國小四年級學童比例問題解題思維之研究
—「單位化」能力之初探

游自達　　莊玉如
國立台中教育大學教育系副教授　　國立台中教育大學數學教育學系碩士
yiu@mail.ntcu.edu.tw　　bma092109@yahoo.com.tw

摘　要

本研究主要係以國小四年級未接受正規比例教學之學童為對象，由其解決比例問題的過程中分析單位化的運用情形及其型態，並探究其和比例問題解題表現之間的關係。研究過程共訪談四位國小四年級之學童，結果發現學童在解決比例問題時，其單位化的思考主要有「一對多」、「多對多」等型態，不同型態的思考反應學童對於比例問題中兩個量度空間的值之關係的不同理解，而單位化思考與解題正確性有密切關係，正確運用單位化思考往往導致比例問題的成功解決。

關鍵詞：比例　比例推理　單位化

一、研究背景與目的

比例概念是日常生活的問題解決中不可或缺的一環，也是數學和自然科學學習上十分重要的基本概念。J. Piaget 將比例概念視為形式運思能力的指標，有些學者（如 Lesh, Post & Behr, 1988）則認為它是基礎數學與較高層次數學的分水嶺。因此，比例概念的學習在國內外的數學課程中均具有重要的地位。

近四、五十年來，有關學童比例概念的發展、錯誤類型、學習困難的問題受到學者廣泛的重視與研究。諸多研究者指出，比例問題的解題需要多種知識的整合和抽象心理能力的發展，中小學學童面對比例問題常感到困難。筆者綜合分析相關文獻後認為，學童對於比例問題的困難主要係來自下列幾項轉變：（一）加法到乘法結構的轉變：如 Vergnaud (1983，1988)、Hibbert 和 Behr(1988)所指出，比例問題屬於乘法結構的一環，學童需要和處理加法關係不同的新思維。在加法關係中，學童所面對的往往是可具體表徵的「量」，乘法結構的問題中所面對的是量的「關係」，此種關係的覺察與量化需要不同的能力；（二）問題情境與結構的擴充：比例問題涉及兩個度量空間（measures）中四個值的乘法關係，所涉及的問題情境也由外延量（extensive measures）擴充至內涵量（intensive measures）（Schwartz，1988；Vergnaud，1983，1988）；（三）對等關係的量化：比例問題的解決需要將兩個量數的對等關係加以量化（即比值），並在量化後進行比較、運算等（Hoffer，1992；Larmon，1994）。這些轉變主要發生於國小中、高年級，並延續之國中階段。

前述各項的轉變造成解決比例問題的新認知需求（Hibbert & Behr，1988），除了乘除法、因倍數的概念外，單位化(unitizing)也成為解題的重要認知機制(mechanism)。學

生需要將比當做一個單位來運用，此乃是一種能將單位集聚化的能力（Lamon, 1994）。例如，在面對「甲商店4枝鉛筆賣10元，乙商店12枝鉛筆賣28元。哪一家的鉛筆比較便宜？」的問題時，學童如果能夠將「4枝10元」或「4枝和12枝」的「關係」視為一個新的單位，並以這個單位進行比較或運算，這樣的表現便是單位化能力。Lamon (1994)指出「單位化」是建立逐漸複雜的單位結構之歷程，它是一種發展更複雜的推理的重要機制結構。換句話說，單位化能力是解決比例問題的重要關鍵。

有鑑於此，本研究以國小四年級未接受正規比例教學之學童為對象，由其解決比例問題的過程中分析單位化的運用情形及其型態，並探究其和比例問題解題表現之間的關係。

二、研究過程與方法

為求能探究學童的解題歷程，本研究主要以訪談的方式蒐集資料。考量學童的表達及意願等因素，本研究以立意取樣之方式選取台中地區三位、桃園地區一位之國小四年級學童為對象（分別以S1、S2、S3及S4稱之)。其中包含1位男生及3位女生，這些學童的數學成績在班上均屬於中上程度。

本研究之訪談於研究參與者所就讀學校之圖書室進行，主要利用晨光或課餘時間進行2-3次訪談，每次訪談時間約40~60分鐘。訪談過程全程錄影及錄音，並轉譯為逐字稿進行後續分析。

三、研究結果與討論

依據訪談資料，研究者發現研究對象運用單位化能力的方式，主要分為二種類型。限於篇幅，本文僅針對能正確解題的反應加以分析與討論。

(一) 「一對多」之單位化

本研究之學童面對數值間具有整數倍關係的問題時，主要運用其既有之整數乘除法經驗，透過「單位率」(unit rate）和「倍」的方式進行解題，形成「一對多」的單位思維。例一中個案利用單價法解題便是「單位率」的一個例子，先透過除法算出「元/個」，將其視為一個單位，再透過倍的關係解題。此種思考正是Cramer，Post和Currier (1993)所稱的「單位率」策略，可說是學童較熟悉的乘法問題之一環。

【例一】

71. 研:【提出問題「光南文具店的原子筆12枝賣60元，如果買15枝原子筆，需要多少元？」】
72. 生：75【寫60÷12＝5；5x15＝75】
73. 研：怎麼算的？
74. 生：因為它說，因為它12枝賣60元，所以是60÷12就等於1枝幾元，啊然後知道1枝幾元就乘以15，就知道15枝的錢了

(S1_940628_訪1)

在例一中，研究者並不易釐清學童在解題歷程是否同時考量兩個度量空間之四個值的關係，學童可能只是將除法所求得的結果(即每枝鉛筆的單價)視為一個單位，再進行後續的運算。換言之，學童僅是將比例問題視為二步驟的乘除問題，其心中未必具有兩

度量空間共變的概念。

例二是另一類型的「一對多」之單位化解題歷程。在此例子中，學童同時考量兩個度量空間的關係，再運用此關係進行解題。此種思考雖也是「單位率」的一種，但與例一的情況略有不同，可說是一種二維單位下的一對多關係（同時考量西瓜汁和牛奶的對應關係）。

【例二】

15. 研：【提出問題「製作西瓜牛奶需要15 C.C.的西瓜汁加60 C.C.的牛奶，如果要用20 C.C.的西瓜汁，需要多少C.C.的牛奶，才能調製出一樣濃的西瓜牛奶？」】。

16. 生：(60÷15=4；5×4=20；60+20=80)就是算出每 1C.C.要多濃的牛奶，多少 C.C.的牛奶，算出來4，乘以4嘛，差5C.C.，因為15跟20差5C.C.，然後就多加5C.C.的牛奶的量進去，加起來就等於80。

17. 研：80是什麼？

18. 生：就是60C.C.加上5…加上它差它的加上去，因為這裡是60 C.C.嘛，然後它多了5C.C.，這裡就(指第2杯)…也多5C.C.的量 (S3_940613_訪1)

(二)「多對多」之單位化

本研究發現，部分學童在面對「a:b = c:d」的比例問題，而「a與b」、「a與c」之間為非整數倍關係的情況下，能運用「多對多」的單位化思維進行解題。在此解題歷程中，學童將兩個度量空間中的多對多關係視為一個新單位，維持不變，並運用此新單位進行解題。如例三「6個雞蛋15元，4個雞蛋多少元？」，個案三先找出「2個5元」這個關係，將之視為一個單位後，再運用此單位解題。在此歷程中，「2個5元」是個案用來解題的新單位，其必需同時掌握「2個」以及「5元」這2個量數之間的關係，並進而運用它作為新的計數單位，得到「4個？元」是2個「2個5元」。例四亦呈現類似的解題思考。學童係以「16張貼紙換8張卡片」為一個單位，而「32可分成2個16」(行06)，因此可以換得2個8張，亦即是16張。由S3的說明可知，他係以「多對多」為單位解決此類問題。這樣的解題思維顯示，學童已初步掌握量與量之間關係的不變性（即雞蛋與價錢之間6對15的關係 和貼紙與卡片之間 16對8關係的不變性），運用此不變性中的「多對多關係」進行解題。

【例三】

11. 研：【提出問題「6個雞蛋賣15元的時候，4個雞蛋會賣多少元？」】。

12. 生：(寫15÷3=5；5×2=10)這個就是先算…先把2個看成1堆，可以分成3堆，1堆的錢就是5塊，可是它有4個，所以就乘以2，所以是10元。

13. 研：2個放1堆，你怎麼知道要2個放1堆。

14. 生：因為偶數啊。

15. 研：因為偶數？

16. 生：因為它們都是偶數啊。

17. 研：因為就是…因為都是偶數，所以 2 個放 1 堆？

18. 生：嗯　(S3_940615_訪 2)

【例四】

01. 研：【提出問題「如果集 16 張貼紙，可以跟同學換 8 張卡片，那麼集了 32 張貼紙，可以換幾張卡片？」】

02. 生：(寫 32÷16=2，2×8=16)

03. 研：你是怎麼想的

04. 生：就是看要幾張，16 張貼紙嘛，然後 32 張可以跟同學換 2 次的 16 張，1 次可以換 8 張，然後換 2 次 2×8=16，8 張可以換 2 次就是有 16 張卡片

05. 研：8 張可以換 2 次就是有 16 張卡片？那你怎麼知道可以換 2 次？

06. 生：因為 32 可以分成 2 個 16 啊　(S3_940613_訪 1)

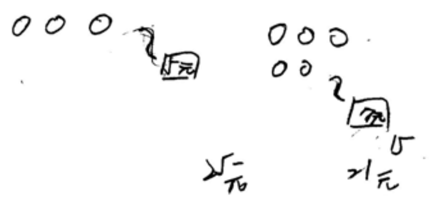
本研究中另外發現「多對多」單位化的另一種運用類型-透過放大至公倍數的方式進行「多對多」關係的比較（如例五所示）。在面對比較比值的問題時，S2 將兩組「多對多關係」中的一個量數擴大到一個共同的倍數，在固定一個量數的情況下，比較另一個量數的大小以解決問題。由行 44 到行 52 可以看出 S2 取「15 個」做為兩家店共同購買的數量，因為 3 跟 5 均可整除 15，則在甲店買 15 個需要 25 元，在乙店買 15 個需要 21 元，25 顯然大於 21，因此他獲得解答為乙店較便宜。他的解題思維係利用將兩家店買的數量放大到一個共同的倍數「15」，藉由「買相同的數量，價格比較少的比較便宜」的方式比較兩家店的價格從而進行解題。

在例五中，學童將兩個比放大至兩個比的前項(或後項)之公倍數，接著比較放大後之兩個比的後項(或前項)，此種解題方式可說是「多對多」單位化思維的一種應用。由於此問題的四個值之間不具有整數倍的關係，學童不易將其轉化為熟悉的「一對多」關係（單位率）進行比較，也不易以前述「多對多」關係的複製進行直接比較，因此將兩組「多對多」關係放大至前項的公倍數再進行比較。這種思考可以有效的避開分數、小數之繁瑣計算，以既有的整數知識進行解題，顯示學童解題方法的彈性。不過，此問題中所涉及的數較小，學童較可以用既有的「倍」的活動經驗加以思考解題，當面對較大的數時是否亦能運用類似的方法進行解題仍有待進一步探討。

【例五】

43. 研：(甲商店 3 個糖果賣 5 元，乙商店 5 個糖果賣 7 元，哪一家賣的比較便宜？)

44. 生：(寫直式 5÷3=1…2，畫掉，左邊畫了 3 個圈，寫 5 元，右邊畫 5 個圈，寫 7 元，然後寫直式 3×5=15，接著在下方分別寫 25 元、21 元)



就是 15，然後它一樣它也要，就是 15 除以 5 的時候是 3，所以 7 也要乘以 3 等於 21，然後它(指甲店)是 15 個 25 元，所以它(指乙店)比較便宜，它(指甲店)比較貴

45. 研：再講1次，你講太快了
46. 生：3乘以5的時候會等於15是15顆，然後呢15除以5的時候是3，所以7也要乘以3等於21元。那這個時候呢，3乘以5的時候是15，然後15再除以5的時候是3，A…
47. 研：為什麼3要乘以…
48. 生：等一下，老師等我一下…15除以3的時候是5，所以5要乘以5是25，因為15顆是25元(指甲店)，它(指乙店)15顆是21元，所以它(指乙店) 比較便宜，它(指甲店)比較貴
49. 研：那你怎麼知道這個要乘以3這個要乘以5？
50. 生：因為它們2個都不能整除它啊(指5不能整除3，7不能整除5)，所以要相乘，就是像那個分數一樣啊，因為你如果除不盡的話就是把7除以5是5分之7，然後這個是…
51. 研：3除以5？
52. 生：(一邊說一邊寫 5/3×5/5=25/15；7/5×3/3=21/15)3分之5，就是它們要…找出他們共同的倍數，就是15，那它們(指3分之5)要乘以5分之5，等於15分之25，那它(指5分之7)乘以3分之3，15分之21，所以它(指乙店)比較便宜 (S2_940524_訪3)

前述不同類型單位化的運用可說擴充了學童集聚單位的類型，將兩個度量空間的關係形成一個新單位，並透過此新單位的複製進行比例推理。「一對多」和「多對多」單位化的運用使學童可以正確地解決比例問題，正如前述，單位化能力乃是解決比例問題的重要關鍵。

由於本研究中的學童尚未接受正式的比例教學，對於兩個度量空間的關係是以並置的方式處理，尚未能將此關係數值化。再者，學童較能處理數值間具有整數倍的比例問題，對於非整數比值的問題仍難運用「一對多」和「多對多」單位化的思維進行解題。

除了前述正確運用單位化思維而正確解題的例子外，本研究中亦發現有未能掌握乘法關係、未能運用單位化思維而解題失敗的情況。與其他研究者（翁宜青，2004；Hart，1982，1988；Hoffer，1992）之發現類似，本研究亦發現有運用加法策略以解決比例問題的情形。惟限於篇幅，本文無法將相關之錯誤類型一一分析說明，筆者將另文加以探討。

四、結語

本研究之結果發現，學童之單位化能力與比例問題之成功解題有密切關聯。正確運用單位化思考是成功解決比例問題的重要關鍵。學童在乘法問題的解題歷程中，主要是經歷兩個度量空間的四個值中其中一個為1的問題（如「每個人有5顆彈珠，4個人共有幾顆彈珠？」之類的問題）。比例問題的四個值之關係對學童而言是另一類的問題。本研究中的個案面對比例問題時，有時將其轉換為熟悉的乘除法二步驟問題（即單位率的解法），有時則運用「一對多」的關係並置進行思考。此種思考下對於兩度量空間的掌握情形較為隱晦、不明確。至於「多對多」的單位化思考則是較明確的顯示，學童能同時考量兩個量數之間的關係，並以此關係作為一個新單位進行推理解題。此種多對多關係的運用代表了集聚單位類型的擴充，可說是有理數「等價集」概念的雛形，值得加

以正視。

如許多研究者所指出，國小中年級正是由數的加法關係進階到乘法關係的轉換階段。面對數的結構的轉變、問題情境的擴充（如內涵量情境的引入）、關係的表示與量化等新挑戰，學童需要發展新的解題工具與思維。「單位」的概念在此階段亦需要擴充與重構，本研究所探究的比例問題中之單位化能力乃是其中的一環。至於如何協助學生發展此等能力則有待後續研究加以探究。

參考文獻

翁宜青（2004）：一位國小三年級學生解比例問題之研究。國立嘉義大學教育學院國民教育研究所碩士論文（未出版）

Cramer, K., Post, T. & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Hart, K. M. (1982). *Children's reasoning on ratio and proportion problems*. Chelsea College, University of London.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number conpects and operations in the middle grades*(pp. 198-2198). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number conpects and operations in the middle grades*(pp. 1-18). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Hoffer, A. (1992). Ratios and proportional thinking. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8 research-based methods (2nd ed)* (pp. 303-330). Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Virginia, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number conpects and operations in the middle grades*(pp. 41-52). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number conpects and operations in the middle grades*(pp. 141-161). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.