

國小學童全像立體幾何影像輔助教材辨識效果之研究

張明蘭*

陳嘉皇**

*崑山科技大學視覺傳達設計研究所 研究生 mingi108@ms95.url.com.tw

**崑山科技大學教學發展中心 助理教授 co924@mail.ksu.edu.tw

摘要

本研究旨在應用全像立體影像，開發國小幾何課程之輔助教材並檢驗其效果。研究重點包含：學童辨識全像立體幾何圖的準則，學童對於立體的平面視圖之迷思概念探討，及比較立體影像與傳統平面影像表現立體幾何圖之適切性、可行性。研究結果如下：

1. 以全像立體影像輔助媒材來呈現立體幾何圖時，可引起學童的興趣與學習動機。
2. 學童不易由平面的影像中了解實體物體之間的空間關係。
3. 立體幾何圖運用了全像立體影像輔助媒材成像，有助於立方體數量的判別。
4. 全像立體影像輔助學童在立方體數量辨識的正確率，優於使用平面影像。

基於研究結果，全像立體影像較傳統平面影像更能引起學童的專注力，且清楚表達幾何的空間層次，讓學童在充分明瞭狀況下做正確判斷。因為全像立體影像提供豐富的空間資訊，使學童能在較佳的狀況下作決策。因此，全像立體影像所表現的立體幾何圖像更易模擬真實情境，促進學童思考提高正確反應的機率。

關鍵詞：全像立體影像、輔助學習、立體幾何

一、研究背景與動機

在十七世紀以前，幾何學可說是數學的同義詞，是一門源遠流長的數學分支，在方法上偏重於推理的學科。Clements 與 Battista (1992) 曾提出：幾何提供我們如何去闡釋與反映外在物理環境的一種方法，並且可作為學習其他數學和科學題材的工具，尤其更重要的能加強幾何的空間思考，此將有助於高層次數學的創造思考。荷蘭學者 Freudenthal 亦呼籲：透過探索空間，要及早開使「幾何」的學習，不要等到國中(Freudenthal,1973)。由上述可知，幾何其重要性是無庸置疑的。

教育部在民國九十年依據九年一貫數學學習領域暫行綱要實施「九年一貫課程」，把數學學習領域分成五大主題：數與量、圖形與空間、統計與機率，代數及連結。民國九十二年新版數學學習領域綱要中的「幾何」就是「圖形與空間」。「圖形與空間」在國小數學教材算是很重要的一環，應該更進一步研究分析數學觀念中，有關幾何與空間能力的發展。但以往在課程安排上小學偏重在算術方面，而忽視了幾何 (Fey, 1984) 且幾何方面的教學活動也幾乎與課堂外的空間世界沒有聯繫。劉好 (2000) 的研究指出，由於立體圖形在教學活動中皆以實物觀察操作為主，紙筆評量乃以立體的平面視圖呈現問題情境，兒童必須在產生立體的心像之後，才能掌握題意作答，否則得由教師配合口頭說明，或提供實物操作、觀察。實物平面圖像化後，常會產生失真而不易辨別或產生模擬兩可難下決定的情況。由以上研究可見，目前在國小「圖形與空間」的教育上似乎令學童難於理解和掌握。

我國過去對國小兒童的「幾何形體認知概念」的研究，一向缺乏了解。(張英傑, 2001) 林秀瑾、張英傑 (2004) 的研究亦指出，我國各時期幾何教材綱要的內容，在空間方位

與空間視覺化推理部分均明顯不足，有待加強。教材中實物平面圖像化的結果，大都夾雜著許多其他圖案，與對照形狀之視圖有相當的差異，這種差異或干擾，可能影響學童之辨別(劉好，2000)。由於低年級學童平面視圖轉成具體印象的轉移能力尚未完全具備，因此，如何有效的表現影像的深度讓學童學習幾何概念與空間能力將更行重要。本研究是讓兒童藉由實際觀看立體影像的活動中，認知立體影像可由不同角度觀看的特性，了解二維度轉三維的基本圖形，學習利用觀看立體影像傳遞各種幾何物件的經驗發展視覺化的技巧。而透過立體影像輔助呈現幾何真實的空間層次，將更有助於兒童幾何形狀概念的形成。

隨著顯像技術不斷的提升，近年來全像術(holography)因數位處理技術的發展及更多相關硬體的研發，使之成為較容易掌控且具多種應用價值的技術，其最大特色為裸視即可觀看立體影像，有別於其他立體影像工具需經由攜帶不易的設備及相關訓練才可觀看立體影像。由於三維空間的立體顯示較二維平面的顯示有更接近實體的視覺效果，因此能夠呈現立體影像的顯示技術將來會更切入人們的需要，其應用也會更為多元。本研究將從低年級學童幾何概念與空間能力的相關研究分析，即針對立體幾何平面圖像化中空間層次呈現不足的表達，透過現有的支援及全像技術表現，進而發展幾何空間學習的輔助教材，亦提供兒童豐富有趣的視覺媒材。

二、研究目的

本研究目的將探討:

1. 了解國小一、二年級學童辨識全像立體幾何圖的準則。
2. 探討國小一、二年級學童對於立體的平面視圖之迷思概念。
3. 探討學童在幾何圖像的辨識上全像立體影像與傳統平面影像的差異。

由以上研究目的，以了解學童觀看全像立體影像的辨識情形，期望研究結果可作為開發具有空間次元的幾何形體教學、編製數學課程以及提供未來視覺應用教學之參考。

三、文獻探討

1. 發展兒童空間知覺的輔助教材

Hoffer 的研究認為幾何概念的學習與空間視覺化能力之間是交互影響(1983)。亦有研究顯示，視覺思考能力與數學學習成就息息相關。但目前教材在空間方位與空間視覺化推理部分均顯示不足，因此我們必須幫助學生將立體空間與幾何的模型、及與幾何的平面圖形表徵關聯起來。

全美數學教師學會的學校數學原則與標準中指出，科技提供更進一步的機會讓學生擴展他們的空間推理能力(National Council of Teachers of Mathematics, 2000)。然而，立體影像能讓學習者從不同角度去觀察物體，進而將立體幾何、與平面圖形的表徵關聯起來，藉由與學童互動的過程中亦能夠增加學習者的空間邏輯能力，發揮幾何知識的應用層面，讓科技融入教學與學習更能豐富幾何的世界。

2. 全像立體影像

(1)全像立體影像輔助教材之用途

改善兒童對幾何抽象概念的學習，一直是數學教育研究領域關切的議題，大部分的

研究著重在形體外觀的辨識、形體的性質。然而在空間方位、平面圖形與立體形體之建製與轉換的教材編排上呈現明顯不足。近年來有愈來愈多的研究均顯示，利用立體影像將有助於教育上的學習與效果。王啟仲 (2003) 的研究中指出，全像立體影像就如同觀看實際物體一樣，觀者也可以移動以觀賞到物體的不同角度面貌，由於並非使用視差原理，所以不需任何輔助的眼鏡，沒有限制特定位置和觀眾人數的問題。全像立體影像是自然最自然的立體影像成像方式，使我們不容易對所呈現的空間深度與真實空間而有所不同且全像展示器是產生最多深度線索之影像，因此能給與最好的立體感 (Lucent & Galyea, 鄭益祥譯, 1996)。

姜美伊 (2005) 的研究顯示，等高線圖運用全像立體影像表現等高線圖比平面影像表現更有助於等高線圖空間深度的判讀，並解決了以往在教學等高線圖時，立體模型不足、電腦配備昂貴無法隨身攜帶及在判讀抽象等高線圖時需具備二維轉換為三維空間才易判讀等問題。蘇祐琮 (2005) 的研究亦證實全像立體影像作為「心智旋轉」的圖像表現媒材時，受測者解讀的正確率優於平面圖像。但立體影像的表現如何適時的、適當的表現等，則有賴視覺設計者或視覺設計教育者建立有效的表現原則 (黃雅玲, 2003)。

(2)「圖形與空間」教學使用全像立體影像之需求

國小低年級學童「圖形與空間」教學使用全像立體影像之需求，於下列幾點論述之：

(a) 認知發展階段

圖形與空間課程對低年級學童來說相當抽象，因為幾何圖形並非實際存在的東西，必須從具體物排除顏色、大小、氣味等因素進一步抽象化的結果。根據荷蘭數學教育家 van Hiele 夫婦對兒童幾何思考模式的研究指出：兒童幾何思考發展可分為五個層次，即「視覺期」、「分析期」、「關係期或非形式演繹期」、「形式演繹期」和「嚴密性或公理性思考期」。國小低年級的兒童大都屬於第一層的「視覺期」階段，必須透過視覺觀察具體物體，由實物的輪廓來辨認圖形 (劉好, 2000)。

幾何推理思維能力限於眼見的具體情境或熟悉經驗，圖形與空間教學，由於表達抽象的立體幾何概念，在平面紙本教材中是無法觀察到的，因此兒童不易了解空間概念。學習及教學上常使用透過幾何透視學所表現出模擬立體影像方式，故學童在圖形的辨認受到實物平面圖像化後的干擾，產生迷思概念結果反而增強學童的錯誤的幾何觀念。

(b) 教學現況

現有的紙本教材內容，幾乎都是以二維平面來呈現，模擬立體影像的視角各類教材皆不盡相同，主要因素在於受到科學技術，以及材料方面的限制，所以喪失了許多有關深度的資訊。而現行的教學方式，若遇到無法觀察到的概念，多以呈現模型教具方式來教導學生。但模型的使用上在取用時非常不便，而且損壞遺失後常補不齊之缺點 (劉好, 1994)。因此，若能採用適當的立體影像來協助教學，幾何抽象的概念轉化為裸視可見的立體概念，將有助於改善一般平面在深度描述立體空間深度上的不足。

綜合以上所述，由於學童在學習立體幾何單元的過程中無法看到具體的實物，因此以自己原有的概念或實物平面圖像化後不當的比擬，結果導致迷思概念影響學習。若使用全像立體影像，輔以良好的教學設計進行幾何教學，對於紙本教學內容中某些觀察不到的空間深度，透過全像立體影像就能有效且清楚呈現立體幾何構造及空間方位，建立幾何概念的正確知識，亦能解決兒童無法觀察到空間深度的教學問題。

四、研究方法

幾何形體概念的學習裡，強調幾何形體的認識探索與操作以發展對簡單幾何形體的理解。一開始都是採取最基本簡單的幾何形體之性質來學習。且當多個空間單元體之間排列組合，就會產生有組織有位置的空間關係。一種名為索馬 (SOMA Cube) 的智力玩具，利用這些小組件可以組裝成一個立方體或其他的三維圖形，透過玩索馬立方體更可以認識立體對稱、旋轉的概念以及理解立方體的三個方位及空間組合的相對關係。

因此，以索馬立方體的題型為本研究的範例，說明刺激物基本形改變的規則，是由簡單圖形至困難度較高的圖形排列。本研究以索馬立方體之組件連結在一起，形成三種不規則形狀之立體幾何圖。此三種不規則形狀的立體幾何圖做為實驗刺激物。了解以最基本簡單的立體幾何圖在學童的判讀情形是否會因不同的媒材表現而有所影響。

1. 實驗設計

本實驗包含前測實驗、平面影像實驗及立體影像實驗，實驗設計與目的說明如下：

(1)前測實驗：學童是否能辨識以全像立像影像媒材所呈現的立體幾何圖。

目前用於表現兒童幾何形體概念與空間關係的輔助教材，大都以平面影像的紙本教材呈現，因此本實驗為了解當以立體影像來呈現立體幾何圖時，立體影像是否為學童所能判讀的媒材，以了解受測者判讀立體影像的結果，實驗結果可做為後續實驗之實驗依據。採用問卷填答方式，受測者填寫辨識出立方體數量結果。自變項為 3 組不同數量的立方體 (4 個、8 個、12 個)，不同高度 (2 層、3 層、4 層) 及不同數量的重疊隱藏之立方體 (1 個、2 個、3 個) 所組合的立體幾何圖，以全像立體影像呈現。依變項為受測者辨別立方體數量正確率。觀看時間的長短在本研究中列為排除變項。

目的：依受測者判讀的結果找出在全像立體影像中，立體幾何空間深度的執行規則，以了解未來全像立體幾何圖的製作上於深度呈現之表現規範。

前測結果顯示，全像立體影像呈現的角度、清晰度控制及立體幾何的大小將影響受測者辨識空間深度，因此控制拍攝物的大小與角度，可使受測者得以清晰的觀看刺激物，避免因影像清晰度而造成受測的干擾。所以實驗 1 的刺激物設計上將縮小樣本的體積，全像立體影像拍攝角為 45 度。製作全像立體影像的規則，根據學童觀看立體影像的空間認知經驗與能力情況，再適當建構其表現規範。

(2)實驗 1：立體幾何圖以平面影像表現時，學童對立方體的辨識研究。

在國小低年級數學的教育中，幾何主要的學習能力著重在能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體，其內容包括積木堆疊的平面視圖之判讀。因此本實驗以 3 組立方體所組合的立體幾何以平面影像呈現，要求受測者指認平面影像中有幾個立方體，來探討在平面幾何圖表現時，受測者是否能理解圖形與空間的關係並做出正確的判讀。採用問卷填答方式，受測者填寫辨識出立方體數量結果。自變項為 3 組不同數量的立方體 (4 個、8 個、12 個)，不同高度 (2 層、3 層、4 層) 及不同數量的重疊隱藏之立方體 (1 個、2 個、3 個) 所組合的立體幾何圖，以平面影像呈現。依變項為受測者辨別立方體數量正確率。觀看時間的長短在本研究中列為排除變項。

目的：在教材中表現幾何數量與圖形的空間關係，主要方式是以實物平面圖像化來呈現，為了解當以平面影像來呈現立體幾何圖時，立體幾何中方位及空間組合的相對關係，受測者在辨識上的是否會造成判讀上的困難，因此以索馬立方體表現空間組合的立

體幾何圖來做測試，了解受測者辨識的結果為何，以做為後續研究與運用時之參考依據。

(3)實驗 2：立體影像應用於立體幾何圖時，學童對立方體的辨識研究。

本實驗為了解當以立體影像來呈現立體幾何圖時，立體幾何圖中所表現的空間關係，受測者是否能透過立體影像進行辨識立方體數量之操作，判讀立體影像的結果以做為後續研究與運用時之參考依據。採用問卷填答方式，填寫辨識出立方體數量結果。自變項為 3 組不同數量的立方體 (4 個、8 個、12 個)，不同高度 (2 層、3 層、4 層) 及不同數量的重疊隱藏之立方體 (1 個、2 個、3 個) 組合的立體幾何圖，以全像立體影像呈現。依變項為受測者辨別立方體數量正確率。觀看時間的長短列為排除變項。

目的：從前測實驗得知立體影像為學童所能辨識與接受的媒材，延伸實驗 1 的結論，實驗 2 針對立體影像進行探討，了解以全像立體影像作為輔助媒材，是否有助於立體幾何圖中方位及空間組合相對關係的判讀。

2. 研究對象

坊間有關幾何學習教材的編輯中，因應九年一貫教材的規劃，多以一、二年級學童為學習的主要對象。因此本研究以台南縣崑山國小一、二年級學童為研究對象，受測時採取隨意分組。前測實驗一、二年級各 10 人，實驗 1 與實驗 2 一、二年級各 20 人進行實驗。人數總數為 100 人，一、二年級學童各 50 人，所有受測者均在視力標準值：裸視 1.0~1.2/矯正 0.8~1.0 的範圍之內。

3. 研究限制與範圍

本研究探討的範圍為立體幾何中的立方體，其它例如球體、三角柱等，暫不討論。因為使用立方體的積木來建構三維的物體能夠協助學生發展良好的空間感 (Owens, 1990; Izard, 1990)。因此本研究以立方體為實驗刺激物。

為探討在圖形與空間課程中，全像立體影像在幾何實物平面圖像化呈現上的幫助，本研究針對初次接受立體幾何相關學習的國小一、二年級學童，對於全像立體影像辨識的情形作為研究的主要重點，其它關於學童的性別、個性，家庭背景及生活習慣，本研究暫不探討。

4. 實驗刺激物說明

國小低年級幾何形體概念的學習裡，其教材內容包括積木堆疊的平面視圖之判讀。堆積木的維度有二：一個是積木的高度，另一個是積木的前後左右方位 (吳文如、呂玉琴, 2002)。因此，本實驗樣本採取索馬立方體手冊中空間組合之圖形做測試，刺激物數量為 4 個高度為 2 層，重疊隱藏的立方體為 1 個，此立方體的重疊乃為學童發展其抽象的空間概念之圖形，在學童觀看立體幾何圖時對於形體的判斷及空間做基礎的了解，在接續探討數量 8 個及 12 個，分別高度為 3 層、4 層，重疊隱藏的立方體為 2 個、3 個的時候受測者對空間關係判讀的情形。立體幾何組合之圖形有以下三種，分別為 A1、A2、A3，如表 1。立體影像刺激物以下呈現為 90 度~120 度範圍之內，在不同視角觀看結果。

5. 實驗進行方式

研究者事先徵求教師及學童的同意，採一對一的方式進行操作。操作時間不予限制，視每位學童操作的情況不同，完成時間約 1 分鐘至 3 分鐘不等。重建光源為全像拍攝之參考光角度，入射角 45 度。

實驗進行步驟如下：

- (1)將受測者帶入實驗場地，使其以坐姿清楚觀看刺激物，向受測者說明實驗進行方式。
- (2)發給受測者問卷，並告知填寫問卷的方式。
- (3)請受測者觀看刺激物並從不同角度做觀察，分辨立方體的數量。
- (4)判讀完畢後填寫問卷表示分辨立方體的數量。

五、研究結果與分析

依受測者作答結果統計每一年級的人數和所佔的百分比。由作答結果進行分析作為研究依據。

實驗 1 (平面影像) 與實驗 2 (立體影像)，受測對象為一、二年級學童各 20 人。

- (一)實驗 1：立體幾何圖以平面影像表現時，學童對立方體的辨識研究之正確率結果，如表 2。

表 1 實驗刺激物說明


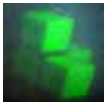
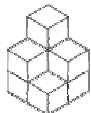

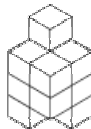

立體幾何組合之圖形	平面影像	立體影像	特徵
A1			數量 4 個， 高度 2 層， 重疊隱藏的立方體 1 個。
A2			數量 8 個， 高度 3 層， 重疊隱藏的立方體 2 個。
A3			數量 12 個， 高度 4 層， 重疊隱藏的立方體 3 個。

表 2 平面影像受測結果

立體幾何組合之圖形	A1	A2	A3
一年級學童判讀正確人數/總人數	10/20	6/20	4/20
二年級學童判讀正確人數/總人數	11/20	8/20	7/20

- 1.A1 圖形之判讀結果：一年級學童的正確率為 50%，50%的學童未能完全正確的辨別；二年級學童的正確率為 55%，45%的學童未能完全正確的辨別。
- 2.A2 圖形之判讀結果：一年級學童的正確率為 30%，70%的學童未能完全正確的辨別；二年級學童的正確率為 40%，60%的學童未能完全正確的辨別。
- 3.A3 圖形之判讀結果：一年級學童的正確率為 20%，80%的學童未能完全正確的辨別；二年級學童的正確率為 35%，65%的學童未能完全正確的辨別。

從以上數據來看，不同年級之間皆有程度上的差異。造成此結果的原因，除認知發展階段的差異外，可能是立方體的呈現彼此重疊，重疊隱藏的立方體對學童而言是為抽象推理的幾何概念，而平面影像呈現的空間深度有限，使學童不易辨認，也就是以立體幾何組合的圖形用抽象推理來表現空間方式，受測者必須自行想像其形體的形狀及空間之間的關係。受測者對最基本的立體幾何組合圖形的判別是有困難的，且愈複雜的立體幾何組合之圖形在學童判別的正確率也愈低，可見得立體幾何組合的圖形表現於平面影像方式在立方體判別上是有困難的。

相關文獻認為可能與圖形本身的複雜程度有關，本實驗刺激物因為涉及不同的高度與方位，故難度較高。除此之外，高耀琮 (2002)研究指出：兒童在學習的過程中容易受到「原型」的影響，而兒童學習的教材裡常常出現圖形的底都是水平方位，排列整齊的印在教材中，所以兒童會產生對圖形底是水平方位的原型。

綜合以上所述，幾何的學習可能與現有紙本教材中，出現圖形的角度影響有關。因此幾何的教學如何從視覺表現的概念切入，提供一個豐富的視覺和分析的學習環境，克服知覺的限制性，則有待進一步研究確認。

(二)實驗 2：立體影像應用於立體幾何圖時，學童對立方體的辨識研究之正確率結果，如表 3。

表 3 立體影像受測結果

立體幾何組合之圖形	A1	A2	A3
一年級學童判讀正確 人數/總人數	17/20	14/20	8/20
二年級學童判讀正確 人數/總人數	18/20	17/20	13/20

- 1.A1 圖形之判讀結果：一年級學童的正確率為 85%，15%的學童未能完全正確的辨別；二年級學童的正確率為 90%，10%的學童未能完全正確的辨別。
- 2.A2 圖形之判讀結果：一年級學童的正確率為 70%，30%的學童未能完全正確的辨別；二年級學童的正確率為 85%，15%的學童未能完全正確的辨別。
- 3.A3 圖形之判讀結果：一年級學童的正確率為 40%，60%的學童未能完全正確的辨別；二年級學童的正確率為 65%，35%的學童未能完全正確的辨別。

由數據得知，在三種立體幾何組合之圖形的平面影像與全像立體影像中，可看出全像立體影像比平面影像的判讀正確率高。重疊隱藏的立方體雖對學童是抽象推理的幾何概念，但經由全像立體影像表現後，在視覺上提供學童多一點線索幫助學童分辨出正確立方體數量，可能是因為有立體影像做輔助，所以立體影像比平面影像的判讀正確率較高。根據相關研究指出，利用立體影像幫助學生學習三維空間的立體結構圖，是一種有效的教學方法。藉由全像立體影像輔助空間學習，建立學童觀看全像立體影像的經驗引導學童學習，是否能加強學童對於幾何的抽象概念，且有助於空間深度的判別。這部分值得作進一步的探討來發展全像立體影像之輔助教材。

六、結論與建議

本階段主要是希望能從學童對全像立體幾何圖辨識的研究中，了解學童在觀看全像立體幾何圖時，對於全像立體影像此種媒材的認知程度如何。並試圖了解學童在立體的

平面視圖的困難、分析全像立體影像與傳統平面影像的實驗結果。

以下針對實驗結果可作成四項結論：

1. 在分辨立方體數量方面，一、二年級學童從平面刺激物來辨識立方體的正確率都不高，但可以得知以全像立體影像輔助媒材來呈現立體幾何圖時，普遍學童是能夠辨識亦覺得有趣的。
2. 立體幾何組合的圖形表現於平面影像方式在立方體判別上是有困難的，且愈是複雜的立體幾何組合之平面圖形在學童判別的正確率也愈低。學童不易由平面影像中，了解物體之間的空間關係。
3. 立體幾何組合之圖形運用了全像立體影像輔助媒材成像時，有助於立方體的判別，也就是全像立體影像有助於抽象推理的幾何概念。
4. 全像立體影像輔助學童在立方體辨識的正確率，優於使用平面影像。

分析造成上述的原因，由於影像顯示的科技不斷在進步，回顧立體影像發展的歷史，不難發現其發展是以人性化為取向，愈來愈多高科技運用在立體影像的設計上，促進人類生活上的便利、豐富我們的視覺經驗，也使得與立體影像相關的產業蓬勃發展因應而生，如今全像的技術已廣泛應用在防偽包裝、防偽商標、禮品等。但全像立體影像的應用不僅只於此，在醫學、藝術表現、展示設計、教學及建築表現層面上也應有更多的發展空間。

在本次研究中發現，透過全像立體影像輔助媒材，受測學童在觀看立體幾何圖時，不僅讓學童在快速變換的影像吸引下，獲得了視覺上的歡樂效果並且提高對立體幾何的學習動機，增進圖形與空間的判斷力。因為立體影像是具有啟發性的，經由圖形的操弄與維度的轉換，展現出不同於平面的立體深度，可以幫助我們解決原來並不容易解決的幾何問題。

通過實驗設計後的結果顯示，普遍學童能夠辨識以全像立體影像來呈現的立體幾何圖，且立體影像的應用優於平面影像，提高學童判別的正確機率。這對未來全像立體影像在兒童視覺經驗的影響上及「圖形與空間」的教材開發上，可能是一個重要的參考訊息。因此，下一階段將發展全像立體影像於幾何空間教學，教材製作與表現原則，特別是有關紙本教材中，幾何空間教學不易表現的空間層次的問題，這部分也需要儘快建立相關的立體影像製作及表現原則，以便未來進一步研究與運用。

參考文獻（略）