國小高年級學童於比例問題的解題規則之階層結構探討

林瑋詩　林原宏
彰化市南郭國小　國立台中教育大學數學教育系
lin.lily@msa.hinet.net　lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘　要

本研究旨在利用 Bart 和 Kurt (1973)所提出的次序理論(ordering theory)分析方法，探討國小高年級個別受試者在比例問題的解題規則之次序性和階層性。本研究以台灣中部地區國小高年級學童為研究對象，以比例問題測驗共 27 題進行施測，並應用次序理論分析總分不同和總分相同但反應不同的受試者，其解題規則階層結構的異同。

研究結果顯示，總分不同的受試者，其在比例問題解題規則階層各具特色和意義；而總分相同但反應組型不同的受試者，其解題規則階層也有差別。本研究可作為認知診斷、補救教學的參考。

關鍵詞：次序理論、比例問題、解題規則

一、緒論

以下針對研究動機和研究目的分述如下：

(一)研究動機

有關比例問題解題的研究，大部分只探討受試者所使用解題規則的類型和使用次數多寡的情形(何意中，1988；Hart, 1981; Lamon, 1993)，甚少利用合適的方法探究受試者的解題規則間的關係。關於如何分析受試者解比例問題所使用的解題規則，是一個值得探討的主題。Bart 和 Krus(1973)提出有關於次序理論分析方法，可分析試題之間的次序性和階層性。因此，本研究主要是應用其次序理論分析每位受試者的解題規則階層結構，藉以呈現受試者在處理比例問題時所使用的解題規則的先後順序。

(二)研究目的

基於上述，本研究所使用的解題規則之次序理論分析，可分析每位受試者的解題規則之次序性和階層性。但限於篇幅，本研究的研究目的僅針對不同總分受試者和總分相同但反應組型不同的受試者，分析其在比例問題解題規則的階層結構的異同。

二、文獻探討

(一)次序理論

次序理論是分析試題間次序性的工具(Airasian & Bart, 1973)。以二元計分的試題 i

和試題 j 為例，兩試題答對(以 1 表示)和答錯(以 0 表示)的人數列聯表如表 1 所示(林原宏，2005)。

表 1　試題 i 和試題 j 的答題人數列聯表($i \neq j$)

		試題 j		總和
		1	0	
試題 i	1	n_{11}	n_{10}	$n_{1\bullet}$
	0	n_{01}	n_{00}	$n_{0\bullet}$
總和		$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 0}$	$n = n_{11}+ n_{10}+ n_{01}+ n_{00}$

試題 i 和試題 j 兩試題間的答題反應模式有(1,1)、(1,0)、(0,1)和(0,0)四種。Airasian 和 Bart(1973)認為當(0,1)反應次數出現比率很小時，則試題 i 為試題 j 的先備條件(Bart & Krus, 1973)。因此，根據表 1 定義(0,1) 反應次數出現比率為 n_{01}/n，範圍為 $0 \le (n_{01}/n) \le 1$。若 n_{01}/n 愈小，則試題 i 為試題 j 的先備條件。所以，Airasian 和 Bart(1973)以容忍水準(tolerance level) ε來決定試題之間的次序性如下：

1.當$(n_{01}/n) < \varepsilon$，則試題 i 為試題 j 的先備條件，以試題 i 指向試題 j 的線段表示；

2.當$(n_{01}/n) \ge \varepsilon$，則試題 i 不為試題 j 的先備條件，沒有線段由試題 i 指向試題 j。

至於ε的選定 Airasian 和 Bart(1973)建議容忍水準ε可取為.02，但實證研究中，容忍水準ε可由研究者來決定。

(二)比例問題解題的相關研究

林福來、郭汾派和林光賢(1984)以抽樣筆測和面談法探討國中生處理比例問題的解題策略，及對比、比例的瞭解層次，並就錯誤推理進行診斷和補救。魏金財(1987)探討學童處理比例問題的解題策略和解題策略隨生長而改變的情形。Lo 和 Watanabe (1997)以個案研究法瞭解一國小五年級學童的解題策略和影響解題的因素。翁宜青和劉祥通(2003)的研究中發現，一國小三年級學童能分別以「疊加法」、「數量分解法」、「單價法」、「倍數法」策略，解決簡單式比例問題。莊玉如(2005)利用半結構訪談法，探討九位國小四年級學童，在面對不同數值及題目型態的比例問題時的解題表現，指出學童會因解題需求不同，使用不同的策略。

綜合以上比例問題解題的相關文獻，研究者著重探討學童解比例問題所使用的解題規則類型，但如何呈現和分析每位受試者的解題規則，是一個值得探討的主題。因此，本研究欲應用次序理論分析受試者於比例問題的解題規則階層結構。

三、研究方法

(一)比例問題解題規則之計分及個別受試者解題規則之次序分析

本研究應用 Bart 和 Krus(1973)的次序性定義，分析個別受試者之解題規則的次序性。假設有 R 個解題規則以 r =1,2,⋯,R 表示；測驗有 M 題試題，以 m = 1,2,⋯,M 表示，則每個解題規則定義之下，每題試題有其標準反應，所以假設其標準反應矩陣為 $X=(x_{rm})_{R\times M}$，定義為：

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \Lambda\Lambda & x_{1M} \\ x_{21} & x_{11} & \Lambda\Lambda & x_{2M} \\ M & M & & M \\ x_{R1} & x_{R2} & \Lambda\Lambda & x_{RM} \end{bmatrix}=\left(x_{rm}\right)_{R\times M}$$

假設某位受試者在每一題的作答反應矩陣，定義為：

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \Lambda\Lambda & y_M \end{bmatrix}=\left(y_m\right)_{1\times M}$$

則該受試者的作答反應矩陣 Y，根據 X 矩陣中每個規則在每題中的標準反應，可得該受試者在每題試題中所使用的規則反應矩陣 S，定義為：

$$S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \Lambda\Lambda & s_{1R} \\ s_{21} & s_{22} & \Lambda\Lambda & s_{2R} \\ M & M & & M \\ s_{M1} & s_{M2} & \Lambda\Lambda & s_{MR} \end{bmatrix}=\left(s_{mr}\right)_{M\times R},\quad s_{mr}=\begin{cases} 1 \quad , \quad y_m = x_{rm} \\ 0 \quad , \quad y_m \neq x_{rm} \end{cases}$$

針對每位受試者，皆有一規則反應矩陣。在規則反應矩陣之下，計算兩兩規則間的次序關係。以規則 i 和規則 j 為例，規則 i 和規則 j (以 1 表示反應符合該規則，0 表示反應不符合該規則) 的次數列聯表如表 2 所示。

表 2　規則 i 和規則 j 的反應次數列聯表($i \neq j$)

		規則 j 1	規則 j 0	總和
規則 i	1	m_{11}	m_{10}	$m_{1\bullet}$
	0	m_{01}	m_{00}	$m_{0\bullet}$
總和		$m_{\bullet 1}$	$m_{\bullet 0}$	$M = m_{11}+ m_{10}+ m_{01}+ m_{00}$

根據表 2 定義(0,1) 反應次數出現比率為 m_{01}/M，範圍為 $0 \le (m_{01}/M) \le 1$。若 m_{01}/M 愈小，則規則 i 為規則 j 的先備條件。以容忍水準 ε 來決定規則 i 和規則 j 的次序性如下：

1.當 $(m_{01}/M) < \varepsilon$，則規則 i 為規則 j 的先備條件，以規則 i 指向規則 j 的線段表示；

2.當 $(m_{01}/M) \ge \varepsilon$，則規則 i 不為規則 j 的先備條件，沒有線段由規則 i 指向規則 j。

若某位受試者在某個規則之下，其反應次數出現比率 (m_{01}/M) 皆為 0，表示該位受試者從未曾使用該規則，則不納入規則次序性分析。

(二)比例問題測驗

研究者參考比例問題的相關文獻(莊玉如，2005；楊錦連，1998)，編製比例問題測驗共 27 題，並商請兩位國小教師和一位數學教育專家提供相關建議及審核。題目類型分為交換問題、組合問題和母子問題共三類，題目中的數字型態(A : B = C : D)分為 C 是 A 和 B 的整數倍、只有 B 是 A 的整數倍、只有 C 是 A 的整數倍以及 C 不是 A 和 B 的整數倍共四類。

(三)研究樣本

研究樣本來自台灣中部地區國民小學五、六年級 876 位受試者。研究者計算每位受試者的解題規則間的(0, 1)反應次數發生率 (m_{01}/M)，繪出解題規則的階層結構圖，並分

析解題規則間的次序性。

(四)比例問題測驗的解題規則

研究者根據比例問題解題的相關研究和受試者的作答反應，整理出學童解比例問題時的十種解題規則的意義，如表3所示。

表3　比例測驗的十種解題規則

解題規則	定義
1.單價法 (正確規則)	(1)定義：先求出「一單位的量」，再依需要加以計算求解，稱為單價法(林福來、郭汾派、林光賢，1984)。 (2)例：「文具店裡，2枝紅筆賣16元；媽媽買了11枝紅筆，要付幾元？」 解法：$16 \div 2 = 8$，先求出1枝紅筆8元， $8 \times 11 = 88$，再求出11枝紅筆的價錢。
2.倍數法 (正確規則)	(1)定義：先求出兩個等價的比中前項之間的倍數關係，再利用此倍數關係擴充到後項的方法求解，稱為倍數法(莊玉如，2005)。 (2)例：「跳蚤市場裡，8個蘋果可以換2個奇異果，24個蘋果可以換幾個奇異果？」 解法：$24 \div 8 = 3$，先求出24個蘋果是8個蘋果的3倍， $2 \times 3 = 6$，再求出2個奇異果的3倍是6個奇異果。
3.公式法 (正確規則)	(1)定義：利用比例關係式、比值相等方式或十字相乘法解題(劉祥通，2004)。 (2)例：「文具店裡，2枝紅筆賣16元；媽媽買了11枝紅筆，要付幾元？」 解法：$2 : 16 = 11 : X$，先列出比例關係式， $16 \times 11 \div 2 = 88$，再用內項乘積等於外項乘積求解。
4.疊加法 (正確規則)	(1)定義：先找出第一個比率關係，再藉由加法擴充到第二比率關係的方法，稱為疊加法(楊錦連，1998)。 (2)例：「跳蚤市場裡，8個蘋果可以換2個奇異果，24個蘋果可以換幾個奇異果？」 解法：先找出8個蘋果可以換2個奇異果，依序利用加法算出16個蘋果可以換4個奇異果，24個蘋果可以換6個奇異果。
5.公因數、公倍數法 (正確規則)	(1)定義：公倍數法是將比例問題中兩個比的前項(或後項)放大至共同的倍數或縮小至共同的因數再求解。 (2)例：「10個人吃披薩，要買4個大披薩才夠吃。慶生會有15個人參加，最少要買幾個大披薩才夠吃？」 解法：先找出10和15的共同倍數為30，再算出30個人要買12個披薩，15個人則要買6個披薩。

表 3 （續）

解題規則	定義
6.數量分解法 (正確規則)	(1)定義：解題時將問題量數分解為兩個以上的量數，再加以組合的解題策略(劉祥通，2004)。 (2)例：「10 個人吃披薩，要買 4 個大披薩才夠吃。慶生會有 15 個人參加，最少要買幾個大披薩才夠吃？」 解法：$10+5=15$，先把 15 拆為 10 和 5，而 5 人是 10 人的一半。 $4\div 2=2$，再算 4 個披薩的一半是 2 個披薩。 $4+2=6$，最後再把 10 人和 5 人吃的披薩組合起來。
7.自訂關係 (錯誤規則)	(1)定義：在除法計算過程中，遇到除不盡的情形，不瞭解餘數的意義，便自訂關係。 (2)例：「跳蚤市場裡，6 袋米可以換 4 公斤的豬肉。小華有 15 袋米，可以換幾公斤的豬肉？」 解法：$15\div 6=2\cdots 3$，先算出15袋米是6袋米的2倍再加上3袋米。 $4\times 2=8$，$8+3=11$，再算出4公斤的2倍再加上3袋米。
8.加法策略 (錯誤規則)	(1)定義：將一比例關係中的一數減另一數，再將此差數應用到第二比例關係中。 (2)例：「雜貨店裡，100 公克的花生賣 50 元，250 公克的花生賣幾元？」 解法：先算$100-50=50$，再算$250-50=200$
9.比例項錯置 (錯誤規則)	(1)例：「小雙上午拿了 6 張榮譽卡去換了 3 本書。下午拿 4 張榮譽卡去換書，可以換到幾本書？」 解法：$6\div 3=2$，想法是每2張可換1本書。 但第二步驟卻用 $4\times 2=8$，4 張可換到 8 本書。
10.無規則 (錯誤規則)	(1)定義：將題目中的數字任意加減乘除。

四、研究結果

本研究應用次序理論於比例問題解題規則的探討，可分析每位受試者在比例問題解題規則的次序性和階層圖。但限於篇幅，本研究僅就不同總分群組的受試者，和總分相同但反應組型不同的受試者，探討其在比例問題之解題規則次序性和階層圖的異同。研究者採隨機抽取受試者來說明探究，本研究的容忍水準設定為 $\varepsilon=.1$(Bart & Krus, 1973)。

(一)不同總分受試者的解題規則階層

依總分(以正確規則計分)將受試者分為高、中、低三組(以最高分的 27%為高分組和最低分的 27%為低分組，其餘則為中分組)，在每組中隨機抽取一位受試者進行分析。

隨機抽取的三位受試者(依高中低三組，其編號分別為 14、505 和 153)的解題規則階層結構圖如圖 1 所示。

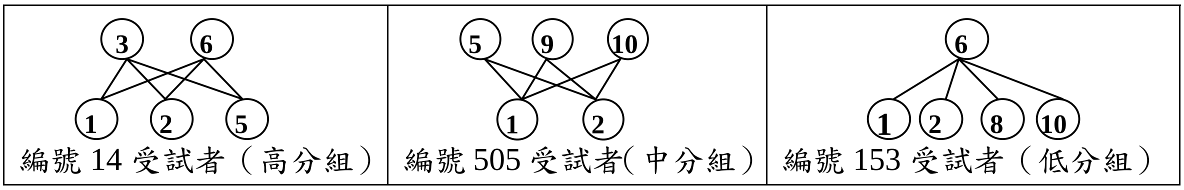

圖 1 不同總分之三位受試者的解題規則階層結構圖

圖 1 所呈現的三位受試者解題規則皆二個階層，但其呈現的次序性卻不同。可歸納如下：

1.編號 14 受試者最先使用規則 1、規則 2 和規則 5；當不使用規則 1、規則 2 和規則 5，則使用規則 3 和規則 6；而從未使用規則 4、規則 7、規則 8、規則 9 和規則 10。

2.編號 505 受試者最先使用規則 1 和規則 2；當不使用規則 1 和規則 2，則使用規則 5、規則 9 和規則 10；而從未使用規則 3、規則 4、規則 6、規則 7 和規則 8。

3.編號 153 受試者最先使用規則 1、規則 2、規則 8 和規則 10；當不使用規則 1、規則 2、規則 8 和規則 10，則使用規則 6；而從未使用規則 3、規則 4、規則 5、規則 7 和規則 9。

4.三位受試者皆先使用規則 1、規則 2。

5.相較於其他二位受試者，編號 14 受試者都使用正確規則。

6.編號 505 受試者先使用正確規則，當不使用正確規則時，則可能使用錯誤規則；而編號 153 受試者最先使用的有正確規則、也有錯誤規則。

7.具體言之，三位受試者的的解題規則階層差異頗大。所以，不同總分的受試者，其解題規則的次序性不同，因此，所蘊含的認知架構也不同。

(二)總分相同但反應組型不同之受試者的解題規則階層

限於篇幅，僅在高分組中，隨機選取兩位總分相同但反應組型不同的受試者(其編號為 12 和 631，總分同為 27)，二位受試者的解題規則階層結構圖如圖 2 所示。

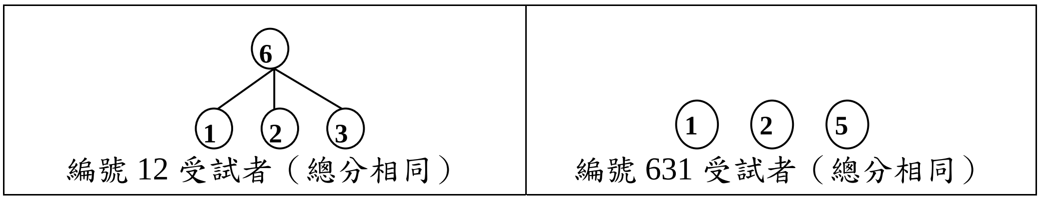

圖 2 總分相同但反應組型不同之二位受試者的解題規則階層結構圖

圖 2 所呈現的二位受試者之解題規則各具特色，且其解題規則階層數不同，呈現的次序性也不同，可歸納如下：

1.編號 12 受試者的解題規則階層有二個階層。其最先使用規則 1、規則 2 和規則 3；當不使用規則 1、規則 2 和規則 3，則使用規則 6；而從未使用規則 4、規則 5、規則 7、規則 8、規則 9 和規則 10。

2.編號 631 受試者的解題規則階層有一個階層，規則使用較無次序性。其只使用規則 1、規則 2 和規則 5，且此三個規則的出現是隨機的。而從未使用規則 3、規則 4、規則 6、規則 7、規則 8、規則 9 和規則 10。

3.具體言之，此二位受試者的的解題規則階層差異頗大，編號 631 受試者的規則使用較無次序性。雖然二位受試者總分相同，但其解題規則的次序性不同，因而所蘊含的認

知結構也各具意義。

五、結論與建議

(一)結論

根據本研究的結果顯示，總分不同的受試者，其在比例問題解題規則階層各具特色和意義；而即使總分相同的受試者，其解題規則階層圖中，規則使用的次序性亦有所差異。因此，應用次序理論，能呈現個別受試者之解題規則次序性的特色。

(二)建議

本研究的發現，可提供教學者進行診斷和補救教學之參考。而未來可再針對比例問題中題目的語意類型和數值型態，深入瞭解學童在解決比例問題時所使用解題規則的次序性和階層結構的異同。

六、參考文獻

何意中(1988)。國小三、四、五年級學生比例推理之研究。*花蓮師院學報*，*2*，387-433。

林原宏(2005)。次序理論。*教育研究月刊，134*，142-143。

林福來、郭汾派、林光賢(1984)。*國中生比例的概念發展*(NSC74-0111-S003-02)。台北市：國立台灣師範大學數學系。

林福來、郭汾派、林光賢(1984)。國中生的比例概念發展，*科教月刊，87*，14-42。

翁宜青、劉祥通(2003)。一位國小三年級學生解簡單式比例問題之研究。科學教育研究與發展季刊，31，32-53。

莊玉如(2005)。國小四年級學童比例問題解題表現之研究。國立台中教育大學數學教育學系碩士論文。

楊錦連(1998)。國小高年級學童解決比例問題之研究。嘉義大學國民教育研究所碩士論文。

劉祥通(2004)。*分數與比例問題解題分析：從數學提問教學的觀點*。台北：師大書苑。

魏金財(1987)。學童比例推理能力探究。臺灣省國民學校教師研習會主辦，*七十六年國小課程研究學術研討會專輯*，122-138。

Airasian, P.W., & Bart, W. M. (1973). Ordering theory: A new and useful measurement model. *Educational Technology*, *May*, 56-60.

Bart,W. M., & Krus, D. J. (1973). An ordering-theoretic method to determine hierarchies among items. *Educational and Psychological Measurement*, *33*, 291-300.

Hart, K. M.(1981). Ratio and proportion. In K. Hart (Ed.), *Children understanding of mathematics*: *11-16(pp. 88-101)*. London, UK:John Murray.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.

Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 216-236.