建模活動下五年級學生一般化算術到符號化的解題之研究

陳冠州[1]　　秦爾聰[2]
桃園縣建國國小[1]
國立彰化師範大學科學教育研究所[2]
e-mail：kuanjou2005@gmail.com

摘　要

本研究旨在探索數學建模活動下學生的代數學習。針對桃園縣某國小 32 位五年級學生進行三個月的教學與課室轉譯稿、學習單和學習日誌等資料蒐集，研究採用影像分析法（video analysis）做為資料處理與分析。研究發現：在引模活動中，學生能透過一般化知覺察覺基本樣式中的關鍵要素，並在探模活動中，以此做為一般化算術的基礎去表徵基本樣式，進而在修模活動裡，應用這些表徵解決視覺型的代數問題。研究中同時發現學生可透過有意義的情境，順利地以符號表示未知數並求出代數方程式的解。

關鍵詞：一般化算術、符號化、數學建模活動

壹、重要性與目的

環顧國內外在數學教育的改革與推展上都非常重視數學思考的啟迪。關於兒童數學思考的培育，九年一貫數學學習領域的教學總體目標裡以演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力為主（教育部，2005）。其中抽象能力所涉及的一般化算術（generalized arithmetic）到符號化（symbolization）的轉化更是代數思考重要的關鍵歷程（kieran, 1992, 2006）。為了讓學生數學的抽象能力得以落實，有其必要進一步探索學生在代數的表徵與解題表現。

許多實徵性研究指出，從一般化算術到符號化的代數學習過程，對兒童來說，乃是深具艱難與挑戰的（Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2001；Kieran, 1992；Krutetskii, 1976；Sfard, 1991；Terry, 2006； Williams,2000）。這顯示出代數學習在解決這些問題的對策上，需要採用一種系統化的教學與活動，以增益學生的代數解題能力（莊松潔，2005；陳嘉皇，2007）。因此，為了增益五年級學生的代數學習，並瞭解關於代數表徵與解題的歷程，本研究採用數學建模活動（modeling activity）做為因應的實務對策，回顧過去講述取向的數學課室活動，不僅較難促進兒童代數思考的學習，也不易協助研究者深入了解兒童代數解題歷程。因此，本研究將實施以學生為中心的建模活動，期使除了能提升兒童代數的學習外，同時了解其代數的解題途徑。據上，本研究的目的在透過建模活動的實施，了解五年級學生從一般化算術到符號化的解題表現。

貳、文獻探討

一、一般化算術與符號化

Kieran（1992）藉由探索算術到代數的過程，察覺算術與代數間存在著程序性（conceptual）與結構性（structural）運思的基本差異。以數字運算和文字運算來區分，算術屬於數字運算，也就是一般化算術的過程，而代數則是文字運算，也就是符號化過程。

從心智運思發展的研究來看，結構性運思仍須從程序性運思過渡而來，就此，Kieran 以 15－7＝8 和 3x＋y 且 x＝4，y＝5 來區分兩者之間的不同，並進一步以 3x＋y＋4x＝7x＋y 說明代數結構的本質。雖然 Kieran 認為結構性的運思須從結構性運思整體的意義加以解題才是代數概念學習的重點，但令人好奇的是，從程序性運思過渡結構性運思的過程究竟為何？ Sfard（1991）進一步表示學生若要順利從程序性運思發展到結構性運思，則需要歷經內化（interiorization）、濃縮化（condensation）和具體化（reification）三個階段。研究者以為這三個階段如同一般化算術轉化成符號的代數化的歷程。理由為，內化乃是學生對一般化算術意義理解的表現，進而能以文字或符號表徵一般化算術的理解，即所謂濃縮化的表現，最後學生能融合對一般化算術和符號化的理解，並將其應用在代數問題的解決上則是具體化的表現。而研究者亦透過上述的詮釋來探索五年級學生關於代數運思及其解題的表現。

二、建模活動

本研究主要以建模理論作為活動的設計原則與架構，目的在引發學生進行詮釋、表徵以及省思的建模取向解題歷程（Doerr & English, 2003; Lesh & Zawojewski, 2007），建模活動之所以重要，其原因除了是建模活動的數學化包含，數量化、空間測量化、座標化、類別化、代數化、以及將相關的對象關係活動模式和規則的系統化（Lesh & Doerr, 2003），涉及學科整合的建模活動將有助於代數概念的發展。研究中所謂建模活動係指學生任何成功解題模式或策略，而非只限定為關於數學化的模式。透過閱讀文章、預備問題、陳述問題和解題分享等過程分為引模(modeling-eliciting)、探模(modeling-exploring)和修模(modeling-adapting)三個子活動加以實施。引模活動主要在激勵學生參與是一種包含開放性（open-ended）、真實世界（real-world）以及需求導向（client-driven）的情境問題（Diefes-Dux, Moore, Zawojewski, Imbrie, & Follman, 2004）。其開放性意涵是指世界對人們來說，乃由個體自由主張的認定以及心智作用的結果。舉凡我們所處的環境，由於立場不同、角度不同、信念不同，透過這些差異以及心智運作，人們所建構的世界觀也會隨之不同。真實世界的事物對人們來說，再也自然不過了，和這些事物我們總有一些互動的經驗，於是在互動的歷程中會與個體的心智產生連結，進而提供思考與推理的經驗。最後，需求的意涵乃是透過活動的激勵，使得學生在情意或認知的基本需求被引動，同時讓學生更能投入活動的參與和解決問題上。研究即是基於這樣的主張來設計，並引導學生進行數學建模活動的探索。

參、研究方法

本研究目的在探索以兒童代數解題活動為主要的範疇，採取質性研究，經由影像分析法的詮釋分析兒童代數解題歷程。

一、活動內容與教學模式

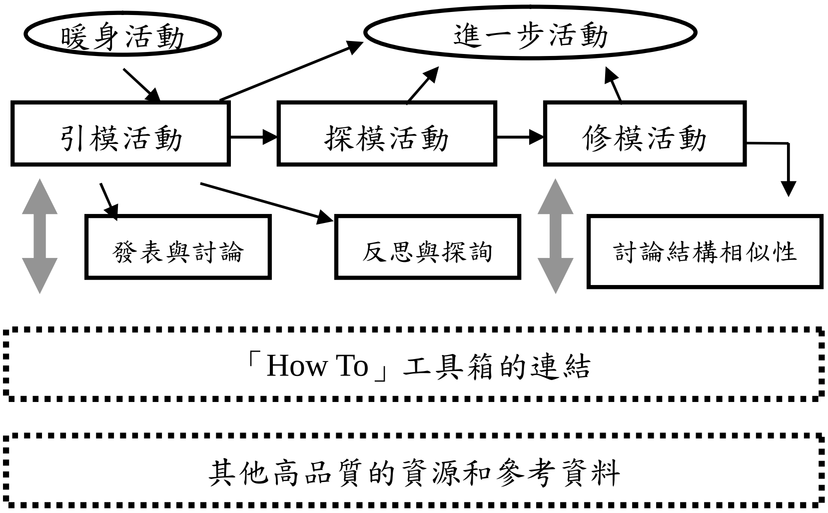
（一）活動內容

活動內容以引模、探模和修模三個子活動為主。引模活動乃參酌 Lesh 和 Doerr（2003）所發展之 Case Study for Kids 裡「拼布人」（quilter）的主題，重點在透過拼布人的文章閱讀，引發學生察覺圖形中的基本樣式。而探模和修模活動的內容主要是以

Smith, Silver, Stein, Henningsen, Boston, & Hughes 的 *Improving instruction in algebra: Using cases to transform mathematics teaching and learning* (2005)一書中，有關基本樣式數型發展的問題，包括視覺型線性圖形和非線性圖形兩類問題。

（二）建模教學模式

教學主要採取 Lesh 和 Doerr（2003）的建模教學模式（如下圖所示）。模式中除了重視個人解題的探究、詮釋及驗證的歷程，更強調有意義（sense-making）的情境問題，並透過社群的分享、發表、討論和澄清的歷程，以促進解題模式的建立。



圖：建模教學的模式

二、參與人員和實施日期

（一）參與人員

研究者兼具活動設計者、教學者並統籌所有研究事宜。另外，協助本研究的三名老師除了負責小組攝影及拍照，還要進行課室觀察記錄、撰寫日誌、並參與討論提供資料，以供活動設計與研究者教學改進之參考。研究對象為張老師所任教五年級班級，為一般智力 S 型混合班級，共 32 名學生。全班學生採均質分組 5~6 人一組，做為上課及討論之用。

（二）實施日期

本活動歷經三個月一共 8 個自行設計的單元，每個單元實施時間 2 到 3 節不等，每節 40 分鐘，研究教學與實施前後約一個學期。

三、資料蒐集與分析

（一）資料蒐集

研究期間，所蒐集資料包括：課室轉譯稿、學習單、學習日誌。

（二）資料分析

教學活動中師生間的互動是多變的並且多元，資料分析亦是頗為複雜的，因此需要採取能真實反映學生想法的影像分析法（video analysis method）(Hall, 2000；Lesh & Lehre, 2000)，透過不同資料多層的詮釋循環，讓歷經多層循環詮釋的證據足以佐證或支持研究主張或假設（Kelly & Lesh, 2000；Lesh & Doerr, 2003）。

肆、研究結果

結果結果主要根據學生在建模活動的關鍵性的解題活動和互動情形，進而分析並描述學生一般化算術到符號化的解題過程。

一、一般化算術的知覺基礎

在以閱讀文章為主的引模活動裡，一開始學生的表現如 Mason（2008）所稱，兒童具有對週遭事物一般化的能力（generalized power），亦即兒童具有的一般化知覺。基於這樣的知覺，學生以所知悉的事物作為活動探索的起點，經由討論與比較，察覺出圖形中的基本樣式具有一些關鍵要素。以下面的課室轉譯稿為例。

25.師：同學想想看，照片中被子的基本樣式要如何設計呢？

26.生：…（思考中）

27.師：那麼是什麼原因讓被子相似的圖形設計看起來不一樣？

28.生（第 1 組）：利用三角形重新組合成星星進行排列，重複再重複。

以行 28 來看，重複（repeat）乃是引發樣式的重要因素之一。然而，什麼是重複的單位（the unit of repeat）? Threlfall（1999）指出重複單位的知覺是發現樣式不可或缺的要素，也是幾何樣式（geometry pattern）重要的基礎。在本活動裡，學生認真參與並察覺出樣式中重複的單位，如行 28 學生能用三角形，而其他同學亦有使用正方形或長方形來表示基本樣式，此時重複單位對學生而言，就是一個個重複出現的基本圖形，而後學生除了根據這個關鍵要素外，也考慮到圖形出現順序的規則，並以此作為設計圖像的原則，這些原則除了變成學生掌握視覺型樣式的基礎，其中重複的概念更衍伸為基本樣式幾個幾的意涵，進而形成一般化算術中「倍的意義」。

二、從一般化算術到符號化的解題

探模活中，面對視覺型樣式活動的問題，學生採取的策略就是以一般化算術為基礎。如，從 1×1＝1，2×2＝4，3×3＝9 逐漸察覺出規律來。對於這樣的規律學生有不同的詮釋，一個是「邊長乘以邊長」的意義，另一個則是「步驟幾乘以步驟幾」的意義。第一個意義突顯的是學生以過去求算面積的方法來類化這個基本樣式，表面看來，學生是解決初步的問題，但這是在排列僅是前面幾個步驟的情形下可以成功解決，由於無法察覺 3×3＝9 這樣的算術一般化的意義，只要步驟數越來越多，所採取的解決策略就會失效。而以第二個意義來詮釋的學生，對於後續增加步驟的基本樣式個數，由於能進一步掌握基本樣式的個數與步驟數間的關係。學生即能根據這樣的關係算出基本樣式的個數。因此，數量關係的了解與掌握將是學生能否以符號表徵代數式的基礎，在掌握之後，學生便能透過語言的詮釋和溝通，進一步掌握到幾何樣式在情境中的意義以及符號所具有的意義，接著可以將這些幾何樣式和數樣式進行連結，並轉化成一般化算術的意義，甚至使用符號來表徵。如行 101，從樣式中第二組學生開始描述 1×1＝1，2×2＝4，3×3＝9…這些算術一般化的過程，並從「步驟幾×步驟幾＝正方形的個數」的意義來詮釋，透過簡化，最後用 N 來表示步驟數，使得一般化算術的算式轉化成 N×N＝（ ）這樣具有使用符號的形式，其中 N 是相同的步驟數，而（ ）是正方形的個數。行 106，第四組使用未知數表示步驟數就是 A，裡面正方形個數就是答案也等於 B，那 A×A 就是步驟數×步驟數，算出來就是正方形的個數。據上得知，視覺型樣式活動似乎能促進學生對幾何樣式間數量關係的察覺，並逐步地轉化成數的樣式，最後透過數的樣式能以符號

表徵出關係式。

101.第二組生：步驟幾×步驟幾＝正方形的個數，因為要簡化，所以用 N 表示，變成 N×N＝〈 〉，N 是相同的步驟數，( ) 是個數。

102.第五組：那步驟 4×步驟 4＝步驟 16，不是正方形的個數。

103.師：嗯，這個地方想起來很簡單，但要再清楚點表達出來，而且別人要聽的懂。

104.第二組：…….回去修改一下

105.師：換第四組

106.第四組：我們有兩種方式可以算出，一種是旁邊的個數×個數，算出來是正方形的個數。另一種是用未知數，就是步驟數＝A，裡面正方形個數＝答案＝B，A×A 就是步驟數×步驟數，算出來就是正方形的個數。

由此來看，視覺型樣式活動不但提供了有利的媒介，也使得學生透過這樣的活動將前面引模活動裡的幾何樣式和數樣式做了成功的連結。如此不僅順利完成有關數樣式的解題模式，也為下個解決代數方程式奠定基礎。

三、以一般化算術的觀點求代數方程式的解

在符號化概念尚未建置成熟前，學生還是以一般化算術的觀點來解代數方程式的問題。如行 140，第三組說明他們用排法＝邊長×邊長的想法，而邊長是每一邊的正方形個數，所以從 1×1＝1，2×2＝4……推得 11×11＝121。行 145 的第五組想法和第三組一樣利用步驟 1＝1×1＝1，步驟 2＝2×2＝4，以此類推，最後得到 11×11＝121。其中行 147 的第一組為了求表現採用了 X÷Y＝Y 導果為因的方法，然後去猜數字的尾數以逐步獲得答案。同學的討論激起行 149 的第六組提出他們的解法：先找出 121 的倍數，所以 S×S＝121，因為 11 是 121 的倍數，不包括 121×1＝121，而 11×11＝121，所以是步驟 11，所以邊長×邊長＝121。

140.第三組：排法＝邊長×邊長，邊長是每一邊的正方形個數，1×1＝1，2×2＝4……，所以小炘用了 121 個就是 11×11＝121。

141.師：那有沒有人要挑戰第三組？

142.小錞：如果有人說他用了 999 個正方形，那要怎麼算？

143.第三組：就慢慢推啊。

144.師：如果你們覺得他們的方法太複雜，等一下上台時再好好說明一下。換第五組。

145.第五組：因為步驟 1＝1×1＝1，步驟 2＝2×2＝4，以此類推，11×11＝121

146.師：跟第三組類似，再來換第一組。

147.第一組：我們是用正方形個數÷正方形邊長＝步驟，X÷Y＝Y，因為尾數是 1，所以先用 11 和 11 來乘乘看，11×11＝121，所以 121÷11＝11。

147.小炘：我覺得這只適用在兩個數相同的時候，例如：22×22，33×33。

148.師：老師覺得很有趣的是，你怎麼會知道要用 11，如果已經用了 11×11＝121，就知道答案了，好像就不需要再寫出 121÷11＝11，不過，可以看出你們想要呈現和別人不相同，這樣的努力，讓老師很感動。接下來換第二組。喔!第六組先…

149.第六組：我們想先找出 121 的倍數，所以 S×S＝121，因為 11 是 121 的倍數，不包括 121×1＝121，而 11×11＝121，所以是步驟 11，所以邊長×邊長＝121。

對於本活動 S×S＝121 的解題，由於小五學生還未具平方數和開根號的概念，於是

他們僅能先基於 S×S＝121 這個對他們來說是具有意義的代數式，也就是藉由一般化算術的觀點，結合因數倍數的概念去分解 121 這個數，最後找出 S 的數值。但是從他們的解題中發現，學生順應情境脈絡的發展即能順利解出一元二次方程式的解，其最大的原因在這樣的情境對學生而言是有意義的，研究者認為如果直接以 S^2＝121 這樣的問題取代 S×S＝121，學生在不具平方數的概念以及沒有脈絡意義的情況下，對他們來說，求出兩次方程式的解一定不太容易。

四、以符號表徵問題並解題

在修模活動中，當學生熟悉用符號表徵問題後，各組對於正方形樣式（square-pattern）的問題似乎很快就能想出策略並加以解決。如行 179~183 中，小炘表示我們找到的規律是〈步驟的數＋2〉乘以（步驟的數＋2）減掉（步驟的數×步驟的數）就是答案。接著老師追問：這是你們的規律，你是怎麼找到的？小炘回答：你不是說和之前學過的有點像，之前的 n＋2。接著他解釋就是把它看成裡面也有，這一邊就是 5＋2 是 7，這一邊也是 7，所以 7×7＝49，再減掉裡面的地方，5×5＝25，5 就是扣掉這兩個左右兩側，就是步驟數。其他小組也跟第二組一樣，很快地他們就找出解決模式，從這些學生的解題表現來看，對於視覺型的幾何樣式問題，基於先前的經驗模式，他們便能快速構思並找出解決方法來。就此，我們可以察覺到之前視覺型的幾何樣式問題對學生而言是有意義的，並有助於其代數思考的發展。

177.師：現在請小組完成後，再將你們的解題過程與結果上來報告一下…

179.第二組（小炘）：我們找到的規律是〈步驟的數＋2〉乘以（步驟的數＋2）減掉（步驟的數×步驟的數）就是答案。

180.師：這是你們的規律，你是怎麼找到的？

181.第二組（小炘）：你不是說和之前學過的有點像，之前的 n＋2。

182.師：但是現在的圖形是這樣，哪裡有 n＋2？用你畫的第五步驟圖來說明。

183.第二組（小炘）：就是把它看成裡面也有，這一邊就是 5＋2 是 7，這一邊也是 7，所以 7×7＝49，再減掉裡面的地方，5×5＝25，5 就是扣掉這兩個〈指左右兩側〉，就是步驟數。舉一個例子，以步驟 4 來說，步驟的數就是指 4。

第五組的解題策略是 4×〈Y＋1〉＝S，其中 4 是它的邊，Y 是步驟，S 是答案。如同第四組所說的：他們不用像我們再減 4。而第二組也發現：他們不必再把中間挖掉。如此看來第五組的方法更為簡潔。另外，第三組則利用扣掉這四個紅色角落正方形的方法，簡化後的公式是 4＋4×N＝正方形個數。透過課室討論後，各組之間不僅能以符號表徵問題並進行解題，也可以察覺出彼此解題模式的差異所在，使得在同一個代數解題的結構下將他組的解題策略轉化成更為簡潔的公式。

伍、結論

從研究結果來看，建模活動下學生代數的解題歷程即是透過情境理解，來進行一個數學物件與另一個數學物件的推理過程，而這樣的推理過程源自於數學物件間關係的連結。在引模活動之後，一但有了數學物件的連結，學生便會基於既有的模式來理解新的情境問題，接著，從情境的理解來形構物件與物件的關係，即是對代數情境問題和物件的內化表現。在探模活動中，學生透過這樣的關係，將既有數學概念和新的情境問題中的數學物件連接起來，並以符號或文字表徵，就是一般化算術到符號化的濃縮表現。而後，在修模活動裡，學生則利用表徵的符號進行代數問題的運算、推理與解題。由此

看來，在建模活動下，五年級學生對於代數情境問題的解題似乎具有如 Sfard（1991）所指的內化到濃縮化，再到具體化的一般化到符號化的歷程。其中一般化知覺乃是發現基本樣式的關鍵要素，同時也是從一般化算術過渡符號的重要基礎。另外，有研究指出五年級學生對於代數符號、未知數與方程式的解釋是有困難的（Kieran, 1981；1992）。就此，根據實施數學建模活動的結果，學生透過文章閱讀、參與解題、小組討論和策略分享的學習歷程，對於以文字或符號表徵代數問題、使用符號表示未知數以及解決代數方程式都有良好的解題表現。

參考文獻

教育部（2005）。九年一貫課程數學領域綱要。台北：教育部。

莊松潔（2005）。不同年級學童在具體情境中未知數概念及解題歷程之研究。高雄市：國立中山大學教育研究所碩士論文（未出版）。

陳嘉皇（2007）。國小三年級學童代數推理教學與解題表現研究。高雄師大學報，23，,125-150。

Diefes-Dux, H. A. & Moore, T. & Zawojewski, J. & Imbrie, P. K., Follman, D. (2004). *A framework for posing open-ended engineering problem：Model-eliciting activities*. paper presented in Frontiers in Education Conference, Savannah, GA., 2004.

Doerr, H. M. & English, L. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136.

English, L. & Watters, J. (2004). Mathematical modeling in the early school years *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 59-80 .

Hall, R.. (2000). Videorecording as theory. In E. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 647-664). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grouws, D. A. (Ed.),Handbook of research on mathematics teaching and learning. (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero, (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics Education Past, Present and Future.(pp.11-50).

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematics abilities in school children*. Chicago : University of Chicago press.

Lesh, R., & Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. In E. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Lehre, R. (2000).Iterative refiment cycle for videotape analyses ofconceptual change.
In E. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 665-708). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Zawojewski, J .S. (2007). Problem solving and modeling. In Lester, F.K.Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 763-804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Mason, J.(2008).Making use of children's power to produce algebraic thinking. In Kaput, J.J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L.(Eds.), Algebra in the early grades. (pp.57-94). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Smith, M. S., Silver, E. A., Stein, M. K., Henningsen, M. A., Boston, M., & Hughes, E.K. (2005). *Improving instruction in algebra: Using cases to transform mathematics teaching and learning*, Vol. 2. New York: Teachers College Press.

Terry, W. (2006). Learning and memory: basic principles, process and procedures (3rd ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years, In Orton, A. (Ed.), Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics, pp. 18-30.Cassell: London.