	JS12	a.未意識到自己誤解的可能性	從訪談中發現學生沒發覺到自己誤解題目的意思
		b.無法將想法清楚表達	對證明題有想法，但不知如何表達才能符合題意

國中 微觀 尚可	JS9	a.未注意文本的編排方式與寫作慣例	學生未發現性質補充呈現在問卷之最後部份，使其在作答完才看到，而忽略閱讀問卷之部分資訊	
		b.被附圖所誤導	認為幾何圖形中所給予的輔助線誤導他的思考方向	
		c.圖形與證明步驟無法連結	此學生無法對照證明步驟以閱讀理解幾何圖形	
		d.未能察覺證明的方向	不了解此證明想表達為何，所以無法得知欲證目標	
		e.不熟悉證明架構	此學生認為此證明寫法誤導他的思考方向	
		f.思考侷限於學過的模式	之前未遇過類似問題，故不知如何回答完整答案	
		g.對陌生的圖形倍感困難	因為幾何圖形不熟悉，所以不容易理解證明方向	
國中 局部 特優	JS5	a.不熟悉證明架構	認為兩欄式證明寫法陌生且複雜	
		b.排斥或不喜歡不了解的資訊	遇到感覺複雜的證明題就不會想閱讀	
國中 均弱	JS6	a.未意識到自己誤解的可能性	學生未察覺自己的理解方向與欲證目標不一致	
		JS8	a.未能察覺證明的方向	不知道題目想表達的欲證目標為何
			b.不熟悉證明架構	對兩欄式證明寫法感覺陌生且不容易理解
	JS10	a.不熟悉證明架構	對兩欄式證明寫法感覺陌生且不容易理解	
		b.排斥或不喜歡不了解的資訊	不會想了解未教過的定理證明	
高中 均優	SS4	a.未意識到自己誤解的可能性	學生未察覺自己的理解方向與欲證目標不一致	
		b.被附圖所誤導	認為幾何圖形中所給予的輔助線誤導他的思考方向	
		c.不熟悉證明架構	對兩欄式證明寫法感覺陌生且不容易理解	
高中 局部 尚可	SS3	a.被附圖所誤導	認為幾何圖形中所給予的輔助線誤導他的思考方向	
		SS5	a.不熟悉證明架構	對兩欄式證明寫法感覺陌生且不容易理解
	SS6	b.對陌生的圖形倍感困難	因為幾何圖形不熟悉，所以不容易理解證明方向	
a.排斥或不喜歡不了解的資訊		學生感覺證明題困難且複雜，故放棄閱讀		
高中 均弱	SS2	a.不熟悉證明架構	對兩欄式證明寫法感覺陌生且不容易理解	

研究者從訪談資料中驗證了幾項妨礙學生解讀幾何論證的因素，也補充文獻上所謂提及的「圖形與證明步驟無法連結」、「思考侷限於學過的模式」、「對陌生的圖形倍感困難」與「先備知識不足—無法將想法清楚表達」等妨礙學生理解的因素。從表 10 可以看出不管閱讀推論理解表現優或弱的學生仍舊會產生妨礙學生理解證明之因素。

由表格(三)、(四)中，研究者猜測學生同樣會產生誤解證明的認知方式、妨礙理解的因素，但卻有不同閱讀推論理解表現的原因或許在於閱讀特徵中所捕捉到的重點與閱讀品質不同而造成他們閱讀理解上有所差異。

五.討論與建議

除了驗證之前對學生解讀證明之認知特徵和困難的研究結果外，本研究發現學生在閱讀上容易產生的困擾有以下幾點：1.容易將顯而易見的步驟視為多餘，但有時候此些步驟是有它存在之必要性；2.有的學生對於未教學過的範圍有相當的不確定性；3.學生對於證明方面純粹閱讀內容的成分大，較少會有臆測的成分；4.有的學生較少主動去瞭解新的資訊；5.學生在論證中經常遇到的問題之一是可以理解所有的過程，但不知道該如何才能完整表達符合問題所要的答案；6.學生容易放棄冗長的證明題，不論其熟悉於否；7.學生常未察覺到自己誤解題目的意思或未發現回答的答案與題目欲問的方向不同。此外，此研究亦補充文獻上所未呈現的「圖形與證明步驟無法連結」、「思考侷限於學過的模式」、「對陌生的圖形倍感困難」與「先備知識不足—無法將想法清楚表達」等

妨礙學生理解證明的因素。

研究者針對學生的論證認知特徵所產生的困擾猜測以下幾點或許適合學生的教學方法與教學建議：1.老師在教導論證時，盡量讓學生明瞭哪些步驟是有其存在之必要性；2.老師可採用「引導式教學」或「互動式教學」增加學生對證明方面的意圖，如此一來，或許可以提高學生對論證的想法、思考與表達能力，進而引發學生的學習動機；3.在課程上遇到複雜度高（不論此命題熟悉於否）的證明題時，老師可以用學生最熟悉的寫法來教學、多對已知條件、圖形等做初步的解說，以便讓學生有基本的心像，及在做詳盡的解說時，最好依舊再搭配上圖形做解說；4.老師在論證中可以引領學生試著多閱讀題目與過程，帶領思考此證明所要呈現的答案為何，之後學生遇到不熟悉的證明或許較能判斷題意所需的答案為何；5.證明的幾何圖形以最原始的圖形呈現，如此一來，可以免於圖形過於複雜而有放棄閱讀的念頭。另一方面，也可在閱讀的過程中自己動筆劃輔助線加強自己對圖形與證明的熟悉；6.老師在教導較長的證明時或許可以引導學生將證明分成幾部分看，並向學生說明分成此幾部分的原因，學生或許就不會覺得證明是一連串的冗長步驟而減少閱讀動力。

參考文獻

- 林福來等(2005)。青少年數學論證「學習與教學」理論之研究：子計畫四—解讀數學論證活動的認知與教學之探究(3/4)。國科會九十四年度數學教育專題研究計畫成果報告，國立台灣師範大學數學系。
- 秦麗花等（2004）。影響不同能力兒童數學文本閱讀理解的因素探討。論文發表於國立彰化師範大學主辦之「科學教育年會」，彰化。
- 葉明達(2004)。數學論證判讀機制之研究。國立高雄師範大學數學研究所博士論文。未出版，高雄。
- 楊凱琳（2004）。建構中學生對幾何證明閱讀理解的模式。國立臺灣師範大學數學研究所博士論文。未出版，台北。
- Chazan,D.(1993).High School Geometry Student'Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof.Educational Studies in Mathematics 24,359-387
- Duval,R.(1991).Structue du Raisonnement Deductif et Apprentissage de la Demonstation.Educational Studies in Mathematics,22(3),233-263
- Duval,R.(1998).Geometry from a cognitive of view.Perspectives on the Teaching Of Geometry for the 21th century.An ICMI Study.(pp.37-52)
- Hersh,R.(1993).Proving is Convincing and Explaining.Educational studies in Mathematics,24(4),389-399.