

# 初探小四學生長方形面積與周長概念間之混淆

陸昱任 譚克平

國立台灣師範大學科學教育研究所

[hitachi@ilc.edu.tw](mailto:hitachi@ilc.edu.tw)、[t45003@ntnu.edu.tw](mailto:t45003@ntnu.edu.tw)

## 摘要

過去的研究指出學生常在長方形的面積與周長概念之間有混淆的情形出現，總的來說可歸類為公式的混淆、關係規律的混淆與計數方式的混淆。不過第三種混淆情況的問題類型不僅國內研究較沒有深入的探討，且該類型的問題在學生的解題策略又容易與公式化的概念產生關連，故本研究期透過使用 2007 年與 2008 年宜蘭縣國小四年級數學領域檢測的試題，討論小四學童在學習過長方形面積與周長公式後在第三類型混淆情況之相似問題中的表現，繼而進一步探討學童在兩者之間的混淆情形。研究工具包含檢測長方形面積與周長的問題各兩題，採用一種雙題組的設計以診斷學生的數學迷思概念。研究對象來自 2007 年與 2008 年宜蘭縣國小四年級的學生，兩個年度小四受測學生分別是 6299 位與 5798 位，2007 年小四學生檢測的試題長方形面積雙題組，而 2008 年小四學生檢測的試題則是長方形周長雙題組。研究結果發現，小四學生在解決面積問題時較不受到長方形周長相關概念的干擾，而周長問題受面積影響的部分則可以就算則與計數方式的影響分為直接的取代與間接的影響兩類。綜合而論，學童在做為周界與一維向度的周長和做為封閉區域與二維向度的面積之間無法清楚的辨別，而導致兩者概念之間的相互干擾與混淆。

關鍵詞：長方形周長、長方形面積、概念混淆

## 一、研究背景

在量與實測教材中有關感官量發展的順序通常為屬性的注意、屬性的比較、非標準單位的使用、標準測量單位與工具的使用以及公式概念的引入(教育部, 1993; 謝如山、謝名起、謝名娟, 2002)。在九年一貫課程中，公式化概念的首次帶入是四年級，課程細目明訂四年級的學生應能理解長方形與正方形的面積與周長公式(教育部, 2003)。不過許多針對面積或周長的研究指出，學生在學完面積與周長的相關概念後會產生互相混淆的情形(高敬文, 1989; 黃英哲, 2006; 戴政吉, 2000; Chick & Baker, 2005; Costello, 1991; Cowan, 2006; Ryan & Williams, 2007; Steen, 1990)，根據上述的研究可將混淆類型分為三類，底下並以長方形為例說明。第一類是公式使用上的混淆，這類型的問題如圖 1(A)所示，學童在計算周長與面積時會將兩個公式互相混淆，利用長方形周長公式解決面積問題或利用面積公式解決周長問題，不過由於題目上的差異，數字的標示條件會有不同，如：題目要評測長方形面積時通常會標示四個邊邊長，題目要評測長方形周長時僅標示長寬兩個邊邊長；第二類是關係規律上的混淆，這類型的問題如圖 1(B)所示，學童無法

辨清周長與面積的關係，會認為切割後圖形的面積與周長都會守恆不變，此外這類型的混淆還包含周長相等則面積相等或面積愈大的圖形周長也愈長等情形；最後則是計數方式上的混淆，這類型的問題如圖 1(C)所示，不管是求周長或面積，學童通常會出現點數錯誤，或者是用點數面積來代替周長的情形，Ryan & Williams (2007) 指出，九歲的學童在給定如圖 2 之不規則圖形僅有 20%的學童答對，另外有 26%是採用點數周界外的格子數做為不規則圖形的周長。

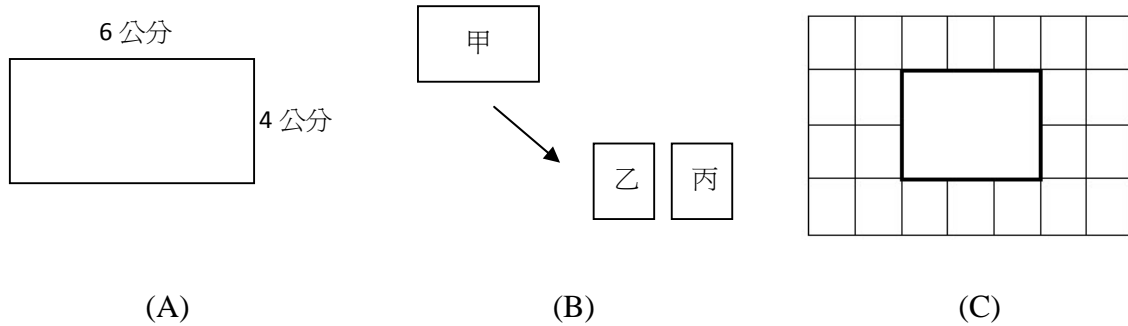


圖 1 典型常見長方形面積與周長試題

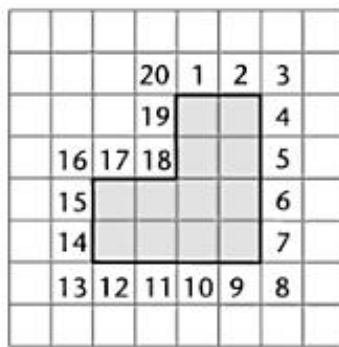


圖 2 格子點數策略解決周長問題

資料來源：Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: learning from errors and misconceptions* (p.101). Birkshire, England: Open University Press.


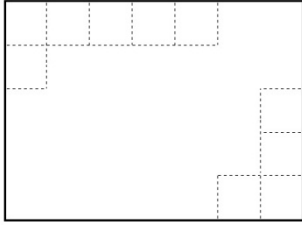

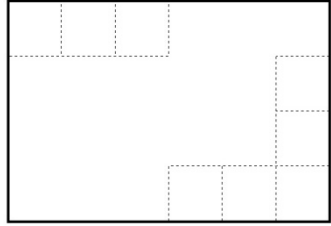
由於不同年紀的學生面對同樣表徵的問題所採用的策略可能會有所不同，上述第三種的混淆情形在某些程度上可能會與公式化的概念產生關連，從而可知這類型的問題在學童數學的學習有其值得探討的地方。本研究試圖使用 2007 年與 2008 年宜蘭縣國小四年級數學領域檢測的試題，討論小四學童在學習過長方形面積與周長公式後在第三類型混淆情況之相似問題中的表現，繼而進一步探討學童在兩者之間的混淆情形。

## 二、研究方法

### (一)研究工具


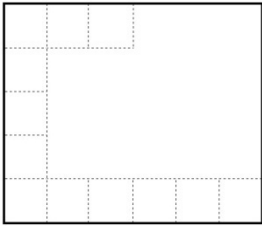

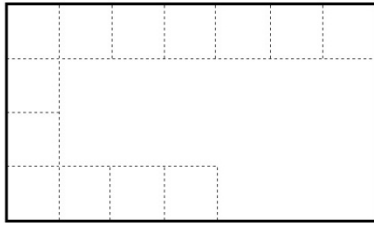
本研究共有 4 個試題，長方形面積與周長的求解各有兩題，分別來自 2007 與 2008 年宜蘭縣國小四年級數學檢測。不同概念試題的設計採用一種特殊的雙題組方式，以期能較有信心地診斷學生的數學迷思概念。而所謂的雙題組是指針對每一個欲評量的概念在題本中都安排兩個相近的平行題目，且在選項的設計方面，兩題的正答均需要掌握相同的概念，而兩題的錯誤選項的組成也是兩兩對應的。長方形面積與長方形周長雙題組試題分別如表 1 及下頁表 2 所示：

表 1 2007 年長方形面積雙題組試題

題 號	試題 1	試題 2
試 題	<p>下圖是一個長方形，小美在長方形上放上 10 個 1 平方公分的正方形，請問這個長方形的面積為何？</p> <p>(代表 1 平方公分的正方形)</p> 	<p>下圖是一個長方形，莉莉在長方形上放上 8 個 1 平方公分的正方形，請問這個長方形的面積為何？</p> <p>(代表 1 平方公分的正方形)</p> 
錯誤一	學生可能只點數圖形中已畫出的方格個數(10 個或 8 個)或是以問題陳述中所提及的數字(10 個或 8 個 1 平方公分)來表示該長方形的面積。	
錯誤二	學生可能以周長的方式進行求解 ( $7+7+5+5$ )	/
	學生未注意到題目呈現的長方形中方格擺放的位置，而直接將兩側的方格個數相乘( $6\times 4$ 或 $3\times 5$ )得到答案。	
錯誤三	學生在進行解題時將長寬相加後再乘以 $2(7\times 5\times 2$ 或 $6\times 4\times 2)$ 得到答案。	

由於試卷與試題開發過程共實施四次預試。第一次預試主要是從開放性的試題開始，旨在蒐集學生的錯誤類型與修正題幹，經過逐次的預試與 15 位命題小組的教師相互檢視討論，以及兩位國小數學課程與教材專家學者的審核後，逐步篩選試題及收斂成四選一的選擇題形式，並在最後一次才以雙題組的方式並商請外縣市學校提供國小四年級 200 位以上的學生進行正式的預試，以瞭解題本品質與雙題組設計的對應情形。

表 2 2008 年長方形周長雙題組試題

題 號	試題 1	試題 2
試 題	<p>下圖是一個長方形，婷婷在長方形上放上 12 個邊長 1 公分的正方形，請問這個長方形的周長為何？</p> <p>(代表 1 平方公分的正方形)</p> 	<p>下圖是一個長方形，小花在長方形上放上 13 個邊長 1 公分的正方形，請問這個長方形的周長為何？</p> <p>(代表 1 平方公分的正方形)</p> 
錯誤一	學生可能只點數圖形中已畫出的方格個數(12 個或 13 個)來表示該長方形的周長。	
錯誤二	學生可能直接點數長方形的一雙對邊邊長，再點數另外一雙對邊邊長，但在	

	點數另一雙對邊邊長時，卻忽略點數第一次點數時已數過之正方形的邊長(6×2+3×2 或 7×2+2×2)。抑或採用點數周界內的格子數解決問題。
錯誤三	學生在進行解題時直接計算長×寬的結果(6×5=30 或 7×4=28)。

## (二)研究對象與施測方式

長方形面積雙題組與長方形周長雙題組施測對象分別來自 2007 年與 2008 年國小四年級的學生(排除特教學生)，兩個年度小四受測學生分別是 6299 位與 5798 位。施測的日期安排在學年課程結束學校期末考至暑假開始前期間統一進行，施測時間為 40 分鐘。

## (三)資料分析

本研究使用 SAS 9.1.3 計算信度係數與輸出學生在雙題組試題列聯表分佈狀況，其中列聯表分析排除任一題未回答的學生資料。此外為了瞭解每一試題在選項的分散情形，計算各試題的吉尼係數(Gini Coefficient)與熵(Entropy)以瞭解離散型資料的變異情形，兩係數分別以 G 和 H 表示且計算方法如下：

$$G = 1 - \sum_{i=1}^k P_i^2$$

$$H = - \sum_{i=1}^k P_i \times \ln(P_i), P_i \text{ 代表試題中每一選項的選答率}$$

## 三、研究結果

底下將就長方形面積雙題組以及長方形周長雙題組兩個部分分別呈現學生的表現情形。

### (一)長方形面積雙題組的表現情形

表 3 是國小四年級學生在長方形面積雙題組表現的對應情形。由該表可知，試題 1 與試題 2 分別有超過九成的學生落在正確與錯誤選項一，而且有 85.67% 的學生在試題 1 和試題 2 一致性出現正確或錯誤選項一。

表 3 長方形面積雙題組學生表現列聯表

試題 2 \ 試題 1	正確	錯誤一	錯誤二	錯誤三	合計
正確	3847 (62.55%)	61 (0.99%)	51 (0.83%)	46 (0.75%)	4005 (65.12%)
錯誤一	104 (1.69%)	1422 (23.12%)	72 (1.17%)	33 (0.54%)	1631 (26.52%)
錯誤二	143 (2.33%)	43 (0.70%)	198 (3.22%)	31 (0.50%)	415 (6.75%)
錯誤三	45 (0.73%)	17 (0.28%)	13 (0.21%)	24 (0.39%)	99 (1.61%)
合計	4139 (67.30%)	1543 (25.09%)	334 (5.43%)	134 (2.18%)	6150 (100%)

從上述學生的表現可以發現，學生較穩定一致的錯誤情形主要是直接以試題中出現的數字或點數圖形中已畫出的方格個數回應問題，一致性使用周長策略解決問題的學生僅佔全部學生的 0.39%。從而可知，較少比例的學生在長方形面積雙題組問題中會透過

周長的概念解決面積的問題。

(二)長方形周長雙題組的表現情形

表 4 是國小四年級學生在長方形周長雙題組表現的對應情形。由該表可知，兩題的答對率皆為四成左右，且各個錯誤選項都有超過 10% 以上的學生選答，且有 86.60% 的學生在試題 1 和試題 2 的選答呈現一致穩定的情形。

表 4 長方形周長雙題組學生表現列聯表

試題 2 \ 試題 1	正確	錯誤一	錯誤二	錯誤三	合計
正確	2038 (36.13%)	44 (0.78%)	73 (1.29%)	138 (2.45%)	2293 (40.65%)
錯誤一	55 (0.98%)	936 (16.59%)	41 (0.73%)	54 (0.96%)	1086 (19.25%)
錯誤二	56 (0.99%)	60 (1.06%)	580 (10.28%)	50 (0.89%)	746 (13.22%)
錯誤三	99 (1.76%)	37 (0.66%)	49 (0.87%)	1331 (23.60%)	1516 (26.87%)
合計	2248 (39.85%)	1077 (19.09%)	743 (13.17%)	1573 (27.89%)	5641 (100%)

從上述學生的表現可以發現，學生在兩個試題最常出現的錯誤是錯誤類型三，有 23.60% 的學生傾向同時採用面積公式方式(長×寬)求解周長的問題；有 16.59% 的學生以試題中出現的數字或點數圖形中已畫出的方格個數回應問題；另外有 10.28% 的學生採用如圖3將粗線的邊數相加或點數周界內的格子數解決長方形周長的問題，這類型的學生在圖中的前兩種策略採用的是量測長度的方法來解決周長問題，不過由於對周長的概念不清楚，且又受到面積點數方式的影響，導致在四邊形角落部分的邊長各有一部份忽略不計，而第三種策略則是採用面積單位點數的方式來解決長方形周長的問題。從而可知這類型的學生最有可能受到長方形面積計數方式的影響。

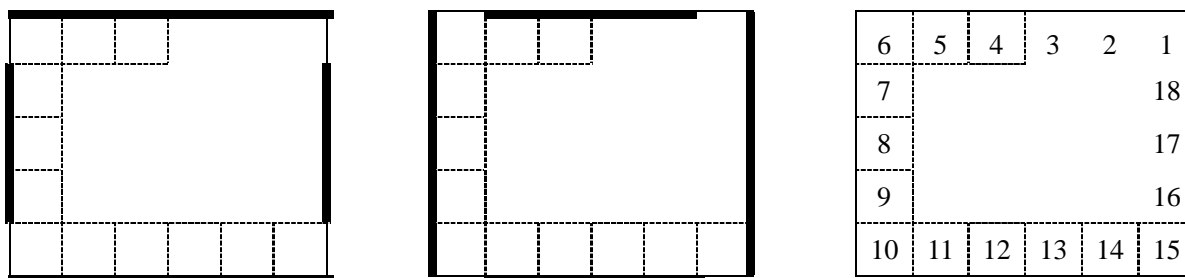


圖 3 長方形周長雙題組錯誤類型二舉例

總的來說，學生在長方形面積的錯誤解題策略較集中在錯誤類型一，而學生長方形周長的錯誤解題策略則是分佈在三種不同的錯誤類型。這一點可由表 5 得知，不管是 G 係數或是 H 係數，長方形周長試題的數值皆高於長方形面積的問題，從而得以再一次驗

證上述的論點。

表 5 長方形面積與周長雙題組學生表現分散程度

試題		G 係數	H 係數
長方形面積	試題 1	0.50	0.88
	試題 2	0.48	0.86
長方形周長	試題 1	0.71	1.30
	試題 2	0.71	1.31

#### 四、結論與討論

針對上述研究結果可知，許多學童在回答長方形面積與長方形周長問題時，直接點數圖形中已有的方格數或使用問題中所提及的數字做為答案，這類型的學生可能不瞭解面積與周長在圖形中所代表之周界與封閉區域的意義。在長方形面積雙題組的部分，由於試題一錯誤類型二的策略可能會有利用周長算則求解長方形面積的可能，倘若將試題一錯誤類型二的選答率減掉試題二錯誤類型二的選答率(6.75%-5.43%=1.32%)，則可作為學生使用周長算則或周長計數方法解決長方形面積問題策略比例的猜測，從而可知，對小四的學生而言長方形面積的求解較不受周長算則與相關概念的影響。在長方形周長雙題組的部分，面積算則確實干擾混淆了學童的作答，另外也有不少學生採用錯誤類型二的答題策略，也就是說求解長方形周長問題受長方形面積算則與計數方式的影響可以區分為兩大類。第一類是直接的取代，所謂直接性的影響是直接使用長方形面積的算則獲計數方式解決長方形周長的問題；而第二類間接影響是指學生同時混和了面積與周長的解題策略來解決長方形周長的問題。綜合而論，學童在做為周界與一維向度的周長和做為封閉區域與二維向度的面積之間無法清楚的辨別，而導致兩者相互干擾與混淆情形，然而背後機制為何仍可以再深究。除此之外，目前教材都將長方形周長與面積放在同一單元而且版面的配置上皆以面積較多，這樣的安排方式是否妥當及之間的關係為何等，都是未來可以進一步探討的問題。

#### 參考文獻

- 高敬文(1989)。我國國小學童測量概念發展研究。國立屏東師範學院初等教育研究, 1, 183-219。
- 教育部(1993)。國民小學課程標準。台北：教育部。
- 教育部(2003)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北：教育部。
- 黃英哲(2006)。國小四、五、六年級學童周長迷思概念之探討。國立台中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文，未出版，台中。
- 謝如山、謝名起、謝名娟(譯)(2002)。Riedesel, C. A., Schwartz, J. E. & Clements, D. H. 著。數學科教材教法。台北：五南。
- 戴政吉(2000)。國小四年級學童長度與面積概念之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東。
- Chick, H. L., & Baker, M. K. (2005). *Investigating Teachers' Responses to Student Misconceptions*. Paper presented at the Proceedings of the 29th Conference of the

- International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne.
- Costello, J. (1991). *Teaching and learning mathematics 11-16*. London: Routledge.
- Cowan, D. (2006). *Teaching mathematics: a handbook for primary and secondary school teachers*. Abingdon: Routledge.
- Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: learning from errors and misconceptions*. Berkshire, England: Open University Press.
- Steen, L. A. (1990). *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*. Washington: National Academy Press.