# 國小五年級學童分數表徵教學之研究

張熙明　　楊德清
彰化縣立曉陽國小　　國立嘉義大學數學教育研究所
syesadmin@gmail.com　　dcyang@mail.ncyu.edu.tw

## 摘　要

本研究之主要目的在探究國小五年級學童於教學前後分數表徵之迷思概念的改變情形。因此，本研究採便利取樣方式選取研究者任教之彰化縣某國小五年某班學生(26人)為樣本參與本研究。研究結果顯示：

一、教學前、後的紙筆測驗成績經由SPSS之t檢定結果達顯著水準（$\alpha$＜.01），此顯示將多重表徵方式融入分數教學活動後，學生的分數表徵迷思概念有顯著的改變。

二、受訪學生在「比較分數大小時，忽略單位量要一致」、「對分數詞意義的不瞭解」以及「等值分數的概念」等方面有長足的進步，顯示將表徵融入教學中的確有助於學生分數概念之學習。但是低程度學生分數概念仍不穩固，未來有待更多之研究以協助低程度學生之學習。

關鍵詞：分數、表徵、國小五年級

## 一、研究動機與目的

Dreyfus 和 Eisinberg (1996)認為能夠根據問題情境，彈性的運用適當的數學表徵，如具體操作的、圖表的、符號的…等等具體或抽象的方式，並且在單獨的表徵系統之內以及各個表徵系統之間靈活的轉換，是發展數學思考和培養解決問題能力的基本要素。也就是說數學表徵在數學學習的過程當中佔有相當重要的地位。但是，許多表徵之相關研究(林碧珍，1990；黃芳玉，2003； Brenner, Herman, Ho, & Zimmer, 1999; Cramer, Post, & delMas, 2002; Lesh, Post, & Behr, 1987)結果顯示許多兒童缺乏表徵的能力。黃芳玉（2003）的研究也進一步的發現國小六年級學生的表徵能力並不會伴隨著計算能力的成長而發展。

此外，分數概念在國小階段數學領域的學習中是基本且相當重要的概念之一，而且與小數、比、百分率等數學概念關係密切。但由於分數概念有多種不同的使用情境與解釋，因而學習分數對兒童而言是較困難的。一些分數學習的研究（Kerslake, 1986; Murray, Oliver & Human, 1996）指出學生常出現的錯誤類型如：缺乏等分概念、只注意分子或分母，忽略單位量大小或分數概念不完備等。然而，就實際課室教學的經驗來說，研究者認為師生溝通的表徵形式與表現和學生的分數學習之間有相互影響的關係。因此，本研究之研究目的為探討小五學童在教學前後之分數表徵紙筆測驗迷思概念的改變情形。

## 二、文獻探討

### (一) 數學表徵的意義

數學表徵乃是指學習者在學習數學知識的過程中，透過各種不同的方式(如具體物表徵、圖像表徵、口語表徵或抽象符號表徵等)內化知識，並藉由上述之方式呈現個體之想法與解法(NCTM, 2000)。基於此，本研究將「分數表徵」定義為「分數學習過程中，思考、解釋接收到的訊息，並用以表達思考結果的呈現，以及和他人溝通的重要工具。」

(二) 分數表徵的相關研究

許多學者(Brenner, et al., 1999; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Fennell & Rowan, 2001)指出，善用多樣化的表徵形式，例如圖形、操作具體物、或是寫出數學方程式…等，將有助於學生組織思考以及分析問題的呈現。Cramer, Post 和 delMas (2002)的研究指出將具體物的表徵模式融入教學中能夠有效的協助孩子發展正確的分數概念與比較分數大小之能力。Willis和Fuson(1988)教導國小二年級的學生利用圖形表徵的方式來解決加與減的文字問題，研究發現圖形表徵能夠提昇學生的數學學習表現。一般認為「圖形表徵」以及「具體物表徵」與被表徵的實物之間相似性較高，而且這兩種表徵形式的意義也較容易掌握（蔣治邦，1994；許良榮，1996），因而成為國小學習階段不可或缺的表徵形式。許多研究與報告(Cramer, Post,& delMas, 2002; Dreyfus & Eisenberg, 1996; Fennell & Rowan, 2001; NCTM, 2000)亦指出具體物的表徵以及圖形表徵是發展抽象符號表徵的橋樑。而根據研究者本身多年的教學經驗亦發現這兩者的重要性。

許多研究進一步(Brenner et al., 1999; Moss & Case, 1999; Empson, 2002; Cramer & Henry, 2002; Cramer et al., 2002)強調：教師應該在教學中多運用、融合不同的表徵型態。因為，一個數學概念有許多種的表徵方式，可以做為理解和傳達過程中的媒介，而這些表徵之間是相互關連，且可以加以轉換的。能夠利用多重表徵來表達同一個概念；或是在表徵之間轉譯；甚至懂得如何選擇適合的表徵來協助解題，都表示擁有更穩固的概念理解。教師如果能夠善用各種表徵方式，運用多重表徵融入分數教學，同時也鼓勵學生利用各種表徵方式表達自己的想法，對於分數學習的成效是很有幫助的。因此，本研究將從表徵的觀點，將具體物的表徵以及圖形表徵融入分數單元之教學中，以探究其成效。

## 三、研究方法

(一) 研究法

本研究採量化和質化之並行方式，進行資料的收集、處理與分析，量化部份針對紙筆測驗的結果進行分析，而在質化情境中，採半結構式晤談法以深入了解受訪者在教學前後之分數概念的改變情形。

(二) 研究樣本

本研究採便利取樣方式，選取研究者任教之五年某班學生為研究樣本，該班學生人數為 26 人，家長社經背景屬中下，教育程度以高中職居多，大多從事勞動工作。本研究先對任教班級之五年級學生共 26 名，以分數概念測驗卷施測，再依測驗分數分成高（前 33%）、中（34%~66%）、低（後 34%）三階段，並從各階段隨機挑選 3 位學生，共 9 人接受訪談。

(三) 研究工具

1.　前、後測驗之工具

本研究所使用的分數概念測驗卷的內容，主要依據九年一貫課程數學領域暫行綱要四年級能力指標中分數概念部分，並參考黃芳玉（2003）及洪素敏（2004）所設計的測驗題目，同時參考相關之研究文獻和課程中所蒐集的測驗問題加以修正。題目設計完成後，和數學教育專家、有經驗的教師共同檢視，使其具有專家效度。修訂後先進行預試，經過分析修訂，使其具有內容效度。在信度方面則是採用Cronbach α係數來分析分數概念測驗的信度，其結果顯示Cronbach α係數為.7806，顯示測驗工具有內部一致性。測驗內容共有24題，所涵蓋的內容如表1所列四類：A－瞭解分數詞的意義（六題）、B－比較分數的大小（四題）、C－分數的運算（十題）、D－等值分數（四題）。

表 1

*分數概念測驗內容分析表*

| 類別 | 分數概念 | 題數 | 題號 |
|---|---|---|---|
| （A） | 瞭解分數詞的意義 | 6 | 1，7，8，13，14，15 |
| （B） | 比較分數的大小 | 4 | 4，9，10，17 |
| （C） | 分數的運算 | 10 | 2，5，12，18，19，20，21，22，23，24 |
| （D） | 等值分數 | 4 | 3，6，11，16 |

藉由教學前之紙筆測驗結果，做為瞭解學生分數表徵迷思概念的情形並篩選訪談對象之依據，而教學後的紙筆測驗結果則當作師生教與學的評定資料之一，以瞭解學生學習後分數表徵的改變情形。

2. 訪談之工具

教學前、後之訪談問題相同，由於研究者為深入了解學生之分數概念的真正迷思原因為何，因此訪談問題之選取乃依據紙筆測驗之結果，選取答對率最差的後七題為訪談問題，以釐清學生真正的想法，確認受訪學生之迷思概念。

## 四、研究結果與討論

### (一) 紙筆測驗之結果

表2報告教學前、後紙筆測驗之t檢定結果，資料顯示：t值＝－12.183，α=.01，達顯著水準，顯示學生經過分數表徵教學後，分數表徵迷思概念已經有了明顯的改善。

表 2

*教學前、後學生的紙筆測驗成績T檢定摘要表*

| | 平均數 | 個數 | 標準差 | 標準誤 | t 值 | 相關 | 顯著性 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 教學前測 | 11.9615 | 26 | 4.6689 | .9156 | -12.183 | .826 | .000 |
| 教學後測 | 18.6154 | 26 | 4.7672 | .9349 | | | |

註 1：α＝.01　註 2：測驗總分＝24

教學前、後樣本學生在分數表徵迷思概念的改變分述如下：

1. 單位量概念之改變

教學前，學生在比較分數大小時，會出現以分子或分母的數字大小來判定答案的情

況，而沒有考慮到其間單位量不一致時，分數的比較是沒有意義的。此外，對於圖形表徵是以陰影和空白的二分法來區分分子或分母，並未考慮分子與分母的相互關係，先確認單位量後再考慮部分與全體之間關係以決定分數之大小。教學後，除了少數低程度學生以外，大多數學生比較分數時，能先確認單位量後再考慮部分與全體之間關係以決定分數之大小。

2. 等分概念之改變

教學前，學生在例行性的分數符號表徵題中能夠很容易地選出正確的答案，但是稍具變化的分數圖形表徵中，卻又忽略了等分的因素，而沒有注意到每一個分割是否相等。教學後，大部分學生能注意到分數的每一個分割是否相等，甚至清楚地以口語表徵回答「等分」、「平分」與「公平」，顯示學生的等分概念已有進步。

3. 將分數 $\frac{a}{b}$ 視為分數數線上的一個數值之改變

教學前，許多學生未將分數視為數線上的一個數，以致於無法在數線上找到正確的分數位置。因此在進行與分數相關問題的解題活動時，如處理離散量之分數問題、尋找等值分數或比較分數大小時，便有相關之錯誤想法產生。教學後，除了中高程度學生能瞭解並且將分數視為數線上的一個數以外，大部分低程度學生仍然無法把分數 $\frac{a}{b}$ 看成數線上的一個數值。

4. 分數詞的意義與內涵之改變

教學前，部分學生並未真正的了解分數詞的意義或具有上述的分數表徵迷思概念，因此當進入抽象符號的分數運算時，不知道分數也可以做合成與分解，而以錯誤的方式考慮分子與分母而將分子、分母當成個別的數字去進行運算或是直接將給定的關鍵數值做合成或分解，就會有錯誤的答案產生。教學後，大部分學生除了能同時考慮分數中分子與分母的關係以外，也能夠善用多重表徵進行分數的合成與分解，顯示讓學生能夠真正的釐清分數的內涵與意義，以及它與單位量的關係，有助於進行有意義的分數抽象符號運算。

(二) 訪談結果

表 3 呈現受訪學生在教學前、後分數表徵概念的轉變情形，分析如下：

表 3

九位受訪學生在前、後測訪談的答題情形

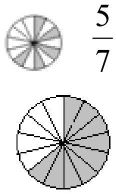
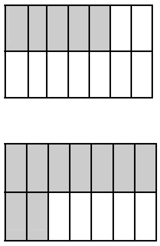
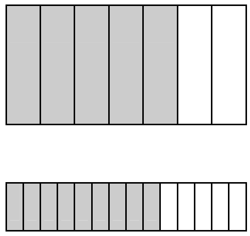
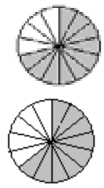
| | 高分組 | | | 中分組 | | | 低分組 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答對題數 | 小璉 | 小翰 | 小毅 | 小蓁 | 小寧 | 小雅 | 小宇 | 小盛 | 小昇 |
| 教學前 | 6 | 3 | 3 | 1 | 0 | 2 | 3 | 1 | 1 |
| 教學後 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 5 |

表 3 之結果顯示受訪學生在教學後皆有相當顯著之進步。為了進一步探討學生之改變，以下分析受訪學生在第一題(表 4)與第三題（表五）之受訪結果為例：

1.　第一題：下列哪一個圖形最適合用來說明 $\frac{5}{7}$ 和 $\frac{9}{14}$ 哪一個分數比較大？

表 4

第一題 前後測答題結果比較

| 選項 | 1 | 2 | 3 | ＊4 |
|---|---|---|---|---|
| 答題類型 |  $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$ |  $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$ |  $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$ |  $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$ |
| 前測選擇者 | 小盛 | 小翰、小蓁、小寧、小雅 | 小毅、小昇 | 小宇、小璉 |
| 後測選擇者 | | 小昇 | | 小翰、小毅、小宇、小盛、小蓁、小寧、小璉、小雅 |

教學前，受訪學生大致有以下二種迷思概念：

(1)　比較大小時忽略單位量要一致：

部分學生並未發覺到不同的單位量是無法直接作比較，例如：小盛、小毅「**這一個是 5/7，這一個是 9/14**」；小昇「**因為一個長條有 7 格，裡面有 5 格（等於 5/7）；另一個長條有 14 格，裡面有 9 格（等於 9/14）**」，顯示小盛、小昇犯了當比較分數大小時，單位量要一致才有意義的迷思概念。

此外，有些學生會隨意更改單位量，只選擇他想看的部分，例如：小翰「**我以為這邊上下都是 7 塊，這邊是 5 塊，只有看上面那一排**」。

(2)　等值分數概念不完備：

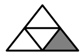
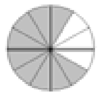
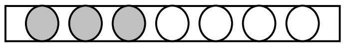
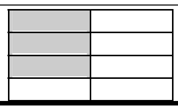
不知道當分母乘以 2 倍時，分子也要同時乘以 2，其分數值才不會改變，例如：小寧「這裡 5/7，1、2、3、4、5，這裡 9/14，有 1、2、…、8、9」；小蓁、小雅「因為 5/7 這裡有 14 個和 9/14 這裡也有 14 個，我以為一樣大了」，都顯示出不具備正確的等值分數概念。

但是教學後，原來提供錯誤選項的七位學生中有六位已修正原先錯誤的概念。例如小翰教學後已修正為「**我看錯了，我以為上面也是一樣大，沒想到只有 5 塊。應該是圓形的才對，兩塊一等份，5/7 這個剛好是七等份**」；而小寧教學後修正為「**這個 5/7（指選項 2）切了 14 塊卻只有 5 塊，兩塊一份的話，應該是切了 14 塊有 10 塊。所以是（4），5/7 切了 14 塊有 10 塊**」，顯示他們能注意到等值分數的概念：當分母乘以 2 倍時，分子也要同時乘以 2。僅剩下小昇依舊認為「**上下都一樣大，這裡有 5 個，這裡有 9 個**」，顯示小昇等值分數的概念不完備的情形仍然存在。

2.　第三題：下列哪一個圖形的斜線部分最能夠代表 $\frac{3}{4}$ 的意思？

表 5

第三題 前後測答題結果比較

| 選項 | 答題類型 | 前測選擇者 | 後測選擇者 |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 小翰 | |
| ＊2 |  | 小毅、小璉 | 小翰、小毅、小宇、小盛、小昇、小蓁、小璉、小寧、小雅 |
| 3 |  | 小昇 | |
| 4 |  | 小宇、小盛、小蓁、小寧、小雅 | |

教學前，受訪學生大致有以下兩種迷思概念：

(1) 分數概念不清楚（對分數詞意義的不瞭解）：

有些學生仍會單就圖形的顏色定義分子或分母，例如：小翰「**我看的時候有三角形四等份，三個白色一樣大的，就直接選 1 了**」；選擇錯誤選項（3）的學生回答：小昇「**這裡有四個白色，三個黑色的，我以為是 $\frac{3}{4}$**」；選擇錯誤選項（4）的學生：小盛、小宇「**因為一排有 4 塊，黑色的有三個都一樣**」，顯示他們的分數概念不清楚。

(2) 尚未具備等值分數的概念：

由於不瞭解等值分數的意義，因此當要求學生使用圖形表徵 $\frac{3}{4}$ 之等值分數時，部分受訪學生只能依分子之數值（3）選出選項出現陰影部份為三等份之圖形。例如：小蓁、小寧、小雅「**我以為左右都是四塊，有三塊黑色**」，這些皆顯示出不具有正確的等值分數概念。

而答對的學生是這樣解釋的：小毅、小璉「**這裡總共有 12 塊，分成四份剛好每份有 3 塊，黑色有 9 塊剛好 3 份**」，顯示兩位高分組學生在教學前已具有清楚的等分想法與等值分數概念。

教學後九位受訪學生均答對，原來答錯的學生想法已有了改變，例如：小宇「**這裡可以分成四等份，黑色的剛好有三份**」；小昇「**我把它切成四等分，一份有 3 塊，黑色有三份，所以是 $\frac{3}{4}$**」；小寧、小雅「**因為這裡有 12 塊，它說要 $\frac{3}{4}$，所以就把它”三個一份”，然後就有四份，黑色的有三份，所以是 $\frac{3}{4}$**」，從訪談結果顯示學生除了能理解部分與全體單位量之間關係以外，也已具有等值分數的概念。

## 五、結論

教學前、後的紙筆測驗成績經由 SPSS 之 t 檢定結果達顯著水準（$\alpha<.01$），此顯示將多重表徵方式融入分數教學活動後，學生的分數表徵迷思概念有顯著的改變。同時受訪學生在「比較分數大小時，忽略單位量要一致」、「對分數詞意義的不瞭解」以及「等

值分數的概念」等方面有長足的進步，顯示將表徵融入教學中的確有助於學生分數概念之學習。因此，教師在進行分數教學時不應該只是偏重算則與解題程序，而是應該同時強調學生的思考與理解能力之發展，並且能夠善用多重表徵的教學方式，像是圖表、具體物、抽象符號…等等，來幫助學生從各種不同的角度來意義化問題情境，以及建立各個表徵之間的連結。

同時，教師也應注意到學生雖然能夠答出正確答案，並不能代表他能夠真正理解題目的意義。教師可以多鼓勵學生去思考問題背後的真正涵意，並且引導學生能夠進一步去解釋與說明自己的做法與想法。如此一來，不僅幫助教師瞭解學生概念發展的情形，更能讓學生對問題「知其然，更深知其所以然」！

## 主要參考文獻

黃芳玉（2003）。*國小六年級學生數學表徵能力與計算能力之研究*。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文（未出版）。

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. Z. & Zimmer, J. M. (1999). Cross-National Comparison of Representational Competence. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(5)**,** 541-547.

Cramer K. A., Post T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(2)*, 111-144.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in teaching and learning of mathematics* (pp.41-58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.