

## 國小四年級學生在生活情境問題之數常識表現

蔡鳳秋 國立嘉義大學數學教育研究所 研究生

s0920301@mail.ncyu.edu.tw

楊德清 國立嘉義大學數學教育研究所 教授

dcyang@mail.ncyu.edu.tw

### 摘 要

本研究旨在探討國小四年級學生使用數常識方法解生活情境問題之研究。研究者參考相關文獻設計數常識訪談問題單以作為研究工具，並採半結構式訪談法對國小四年級六位小朋友（低、中、高程度各兩位）進行訪談。

研究結果顯示，小四學生在生活情境問題之數常識表現優劣依序為參考點的使用、瞭解數字的基本意義、比較數字大小、數字的合成與分解與多元策略的使用並能判斷計算結果的合理性。整體而言，使用數常識策略之比例超過一半。也就是透過生活情境文字題不僅可以鼓勵小四學生使用數常識策略進行解題，亦可誘發學生使用多元表徵方式進行解題。因此，透過學生所熟悉之生活情境進行數常識之佈題，或許可為發展數常識能力一個好的開端。

關鍵字:數常識、生活情境、國小四年級

### 一、動機

數常識 (Number sense) 在數學教育界獲得高度的肯定及重視，不論是國際數學教育領域或是先進國家的數學教育改革，都強調幫助兒童發展數常識的重要性 (Australian Education Council, 1991; Japanese Ministry of Education, 1989; NCTM, 2000; National Center for Education Statistics, 2003; 教育部, 2003)。

何謂數常識呢？數常識意指學生能夠意義化數概念的學習，而不只是在求標準答案上面；思考的層面不只是規則的機械式應用，而是在學生創造式的解法 (Reys, 1991)。NCTM (1989) 則描述了擁有良好數常識能力的學生對數字的意義有良好的理解、能發展數字間的多重關係、能理解數字的相對大小且能明瞭運算對數字的相關影響。

Griffin (1995)和 Yang (2006)等人認為將生活情境融入數學學習可以幫助孩子發展數常識。當學生解決生活實際問題時，藉由思考數字和數字的關係、在不同的情境下察覺到數字的變化、不受傳統算則的約束下，將相關的數字與日常生活中的數量訊息相連結時，學生自身的數常識也隨之逐漸發展。因此，無論是學校內或學校外，好的數常識者能夠在真實情境中，流暢的使用數字與運算，並且能夠運用數學知識於真實情境中 (Howden, 1989; Hope, 1989; Schoen, 1989)。因此，本研究之主要目的乃是探討小四學生回答相關生活情境問題時所使用的數常識方法？以提供教師瞭解學生

所遭遇之困難，或做為未來課程設計者之參考依據。

## 二、文獻探討

(一) 數常識的理論架構：數常識自 1989 年發源至今，經過美、澳等國家十多年來的研究與探討，數常識的理論架構以發展至臻完備 (Thompson & Rathmell, 1989; Sowder, 1992; McIntosh, et al., 1997; NCTM, 2000)。研究者根據上述相關文獻所提出的數常識組成成份，歸納出本研究之五個數常識理論架構，說明如下：1. 「了解數字的基本意義」：瞭解各種數字(如整數、分數或小數)的意義，並能在不同情境下，靈活地運用不同的數字型態或表徵方式，例如：「10」公分可以是為手掌的長度，但若表示為腿的長度就不適合。2. 「比較數字的大小」：在不同生活情境之下，對於數字大小的理解，例如：一瓶牛奶，小明喝了 $\frac{1}{3}$ 瓶，小華喝了 $\frac{1}{2}$ 瓶，誰喝的比較多？3. 「數字的合成與分解」：能知道如何藉著組合、分解、與其他方式來轉化，以利於問題之處理，例如  $496 \times 4$ ，能把 496 看成  $400+96$  或  $500-4$  以利於進行計算。4. 「參考點的使用」：個人在解決問題時用來當作基準的指標，例如：以自身的身高為參考指標，來說出「他比我矮的事實」。5. 「發展多元策略並能判斷結果的合理性」：學生能運用自身經驗，找出合適的解決策略進而進行計算，並能針對計算結果進行合理性的判斷。

數學不只是數字與運算的技巧而已，而是在一種真實的情境下進行探查、溝通、思考其特性的方法 (Jarvis & Blank, 1989)。數學解題教學若能與真實生活情境著手，則有助於學生進入抽象化思考前奠定穩固的基礎 (賴怡君, 2002)。TIMSS (2003) 亦提出數學問題可以真實生活的內容呈現給學生。透過生活情境問題不僅能使學生的覺知能力和數學作較好的連結，在展示數學的關聯性時也是有用的，而且更能吸引學生學習的興趣。此外，Lesh 和 Lamon (1992) 提出真實的數學活動，他們認為真正的數學活動是發生在生活情境中的經驗或與學生的生活經驗有相當的相關性。

綜合上述，以情境化的問題設計引導學生思考，讓學生經驗、建構自己的想法，以提高學生學習興趣和學習動機，更可發展其數常識。因此，本研究參考 Lesh & Lamon (1992) 之真實的數學活動與本研究五個數常識組成成分，發展出本研究之訪談工具，以探討國小四年級學生在生活情境文字題所使用數常識方法之概況。

## 三、研究方法

### (一) 研究參與者

選取嘉義縣市二所 (各 3 位學生) 公立之國民小學，並從該二所學校之小四班級中選取一個班級，並商請該班導師依該班學生前三年學習成績分為高 (27%)、中 (46%)、低 (27%) 三個層次，每個層次各抽取一位學生接受訪談，因此共有 6 位正式受訪者。

### (二) 研究工具

訪談問題以數常識五個組成元素作為問題設計之依據，並配合國小四年級學生先前學習過的內容，發展出本研究之研究工具。其中每一向度皆包含三個題目，共計十五題

(如表 1)。訪談問題均經過數常識專家之鑑定，並由研究者商請熟稔數常識之國小現職教師參與鑑定並提供建議。

表 1 訪談問題單之雙向細目表

數常識成份	了解數字的基 本意義	比較數字大 小	數字的合成與 分解	使用參考點	發展多元策略並 判斷結果的合理 性
題號	(1)(6)(11)	(2)(7)(12)	(3)(8)(13)	(4)(9)(14)	(5)(10)(15)

(三) 資料的整理與分析

本研究使用半結構式晤談法。資料的來源包括錄音帶與錄影帶中所紀錄的訪談內容與過程、及受訪者在訪談問題單上的紀錄，以及研究者之手札筆記。此外，研究者參考相關文獻 (Markovits & Sowder, 1994; 楊德清, 2000) 與學生回答問題之內容分析結果，建立本研究之解題策略與歸類 (如圖 1)，在資料的整理與分析過程中，若發現新的解題概況即加為新的類別，並加入原來的架構中。資料分析部分，資料的呈現盡量以受訪者的原始紀錄來描述事件，且透過相關人員一起進行資料的分析與討論，以去除個人的偏見。此外，交叉比較和檢驗本研究之資料來源，目的在於從不同的向度作資料蒐集，以及求資料的豐富性和多元性，意即達到資料來源之三角校正。

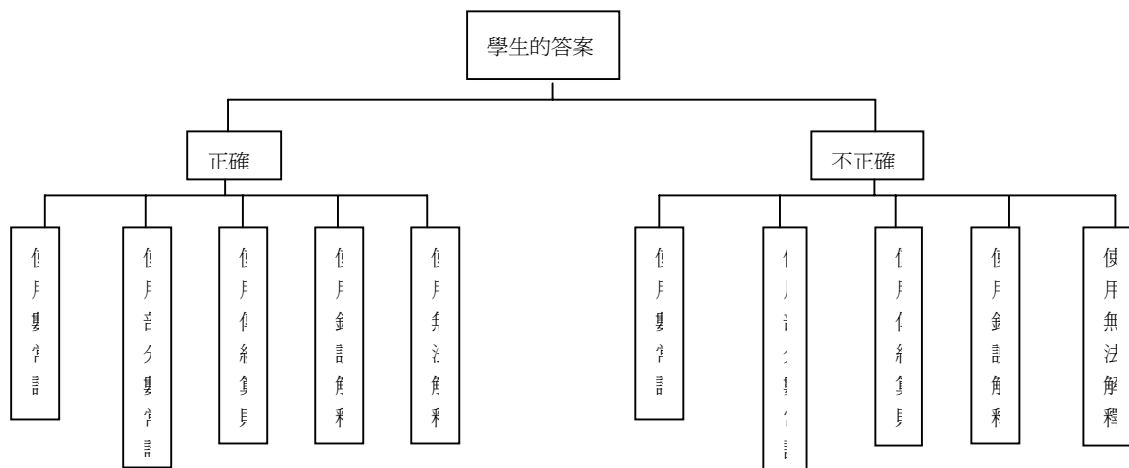


圖 1 本研究之解題策略歸類架構

四、研究結果與分析

首先研究者綜合整理出受訪之小四學生在各組成成份之解題策略次數 (表 2)。從表 2 可發現，小四學生在生活情境文字題使用數常識方法的次數 (41 次) 幾乎接近全部解題次數 (90 次) 的一半，但是為了深入瞭解小四學生在不同之生活情境文字題的數常識表現，於是進一步分析學生在五個數常識組成成份之解題表現。

表 2 小四學生在各組成成分解題策略次數表

組成成分	了解數字的 基本意義字			能比較數 大小			數字的合成 與分解			參考點 的使用			發展多元策略 並能判斷合理性			總次數 18x5=90
	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18	n=18			
學生程度	高	中	低	高	中	低	高	中	低	高	中	低	高	中	低	次數
<b>正確</b>																
數常識	6	3	2	6	2	0	4	1	0	5	4	3	2	2	1	41
部分數常識	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	7
傳統算則	0	0	0	0	0	0	2	3	4	0	0	0	1	2	1	13
錯誤解釋	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	4
無法解釋	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	4
<b>不正確</b>																
數常識	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
部分數常識	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	3
傳統算則	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
錯誤解釋	0	0	1	0	2	6	0	1	1	0	1	1	1	1	1	16
無法解釋	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2

註：n=18：每一組組成成份皆有高、中、低程度學生 6 人作答，而每一組成成份皆有 3 題，因此在每一組成成份之解題次數共有 18 次。總次數 18x5=90：6 位受訪者在五個組成成份之解題總次數。

以下將分別進一步探討小四受訪學生在五個數常識組成成份之表現概況：

(一) 了解數字的基本意義向度：受訪者在此向度上使用數常識方法的次數 (11 次) 佔了全部次數 (18 次) 的一半，表現的不錯。但是對於問題十一的表現較不理想，從訪談資料中發現雖然他們可以依據題意利用圖形來解題，但是當單位量不為 1 時，學生對其選擇的答案之信心顯得不夠堅定。原案如下：

題目：小新、風間和妮妮一起去公園野餐，他們買了兩個大小相同的披薩，三個人一起平分二個披薩。下列敘述何者是合理的？

L2: 因為一個披薩分成三等分，3 加 3 等於 6，每人一個可以吃到兩份 2x6 等於??

T: 你畫圖好了，我不懂你再講什麼？

L2: 這樣給一個人 (兩小塊)，就給一個人就可以分完。

T: 你怎麼知道一個人可以吃到  $\frac{2}{3}$ ，因為我看到你共畫了六塊阿！

L2: .....

T:  $\frac{2}{3}$  怎麼來的？

L2: 畫圖用看的。

T: 可是這裡有六塊啊！

L2: .....

T 那答案是多少？

L2:  $\frac{2}{6}$ 。

學生 L2 利用畫圖方式進行解說，表示將每個披薩均分成三等份共可以得到六塊，平分給三位小朋友吃所以每個人皆可得到兩塊，因此每一個人是吃了  $\frac{2}{3}$  個披薩。但是研究者認為 L2 可能並未具備有正確的單位量概念因此繼續追問，結果 L2 對於原先選擇的答案也產生了動搖並改為  $\frac{2}{6}$ ，因此 L2 單位量概念不完備。

(二) 比較數字大小：受訪者在此向度上使用錯誤解釋來解題的次數(9次)佔此成份解題次數的一半，顯示學生在比較大小之向度仍待加強。但是，仔細觀看題目，在此成份題目中有兩題是屬於分數比較大小的問題，而從其訪談結果發現受訪者中，中、低程度學生對於分數概念有著極大的迷思，例如：缺乏部分與整體的關係、單位量的概念等等，因此無法進行分數大小的比較。研究者從整個訪談過程中深深的體驗到，國內學生對於分數問題的解題思考歷程過於僵化。例如：

不要用紙筆計算。媽媽買了一盒蛋糕慶祝姐姐的生日，小新吃了  $\frac{1}{3}$  盒，小葵吃了  $\frac{1}{4}$  盒，

誰吃的比較多？ ①小新 ②小葵

T: 誰吃的比較多？

M2: 小新。

T: 為什麼？

M2: 因為把一個蛋糕分成越少等份的話，一塊就會越大。小新是分成三塊拿其中的一塊，小葵是分成四塊拿其中一塊，但是分成越多等份的一塊就會越少，所以小新吃的比較多。

T: 還有別的方法嗎？

M2: 畫圖。(圖 2)



圖 2 M2 對  $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$  的圖形表徵

(三) 數字的合成與分解：小四學生在此向度上使用傳統算則方法的次數(9次)佔了全部次數的一半，顯示小四學生對於數字的合成與分解能力尚需加強。孩子對數字的思考受到課堂上制式化的影響太深，他們習慣於利用紙筆計算出結果，以致於當研究者的要求與平時不同時，他們會自動忽略或直接要求，因為他們認為這樣是最簡便、快速的，然而這樣對他們在數字的思考上並不是非常好的現象，因此我們的教學應該要有更大的空間，讓學生更廣闊的思考、學習更多元的方式。例如：

題目：不用紙筆計算。百貨公司大特賣，遙控汽車一輛特價 496 元，小新想買 7 輛相同的遙控器車，大概需要多少錢？

T： 答案是多少？

H1： 4000。

T： 你怎麼知道？

H1： 因為四七二十八已經是八百了，九十六再乘以七大概一千多，所以大概合起來是 4000 元。

T： 那還有別的方法嗎？

H1： 496 乘以 7（紙筆計算）。

T： 答案是？

H1： 接近 4000。

（四）使用參考點的能力：小四學生在此成份使用數常識方法的次數（12 次）佔了此向度總次數的  $\frac{2}{3}$ ，表示學生使用參考點解決問題的能力還不錯，但是深入探討發現使用參考點解題策略之題目主要在以圖形為基準的生活情境文字題。但是學生對於使用分數  $\frac{1}{2}$  作為參考點的使用能力卻尚不足，而其原因可能是參考點的教學是國內課程一直所缺乏的，而且又須多以第三個數字作為判別的依據更是困難。例如：  
題目（以圖形為基準）：大雄把他撲滿裡的十元硬幣疊成高高的一堆。請你幫大雄數數看他已經存了多少個十元硬幣？（如右圖）

T： 有幾個硬幣？

M2： 100 個。

T： 你怎麼知道？

M2： 因為這樣子是 10 個（只著較矮的那一堆硬幣），就一直疊疊疊……跌的跟它（較高的一堆）一樣高的話，所以就是 100 個。

T： 你量了幾次？

M2： 10 次。



（五）發展多元策略並能判斷結果的合理性：小四學生在本成份使用數常識的次數（5 次）佔此成份總次數（18 次）不到  $\frac{1}{3}$ 。雖然學生在此成份之表現不甚理想，特別是遇到需使用估算測略進行計算時，受訪者卻顯得不夠熟悉，而必須經過紙筆計算檢驗之後才能對所得的結果安心，而這表示學生受到算則的桎梏，甚少有思考運算過程對數字的意義影響的機會。

H2： 我可不可用算的。

T： 那如果先不用紙筆呢？

H2： 大概 3000 元。

T： 你怎麼找到的

H2： 先用乘的。(用手指在桌上做計算珠心算)

T： 為什麼要用乘的

H2： 因為大雄是 597 元，阿福是大雄的四倍所以是  $597 \times 4 = 2388$ ，再加上大雄的錢就是 2985 元。

## 五、結論

數常識強調實際生活問題的解決，計算不應該脫離情境而存在 (Hope, 1989)。生活情境文字題的運用，不僅能誘發學生使用多元的表徵方式進行解題，進而能使用常識策略幫助其解題。本研究中，小四學生在生活情境文字題使用數常識解題策略的次數佔了將近全部次數的一半，亦即，透過生活情境文字題，可以鼓勵小四學生使用數常識策略進行解題。再者，使用部分數常識方法進行解題之次數也佔了全部次數的九分之一，顯示有些小四學生並非完全不具備數常識能力，但可能是發展尚未純熟，因此無法以有效的方法解題，而這也應證了 Reys (1989) 所指出的：數常識並非一個分離、不連續的離散量，所以我們不能說某人會沒有數常識；相反的，數常識是一個連續量，能被劃分成不同的層級，而且這些曾及透過新經驗的累積及更高層次的理解有不斷擴張的潛能。對學生而言，取自生活的教學素材較能切合其認知基模，將有助於發展有意義的解題策略，透過與情境的相互作用下，對知識不斷賦予意義的過程，因此只要數學的內容與情境相結合，學生便能從中了解數學技能與日常生活中的脈絡關係。

此外，結果亦顯示中、低程度學生之分數概念有較明顯的迷思 (例如：單位量的不確定、受整數法則影響等等)。令人驚奇的是，一向是我國課程內最為缺乏的部份「參考點的使用」卻是本研究中學生使用數常識解題策略次數最高的向度，此結果與先前之相關研究 (Reys & Yang, 1998; Yang, 2003) 不一致，這是否意味著學童在生活情境問題情形下較易使用參考點或本訪談問題單較易促使兒童使用參考點，需進一步探討。透過學生所熟悉之生活情境進行佈題，或許可為一個好的開端。

### 主要參考文獻

- Lesh, R., & Lamon, S. J.(Eds.).(1992). *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J., & Farrel, B. (1997). *Number Sense in School Mathematics: Student Performance in Four Countries*, Mathematics, Science, & Technology Education Centre, Edith Cowan University.