

數學建模融入課程設計---『週期函數的建模』

林信安、陳嘯虎、繆友勇

台北市立建國高級中學

lha0314@ms13.hinet.net 、small.huu@msa.hinet.net

myy@tp.edu.tw

摘 要

觀察生活周遭的許多現象或長期觀察日月星辰的變化，像是家用瓦斯的費用、摩天輪的運動狀態、月亮盈虧的比例、太陽升起與落下的時間、某地一年四季氣溫的變化等。本課程設計的目的，是希望學生經由觀察、測量與蒐集前述現象的資料，然後引導學生建立數學模型來描述這些現象，並且能夠詮釋數學模型的適當性。

課程設計的內容從週期現象資料的蒐集、整理開始，根據學生的先期知識，先尋找適當的多項式函數來擬合資料，引發學生討論多項式函數擬合資料合適性，最後引進正弦函數來擬合資料，最後引導學生詮釋數學模型的適當性，使得學生能更了解正弦函數的特性與應用。

關鍵詞：三角函數、數學建模、數學建模融入高中課程

一、前言：

觀察生活周遭或長期觀察日月星辰的變化，常常可以發現許多現象每隔一段時間會重複出現。像是潮汐的變化，太陽升起與落下的時間，一年四季氣溫的變化，家中瓦斯的度數等。在這些週而復始的現象中，隱藏著各種數量間的關係，如何透過建立數學模型進行有效的研究，並且經由此模型來考察過去的演變，以及預測未來可能發生的變化。

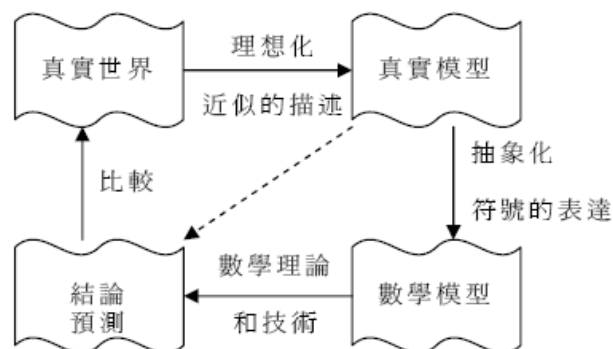
通常探討各種變化量之間的關係，是從分析整理數據開始的，將這些資料以圖表的方式呈現（此為函數的一種表徵），這樣就可以較容易分析各種數據之間的表現趨勢。接下來，利用數學知識去建立一種或多種的函數來擬合數據。換句話說，我們利用數學知識建立了數學模型來描述變量間的關係，建立了數學模型之後，更重要的是分析比較這些模型的優缺點，最後如果順利的話就可以使用一個較合適的數學模型來描述或預測這些週而復始的現象。

二、理論基礎：

數學建模概念與課程有別於以往的傳統數學課程，我們將從數學建模歷程與建模活動、數學建模融入高中課程、週期函數與三角函數等三部分來探討。

(一)、數學建模歷程與建模活動

在數學建模歷程方面，王明慧、柳賢、洪振方(2005)在「高一學生在解題歷程中的數學建模之分析」一文中指出Maki和Thompson(1973)用下圖來表達整個數學建模的歷程，歷程分成真實世界、真實模型、數學模型和結論預測等四個部份。



在建模活動方面，林福來、楊凱琳、陳嘯虎、呂又寧(2002)的研究中指出形成研究和發展建模活動必須探索的研究問題如下：1.如何設計恰當的建模活動？2.教師如何實作建模活動教學？3.在建模活動中，學習者是如何建構知識和發展數學能力？4.教師應如何支撐學生發展建模能力？

(二)、數學建模融入高中課程：

楊凱琳(2008)專題演講「如何運用建模觀點來發展高中數學課程」中曾提到，課程設計的模式有目標模式(objectives model)的課程設計、歷程(process model)模式的課程設計與情境模式(situation model)的課程設計三種。1.目標模式的特色為：(1)折衷的課程立場(2)精粹主義、經驗主義、社會行為主義、科技主義。(3)合理的慎思探討架構(4)三大來源(學生、社會、學科)、兩大過濾網(教育哲學、學習心理學)(5)系統性的課程設計步驟(6)邏輯、系統、理性。2.歷程模式課程設計原則為：(1)允許學習者作明智的選擇(2)給予學生主動的角色能使學生接觸具體的事物(3)課堂中，學生應處理具爭議性的問題(4)教師不應運用其權威(5)以討論作為探究的方式(6)尊重參與者意見的分歧(7)教師是引導者而不是教導者。3.情境模式，又稱情境分析模式或文化分析模式，以個別學校及其教師作為課程發展的焦點，其課程設計的特色為：從文化選擇的角度來詮釋課程與進行選擇社會文化素材的決定。

(三)周期函數與三角函數：

Moderling our World(P382~495)一書中的第四冊單元六曾利用一些日常生活可以觀察到的現象，例如：美東地區日升日落時間、華盛頓地區月暈的百分比來介紹週期現象；觀察摩天輪中某個位置到地面的高度，建立時間對高度的函數，並討論這個函數的週期；觀察腳踏車的運動，建立時間與車輪上固定點到地面高度的函數，利用二次函數來描述這個週期函數，並且討論這個函數是否適合用二次函數來擬合。

三、研究設計：

本課程設計的教學目標如下：1.學會觀察各數據之間的關係。2.學會理解並簡化實際問題。3.引導學生建立數學模型來描述週期函數。4.學生能驗證數學模型的準確性、合理性和適用性。5.學生能適度修正數學模型。

為達到教學目標，學生必須具備的先前知識如下：1.熟悉函數的定義。2.熟悉多項式函數與其圖形。3.熟悉圓弧長的計算。4.Excel 軟體的基本操作。

四、課程實施過程：

(一) 本次課程實際實施的時間為 98 年 5 月 18 日星期一第一、二節課。實施班級為本校高一十班的學生。地點為：建國中學數學電腦實驗教室。

(二) 課程實施步驟簡介：

1. 教室上課前進行--『前測』。
2. 教室上課第一階段--『課程實施簡介』。
3. 教室上課第二階段--『資料的整理、繪圖與練習』，詳細教材內容請見附錄一。
4. 教室上課第三階段--『週期現象的討論與練習』，詳細教材內容請見附錄二。
5. 教室上課第四階段--『三角函數的建模』，詳細教材內容請見附錄三。
6. 回家作業，詳細教材內容請見附錄四。
7. 教室上課後--『後測』。

五、研究結果：

(一) 前測：請受測學生用數字(-5~+5)的強度來表示對題目同意的強度，其中-5表示非常反對;5表示非常贊成。部份題目數字的選項的平均如下表：

前 測 題 目	平均分數
在數學課程後我對自己的數學解題能力感到滿意	2.28
在數學課程後我對自己的數學思考能力感到滿意	1.40
在數學課程後我對自己會使用數學軟體感到滿意	-0.91
在數學課程後我認為我對許多數學問題有濃厚的興趣	1.79
在數學課我面對數學問題時能讓我察覺問題或情境的規則性	2.40
在數學課我面對數學問題時能讓我從多重面向的觀點來思考	2.72

(二) 後測：仍然用數字(-5~+5)的強度來表示對題目同意的強度。部份題目數字的選項的平均如下表：

後 測 題 目	平均分數
在建模專題課程後我對自己的數學解題能力感到滿意	2.32
在建模專題課程後我對自己的數學思考能力感到滿意	2.95

在建模專題課程後我對自己會使用數學軟體感到滿意	2.79
在建模專題課程後我認為我對許多數學問題有濃厚的興趣	2.53
在數學建模課我面對數學問題時能讓我察覺問題或情境的規則性	2.97
在數學建模課我面對數學問題時能讓我從多重面向的觀點來思考	2.84

(三) 學生回饋：部分學生學習心得如下表：

<p>11002：</p> <p>對於這次的課程，我收穫良多，數學，不再只是課本所教的，這門課程打破了章節的限制，學習到未曾見過的東西，如果還有下次，一定會參與！</p>
<p>11004：</p> <p>其實「建模」這個東西我一直以來，是一點概念也沒有的，上完這個課，我大概瞭解到，用圖形函數去分析一組數據的方便，雖然不是每次都適用，但是對於這個資訊化的時代而言，在大部分的學術研究裡，數據就代表著重要的地位，而若能在一個已知有規律的現象中，用已知的數據去推斷未知的數據，便可去掉不少對於未來的徬徨，是研究學問的重要工具之一。</p> <p>雖然知道理論，也知道這些學習的意義，但是實際學習起來仍然是有難度的，平常的我們，電腦的功用只有網誌、遊戲、查資料、打字等等，從來不知道可以用大家熟知的 Excel 來做這麼多令人難以想像到的事情，包括可以在輸入數據之後，找出圖形和公式，這是最令我驚豔的，在做作業的同時，真的動了不少的腦筋去思考，也不停的在試驗 Excel 的功能，這與過去的數學課是截然不同的！至少這一點我是可以確定的。</p>
<p>11014：</p> <p>這是我這一生上過最特別的一堂數學課，沒有黑板、教科書、惱人的計算、繁雜的公式，在這堂課裡，老師只教我們一件事，找出你平凡生活中的不平凡，然後藉由觀察、剖析，達到學生學習的目的。</p> <p>每日升起落下的太陽，早已被視為理所當然，卻鮮少有人想過去親自計算它的規律，在上課的過程中，我不僅學習到了平常較少使用的 Microsoft-Excel，更重要的是，我學習到了在面對一筆龐大的資料時，如何冷靜的用自己過去所學來分析它、觀察它，並且培養思考的能力，不再只是單方面盲目的接收知識，老師風趣的上課風格、同學互相發問、探討問題的盛況，都是平時難以多得的經驗，如果有機會，我一定會想再次體驗這種課程！</p>
<p>11016：</p> <p>很高興能夠上到這門課程，讓我第一次使用到了 Microsoft 很多我以前從來不會用到的功能，第一次發現原來 Microsoft 可以做這麼多事。但是我覺得，這門課讓我學到最多的不是這樣而已，這門課問的問題都不會有固定的標準答案，所以讓我可以盡情的思考是否大家公認一致的答案是不是就是對的，因為跟現實生活合在一起的東西，本來就沒有一定的，數學也是要這樣，活的才有趣阿！</p>

六、結論：

(一) 課程效益：本課程實施經計畫小組討論後，認為課程的收穫如下：

1. 提供學生跨領域的多元思考空間：

數學的學習不只是學習課本的知識，它可以與其他領域作密切的結合。利用數學建模想法與數學軟體，可以考察過去的演變，以及預測未來的變化。

2. 課程內涵結合生活經驗：

人類生活上遇到的許多問題，經常需要使用數學方法來解決，例如：美地區月暈的比例、台北市日升日落時間與白晝的時間、摩天輪的運動、潮汐的變化、一年四季氣溫的變化與家中瓦斯的度數等。這些實際的問題都需要建立數學模型並使用數學方法來解決。本課程就提供了一個學習情境，使得學生透過數學建模的課程體驗了數學強大的功用。

3. 強化數學軟體與數學學習的連結：

學生體驗了利用數學軟體(如：MAPLE、GSP、CABRI 3D、EXCEL 等)處理數學建模課程中三角函數圖形的繪製、資料的整理與探討週期現象，不僅使得學習效果更顯著，並且強化了數學軟體與數學學習兩者的連接。

(二) 檢討與建議：針對這一次課程的實施，提出了一些檢討與建議如下：

1. 關於學生在資料整理部分：在範例中，引進美東地區月暈的比例與台北市日升日落時間與白晝的時間等資料，學生要懂得去利用數學軟體去整理資料，從上課與作業中可以知道學生對於軟體熟悉程度還要再加強；另一方面，這種從問題為導向的學習課程是一個全新的嘗試，故學生在開始學習時，學習速度比較慢，但經過半小時後與回家功課，我們發現學生再整理資料上有很大的進步。因此課程剛開始時，可以先舉一些實際生活的例子，再耐心的教導 EXCEL 軟體的使用，相信必能引發學生學習的動機。

2. 學生三角函數繪圖部分：少部分學生對於軟體繪圖的操作並不順手，應該可以先上一些關於軟體「EXCEL」、「GEOGEBRA」等簡易操作的課，讓同學在操作上比較上手，減少偵錯時間上的浪費。

3. 評估結合生活經驗內容的適用性：利用生活經驗當做課程內容，會打開學生的視野，讓學生了解數學與實際生活息息相關，也會增加學生學習的動機，但教師要去準備這些生活上的例子非常辛苦，尚需大家一起努力去尋找且一起分享。

4. 時間部分：由於本次課程為實驗性質，並不想花費學生太多正課的時，所以課程在進行時頗感時間緊湊，若配合作業部分，應可改為 5-6 節課會比較適當的課程時間。時間安排如下：第 1 小時：前測與數學軟體

教學；第2小時：數學軟體教學；第3小時：進行課堂上課--『週期函數的建模函數擬合課程實施簡介』與資料的整理、繪圖與練習』；第4小時：『週期現象的討論與練習』與『資料的擬合』；第5小時：『三角函數的建模』與總結；第6小時：回家作業檢討與後測。

七、致謝：

本計劃研究承蒙國家科學委員會的部分補助（NSC 96-2514-S-640-002-GJ），得以順利完成，特此致謝。

八、參考文獻：

林福來、楊凱琳、陳嘯虎、呂又寧(2004):數學建模活動協同行動研究〈透過數學建模活動培養高中生數學創造力〉，2004年第二屆創新與創造力研討會論文發表。

王明慧、柳賢、洪振方(2005):高一學生在解題歷程中的數學建模之分析，屏東教育大學學報第二時四期。

楊凱琳(2008)專題演講「如何運用建模觀點來發展高中數學課程」，2008年九月於建中發表。

Moderling our World : *Soloman Garfunkel, Landy Godbold, Henry Pollak*。

<http://home.educities.edu.tw/tongnank/index.html>

Wolfram MathWorld : <http://mathworld.wolfram.com/Calculus>

(Larson,Hostetler,Edwards,1998)

Kate's homepage : <http://web.cc.ntnu.edu.tw/~katepili/>