科學教育學刊
2003, 第十一卷第一期, 27-50

Chinese Journal of Science Education
2003, 11(1), 27-50

一個數學解題練習系統之設計理念

林美娟[1]　莊志洋[2]　孫鵬宗[3]　許金葉[4]
黃瀧輝[5]　盧思靜[6]　黃凱澤[2]
[1]國立台灣師範大學資訊教育系
[2]民友科技股份有限公司
[3]明碁電通股份有限公司
[4]桃園縣員樹林國小
[5]雲林縣宜梧國中
[6]嘉義高級商業職業學校

(投稿日期：民國90年12月3日，修訂日期：91年6月26日，接受日期：91年9月17日)

摘要：本文所描述的是一個網路化數學解題練習系統之雛型及其設計理念。我們使用派特里網路圖記錄數學解題知識，將解題所需運用之數學公式，定理，概念等，經分析整理而成一組解題函式，並將其對應至派特里網路之「轉變」；至於觸發每一個解題函式所需之輸入條件與輸出結果則對應至派特里網路之「位置」。使用者利用這些解題函式進行解題，其解題過程則由系統動態地逐步記錄。當使用者於解題過程中遭遇困難並要求系統協助時，系統可將其解題過程與系統所儲存之專家解題知識加以比對，並根據比對結果提供適當之引導。本系統亦提供網路上同步與非同步溝通功能，使學習者得以透過網路獲得教師或同儕的協助解題。本系統之庫存題目及各題目之解法均具有可擴充性，使用者可利用題目編輯器隨時新增題目及其解法，而系統亦能動態偵測並儲存原有題目之新增解法。

關鍵詞：物件導向設計，派特里網路，電腦輔助學習，數學解題，關聯式資料庫。

壹、緒論

數學是經常造成學生學習困擾的學科之一；而且這種困擾普遍存在於世界各國；因此，各國關心數學教育的人士均紛紛提出改革數學教育的各種建議。國內近年來對於建構式數學的激烈論辯即為一例。另以美國為例，美國學生的數學學習成就與其他國家相比頗為遜色（Greene, Herman, & Haury, 2000; Mullis *et al*.,1998）；因此，美國的數學教育學者和數學教師團體自 80 年代以來即積極致力於數學教育的研究與改革。他們探討了數學教育各個層面的問題，並提出了許多值得中小學教師採用之教學方針、策略與方法（Edwards, 1994; Grouws & Cebulla, 2000a; Kilpatrick, 1992），其

中數學解題能力的培養便是近二十年來美國數學教育所倡議的重點之一。美國全國數學教師委員會在 1989 年所提出之「學校數學課程與評鑑標準」(NCTM, 1989; 鐘貴兒, 2002) 以及 2000 年修訂完成之「學校數學課程之原則與標準」(NCTM, 2000), 均強調了數學教育中訓練學生問題解決能力之重要性。我國的國民中學數學課程標準 (教育部, 2002a) 亦明定「培養學生運用數學方法解決問題的習慣與能力」為五大教學目標之一。

國內、外課程標準中所說的問題解決當然不只侷限於數學習作或測驗卷上的解題練習, 而是泛指解決日常生活中的各種問題。但就教學實務面而言, 數學習作或測驗卷上的解題練習畢竟是培養廣泛的問題解決能力的第一步。學生們從這些定義清楚、目標明確的問題中所逐漸累積的解題經驗, 自將有助於他們將數學方法進一步應用於解決日常生活中所遭遇之問題。

我們認為一個電腦輔助數學解題練習系統應具有以下特色, 方能發揮較高層次之解題引導功能:

(1)系統應能分別記錄專家與學習者之解題步驟, 並據以分析學習者之解題狀況。
(2)系統應強調解題概念的運用, 而非煩瑣的運算。
(3)系統必需擁有足夠的運算能力, 不僅可以處理簡單的四則運算, 亦可處理解方程式等較為複雜的運算。
(4)系統應提供適當的機制供使用者隨時新增其知識庫與題庫之內容。
(5)系統應能透過網路溝通功能提供學習者之間共同合作、互助解題的機制。
(6)系統應能模擬紙筆解題的方式, 將學習者的解題過程完整地呈現在電腦螢幕上, 以供解題者檢視, 並反思其解題步驟。
(7)系統應能儲存學習者的學習歷史, 以便引導學習者聯想過去所曾解過的相關題目。

基於以上理念, 本文作者於近年來共同完成了一個數學解題練習系統之雛形 (以下簡稱 MathCAL)。MathCAL 之相關研究起始於民國 84 年。初期的研究驗證了派特里網路理論在塑模數學解題過程之可行性 (孫茂鑫, 1997; 黃正志, 1997)。隨後我們進一步研究如何建構模組化的系統核心, 並探討此解題系統所應具備之各種互動功能 (孫鵬宗, 1998; Lin, Juang & Sun, 1999; Lin, Juang & Sun, 2000a)。為使系統能對使用者提供必要之解題引導, 我們繼續針對系統之解題錯誤診斷與矯正功能進行理論探究, 並完成其演算法設計 (許金葉, 1999; Lin *et al*., 2000b)。隨後我們將此演算法實作於系統中, 並引進資料庫設計理念, 將系統運作所需之各種資料以關聯式資料庫檔案做有效地儲存; 此外, 我們亦進一步探討如何將派特里網路圖所表示的解題流程在系統內部的儲存方式加以改進, 以便處理數學解題所必然存在的一題多解的情況 (黃瀧輝, 2000; Lin *et al*., 2001)。隨後為了進一步強化系統的數值處理能力, 我們重新定義了各種數值型態的統一儲存格式, 並改寫了解題系統之運算核心。同時, 我們亦將領域知識分析過程加以整理, 規劃了一套分析領域知識之標準程序, 期使後續之系統發展者有所依循, 得以進一步擴充本系統之知識庫, 並可將此程序運用於其他學科之解題系統製作 (盧思靜, 2001)。

本文之論述架構大致如下:第二節為文獻探討;第三節則詳細說明了 MathCAL 之設計方法及系統實作上的重要細節, 包括系統運算核心之設計、系統如何以派特里網路記錄解題知識與學習者之解題過程、系統的資料庫設計、以及系統的解題錯誤診斷矯正機制。第四

節則呈現了 MathCAL 之雛形界面，並描述了系統的操作流程與主要功能。最後在第五節中我們提出了本文之結論與未來研究方向。

貳、文獻探討

數學家 Pólya 指出，數學解題歷程包括瞭解問題、擬定解題計畫、執行計畫、回顧等四個階段（Pólya, 1971）。「瞭解問題」主要在認清題目的已知條件是什麼？題中的問題是什麼？題中涉及哪些概念？它們的含義是什麼？然後再引入適當的符號或畫出適合題意的圖形，將題中的條件與問題清楚地表示出來。「擬定解題計畫」則是設法找出已知與未知條件之間的關係，以實現由已知向未知的轉化。解題者需深刻分析已知條件，並靈活運用數學概念與解題策略，以確立解題方法。至於「執行計畫」則是實現解題計畫所擬定之解題動作，直到完成解題為止。「回顧」階段則在促使學習者從不同角度思考解題方法並連結其他的類似問題。

綜合多位學者的研究結果（林碧珍, 1989; 國立台灣師範大學科學教育中心, 1984; 溫亦剛, 1990; 楊弢亮, 1992; Campione *et al*., 1989; Garofalo & Mtetwa, 1990）以及部份數學教師之教學經驗，學習者在解題過程中所可能產生的問題大致如下：

(1)學習者無法深入了解題意以分析出題目之已知條件和題目所要求之答案。

(2)學習者未能仔細閱讀題目內容，便盲目地將題目的已知條件套用於一知半解的公式中。

(3)學習者不知如何分析題目之已知條件和所欲求取結果之間的關連，缺乏明確之解題思考方向。

(4)解題過程中計算錯誤。這種現象尤易出現於複雜的根式運算、三角函數運算等學習單元。

(5)在傳統的數學教室裏，學生習於被動地聆聽老師講解解題過程，缺乏主動參與解題的歷練，以致較難舉一反三，獨力完成解題。

(6)學習者於練習解題的過程中缺乏即時解惑的回饋，以致半途而廢。

以上這些數學解題癥結涉及解題者的語文能力、問題分析能力、數學概念的認知與應用、運算技巧、數學教師的教學方法等多方面的課題，而各方面亦均已有諸多國內外數學教育學者進行相關研究。其中，如何將科技產品用於輔助數學解題亦是多年來的主要研究課題之一。

美國數學教師協會在其所提出之「學校數學課程之原則與標準」（NCTM, 2000）中，將「科技」（technology）與「平等」（equity）、「課程」（curriculum）、「教」（teaching）、「學」（learning）和「評量」（assessment）並列為數學教育的六大原則。「科技」原則所陳述的是：科技的運用對於數學教育是不可或缺的，它可提升學生的學習成效。事實上，計算機早已成為數學教學上使用極為普遍的工具之一，而近年來由於電腦與網路設備的日益普及，電腦在數學教育上的應用也隨之受到重視。上述之「學校數學課程之原則與標準」指出了諸多以科技工具輔助數學教學的好處：

(1)具有繪圖功能的計算機和電腦可將抽象的數學概念視覺化，不僅有助於學生了解這些概念，亦使師生或同儕之間可針對螢幕上具象化的物件進行數學概念的觀察與討論。

(2)科技工具所提供的「隨做隨現」功能使學生可藉由任意操弄數據或螢幕上的圖形以觀察其立即的變化。

(3)複雜運算由計算工具取代之後，使學生可將時間與精力轉而做較高層次的

概念或模式上的思考。

(4)科技工具所具備的運算能力使學生可進行大量資料的收集、分析與呈現。

(5)電腦網路上豐富的資源使學生得以接觸廣泛而多樣化的題目。

(6)科技工具可提供個別化、適性化的教學，因而能兼顧不同性向或不同學習成就的學生。

利用電腦軟體輔助數學教學方面的研究所涵蓋的主題頗為廣泛。以近幾年來國內外的相關研究為例，即可依其所根據的教學理論、所處理的知識範圍、所針對的使用對象、所訴求的學習目標、所使用的軟體設計方法與操作環境等等之區別而分門別類。舉例而言，Kieran（1996）文中提到多項利用電腦軟體輔助學生學習代數解題而著有成效的研究。Cardelle-Elawar 和 Wetzel（1995）的研究則顯示，以研究者自行設計的 IDEA 模式搭配 CAI 軟體使用，可培養學生「自我調整」(self-regulated) 學習的能力。Abidin 和 Hartley（1998）所設計的 *FunctionLab* 提供了一個類似解題流程繪圖器的界面，讓中學生用來將代數文字題的解題想法繪製出來，並加以執行以觀察其結果。侯鳳秋和陳龍川(1999)的研究探討了適性CAI中個人化文意範例對國小四年級學生解數學文字題成就的影響，並提出「文意呈現方式與數學解題能力兩因素之間有交互作用存在」之結論。Nakano Murakami, Hirashima 和 Takeuchi（2000）則認為讓學生練習自己出題目也是學習數學解題的重要方法之一，他們因而設計了一個名為 ILE 的軟體讓小學生練習設計簡單加減法應用的文字題。Chen, Horng 和 Yang（2000）則實作了一個國中幾何網路學習環境，他們以概念圖（concept map）為理論基礎建立了系統的教材架構，並允許使用者動手操弄幾何圖形以觀察其變化。此外，利用 Logo 語言所提供的程式設計環境訓練小學生解題推理能力也是多年來許多學者的研究主題之一，近如 Liu（2000）的研究顯示，小學生若利用 PCLogo 反覆練習解幾何相關問題時，只要練習次數夠多，即可使他們從具象的思考層次提升至抽象的思考層次。

除了學術研究單位所製作的數學 CAI 系統之外，國內外之營利或非營利機構亦已發展了許多以中、小學生為對象之數學 CAI 軟體，例如教育部的「好學專輯」和「學習加油站」（教育部, 2002b）所收集之數學軟題資源，或英、美各國的相關網站（如：Software to Support Mathematics Teaching（BASS, 2002）, Math Forum @Drexel（Drexel University, 2002）, The Geometry Center（University of Minnesota, 2002）, 以及 ESC Software Library（ESC, 2002）等等）均評介了許多數學 CAI 軟體，可供使用者參考選購甚至直接下載使用。

上述數學 CAI 系統或者偏重基本算術運算技巧的反覆練習，或者著重於數學函數或幾何圖形的繪製與呈現，有些雖亦屬解題練習軟體，但整體而言，並未看到任何類似本研究所發展得以記錄學習者解題過程並據以提供解題引導之練習系統。我們所接觸過的其他解題練習系統均偏向於測驗功能之設計；換言之，該類系統均由題庫提供以選擇題為主之測驗題供學習者回答，再由系統針對解題者的最後答案判定對錯，並於學習者答題錯誤時顯示正確答案。此種採用封閉式題型及「基本回饋」（basic feedback）（Collins, Carnine, & Gersten, 1987）方式的作法並無法判斷學習者的錯誤究竟是因為所引用的觀念不對、計算錯誤、或者甚至只是胡亂猜測答案而已，對學習者的幫助頗為有限。某些軟體雖亦可於學習者答題錯誤時顯示出相關解題知識供學習者參考，但多半只是連結至整個知識單元的制式解說頁面供學習者重新閱讀而已，並未能切中較為局部的知識概念進行提示與引導。

關於教學軟體的回饋方式方面，Collins,

Carnine 和 Gersten 曾利用 CAI 軟體訓練一群有學習障礙的學生邏輯推理能力，以比較「基本回饋」與「詳盡矯正回饋」（elaborated corrective feedback）的教學效果（Collins, Carnine, & Gersten, 1987）。「基本回饋」的做法是告訴學生答案是否正確，若不正確則提供正確解答；「詳盡矯正回饋」則是當學生的答案錯誤時，給予一連串的規則或提示，以引導他們逐步得到正確的解答。在他們所做的兩項實驗中，接受詳盡矯正回饋的學生的表現都明顯優於接受基本回饋的學生。他們的研究結果並顯示：教學軟體所提供的詳盡矯正回饋並不會因而增加學生使用軟體的時間。另外，Burton（1982）曾將智慧型教學系統中所採用的回饋方式分成七種：請求幫忙（Help）、介入協助（assistance）、賦予工具（Empowering）、反應式學習（Reactive Learning）、模仿專家（Modeling）、教練式教學（Coaching）、和家教式教學（Tutor）等。在這七種回饋方式中，本研究根據數學解題所具有之特性而在我們所發展的解題練習系統中實現了其中三種：

(1)請求幫忙：MathCAL 允許學習者自行操作系統，並於遭遇困難時自主性地向系統要求協助，此種做法能讓學習者覺得自己握有學習主控權。

(2)賦予工具：MathCAL 記錄了學習者的每一個解題步驟，並可將其解題歷程分別以文字和圖形的方式呈現在螢幕上供解題者回顧其解題過程。

(3)模仿專家：當學習者陷入解題僵局時，MathCAL 可將系統知識庫中所儲存之專家解題方法提供給學習者觀察與學習。

、系統設計方法與實作重點

一、MathCAL 的數值運算核心

一般的程式語言通常僅提供整數與浮點數等少數幾種數值資料型態，但在數學題目中所可能出現之數值卻可能有多種型態。因此，發展一套數學解題練習系統所必須面對的首要問題就是數值運算之處理。換言之，MathCAL 之運算核心必須自行定義適當之資料結構以精確地表示各種數值，並為它們提供一套運算法則，以做為解題練習系統的核心。

整個數系的關係可以圖 1 表示之（楊維哲、沈長庚, 1990; 繆龍驥, 1988）。此外，數值具有無限延展的特性；換言之，數可以是單一的值（如：3、5 ..），亦可由其他的數值以+、−、×、÷ 連接而成（例如：2/3、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 等）。事實上，數系中的所有數值都可拆解成整數配合四則運算式所表示的數值。

基於上述數值的關係與特色，我們以二元樹（binary tree）串接的方式來表示一個數值。圖 2 所呈現的正是 $\sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2+3\times5}$ 的二元樹表示法。系統在處理任一數值之前，須將這個數值先建成一棵二元樹，而二元樹的建立必須依照數值中所含運算子的運算優先順序，以後置（postorder）

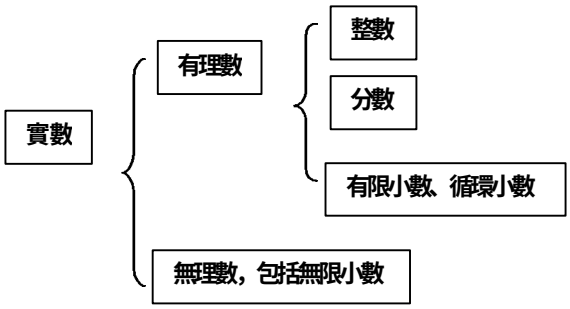


圖 1：數系的組成

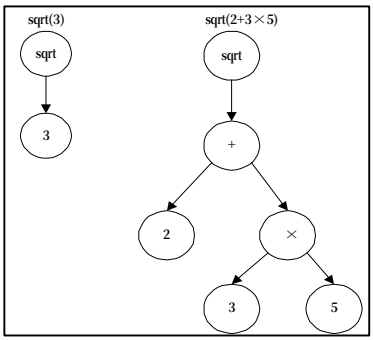


圖 2：$\sqrt{3}$ 及 $\sqrt{2+3\times5}$ 的二元樹表示法

的方式表示在記憶體內部。在考量數值可無限延展的特性之下，我們排除了以固定長度陣列儲存數值的方式，而改以鏈結串列（linked lists）來表示二元樹的資料結構。鏈結串列上的每一個節點（node）所代表的可能是整數，也可能是運算子。

建構了運算式的二元樹之後，即可開始進行二元樹的運算工作。在運算之前，我們必須先考慮所欲運算的數值之間可運算性的問題。數值之間可運算的類型可分為以下幾類：

(1)整數對整數的加減乘法：此運算所得到的結果亦必為整數。

(2)整數對整數的除法：此運算所得到的結果可能為整數，亦可能為分數。我們在呈現運算結果時，一律以最簡分數的型態呈現。若分母為 1 時，則以整數呈現。

(3)整數對有理數的四則運算：此運算所得到的結果必為有理數，因此為求程式撰寫的簡潔性，一律將整數改為有理數（即分數型態）後，再加以運算。

(4)有理數對整數的四則運算：此運算如同(3)，我們可將整數化為有理數後再進行運算，所得的結果為有理數。

(5)有理數對有理數的四則運算：以分數運算的形式計算。

(6)無理數對無理數：必須是根值相同且根號內的數值相同時，才可做加減運算；而乘除運算可用指數運算的方式計算。

(7)變數對變數：對加減法來說，必須是同變數值才能做運算（如：$x + 2x$），而對乘除法來說，若為同變數名稱，則指數會加（減）1，例如：$x * x = x^2$。

至於不可運算的類型則有以下三類：整數和無理數及變數、有理數和無理數及變數、以及無理數和變數。

二元樹運算的程式架構是屬於遞迴（recursive）呼叫的形式，而以指標所指的節點是否為數值來判斷運算是否結束。整個程式是先判斷左、右子樹是數值還是運算子或函式，若左、右子樹為空節點（NULL），則代表其為數值，可直接做四則運算，否則即呼叫相對應的運算子再做運算。換言之，我們的做法是先將二元樹展至最底層之後，再從最底層一層一層往上運算至最上層而得到結果。

在 MathCAL 系統中，所有等式亦是以二元樹的方式儲存。它的儲存形式如圖 3 所示(以 $a \times x = b$ 為例)。一元一次方程式是所有方程式中最基本的形式，MathCAL 的運算核心在解一元一次方程式時，是運用「移項法則」與「同解定理」將方程式化成最簡方程 $a \times x = b$，最後再將變數的係數運用移項法則將等式化為 $x = \frac{b}{a}$，即可求出其解。

二、派特里網路理論與 MathCAL 解題核心

派特里網路（Petri Nets）是一種具有圖形化性質的正規語言，適用於塑模具有同時性特質之系統。Carl Adam Petri 於 1960 年代初期將自動機理論（automata theory）加以擴充，使其能夠表示「同時發生的事件」(concurrently occurring events)，並因而定義了派特里網路語言。至今派特里網路已被廣泛用於各種不同領

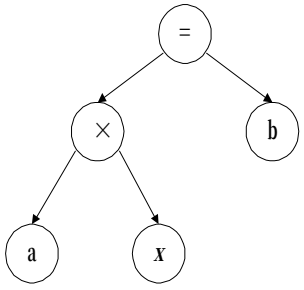


圖 3：方程式的二元樹表示法

域做為系統之塑模工具（戴建耘, 1996; Petri Nets World, 2001）。

Peterson 將派特里網路圖定義如下（Peterson, 1981, p.11）：

派特里網路圖 G 是一個雙重有向多重圖 (Bipartite Directed Graph)。G = (V, A)，其中 $V = \{v_1, v_2, ..., v_s\}$，表示圖中所有節點（vertices）的集合；而 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$，表示圖中所有的有向弧（directed arcs），$a_i = \{v_j, v_k\}$，其中 $v_j, v_k \in V$。V 又可被分割為兩個互相分離的集合 P 和 T，且滿足 $V = P \cup T$ 及 $P \cap T = \varnothing$。在圖中每個有向弧 $a_i \in A$，且若 $a_i = (v_j, v_k)$，則（$v_j \in P$ 且 $v_k \in T$）或（$v_j \in T$ 且 $v_k \in P$）。

上述定義中，$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n \mid n \geq 0\}$，表示「位置」（places）的集合，為一有限集；而 $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m \mid m \geq 0\}$，表示「轉變」（transitions）的集合，亦為一有限集。同時，$A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ 表示位置和轉變之間的流向關係，為有向弧的集合。

利用位置、轉變、和有向弧這三種元件即可用以描述一個系統的靜態行為。但若欲表示系統之即時性動態行為，則須加入「權杖」（tokens）的使用。當某個位置擁有特定數量之權杖時，即表示該位置所表徵的系統狀態存在，亦表示該位置處於「致能」（enabled）的狀態。所以，權杖在位置中的分佈情況就代表了該系統在某個特定時點的整體狀態。圖 4 顯示了派特里網路圖中四種元件的符號。

派特里網路圖中使用有向弧來連結位置和轉變，而且這些有向弧所表示的方向性不是由位置指向轉變，就是由轉變指向位置。因此，我們可將圖形中的所有節點（包括位置和轉變）分為兩個集合，並利用有向弧連結這兩個集合，其方向只有兩種可能：由位置集合連結至轉變集合，或者由轉變集合連結至位置集合。這樣的圖形就稱之為雙重有向多重圖（bipartite directed graph，以下簡稱 BDGPN），如圖 5 所示。

派特里網路所具有之系統動態行為塑模能力正可用來將數學解題過程完整地記錄下來並加以分析。我們可將數學解題中所需用到的解題條件視為「位置」，而解題中所需引用的數學公式、定理、概念則可對應至「轉變」，而整個解題過程也就是這些位置、轉變及有向弧所串接而成的一個派特里網路圖。

以下我們以圖 6 之題目為例，說明如何以派特里網路圖表示數學解題知識並記錄學習者的解題過程。此題有多種解法，其中之一如下列步驟所示：

步驟一：由題目敘述得知 AB 是直徑，C 為切點。可利用半圓內圓周角必為直角的觀念確定三角形 CAB 為直角三角形。

步驟二：由題目敘述得知角 DCB = q，CD 為切線。可利用定理「弦切角度數等於其夾弧所對圓周角度數」得到直角三角形 CAB 中角 A = q。

步驟三：由已知條件得知 AB = 26，而 AB 為直角三角形 CAB 之斜邊；又知 Cos$q$ = 12/13，可得出直角三角形 CAB 之鄰邊 AC = 24。

步驟四：因 Cos$q$ = 12/13，可利用三角函數平方和的關係得出 Sin$q$ = 5/13。

步驟五：代入直角三角形面積公式 1/2 * AB * AC * Sin$q$，可求得三角形 CAB 的面積 = 120。

上述解題步驟可表示為圖 7 之派特里網路，圖中共使用了 10 個「位置」以及 5 個「轉變」。10 個位置分別代表題目中所給予之已知條件或是解題過程中所求得之中間結果；至於 5 個轉變則分別對應至上述五個解題步驟中所用到的數學相關函式、觀念或定理。圖中的位置以及轉變所代表的意義分列於表 1 和表 2 中。

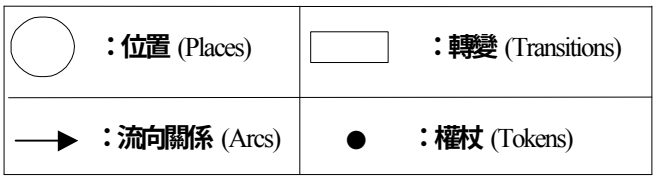


圖 4：派特里網路圖中所使用的符號

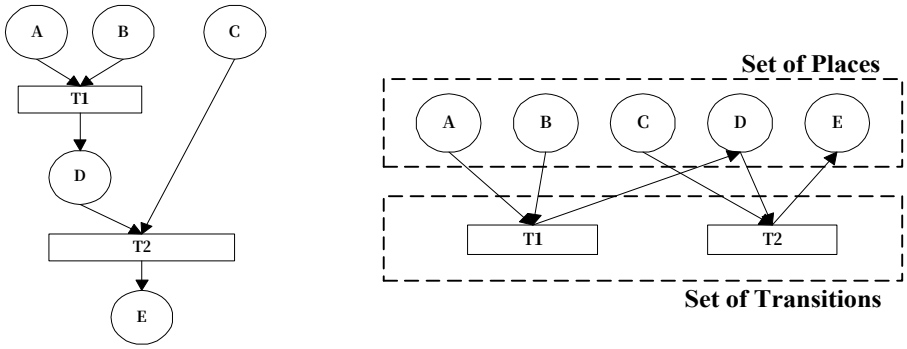


圖 5：派特里網路的雙重有向多重圖

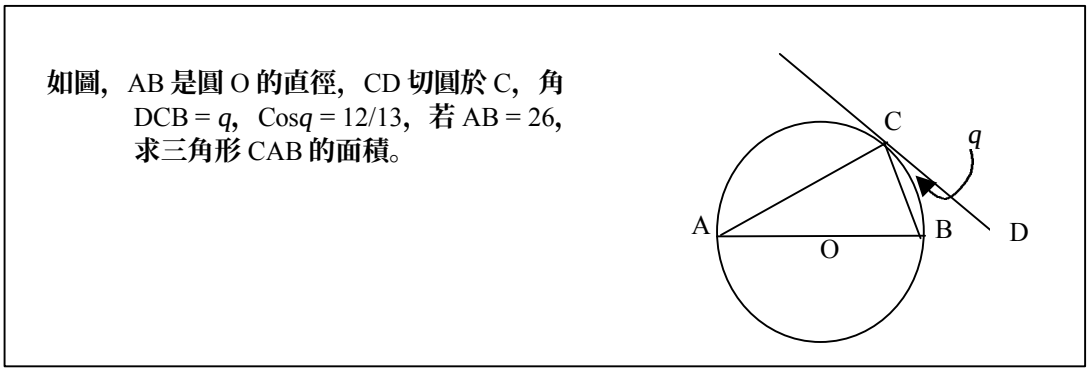


圖 6：範例題目

由以上說明可以看出，我們若將一個數學單元的知識內容加以適當的整理與分析，應可得出該單元所包含之相關數學函式、觀念或定理。以國中數學選修下冊「數值三角及應用」單元為例，我們採用了國民中學選修科目數學教師手冊下冊（國立編譯館, 1998）中之教材地位分析表做為教材內容定位的標準，同時也參考了其他書籍，並請教有經驗的國中教師之後，歸納整理出二十餘項與數值三角及應用相關的數學函式、觀念或定理，詳列於表 3 中。這些函式、觀念或定理即為系統的解題核心所需實作之解題函式，以供使用者用來解決該單元中的題目。因此，一個解題系統所包含之解題函式愈多，它所能解的題目自然也愈多。系

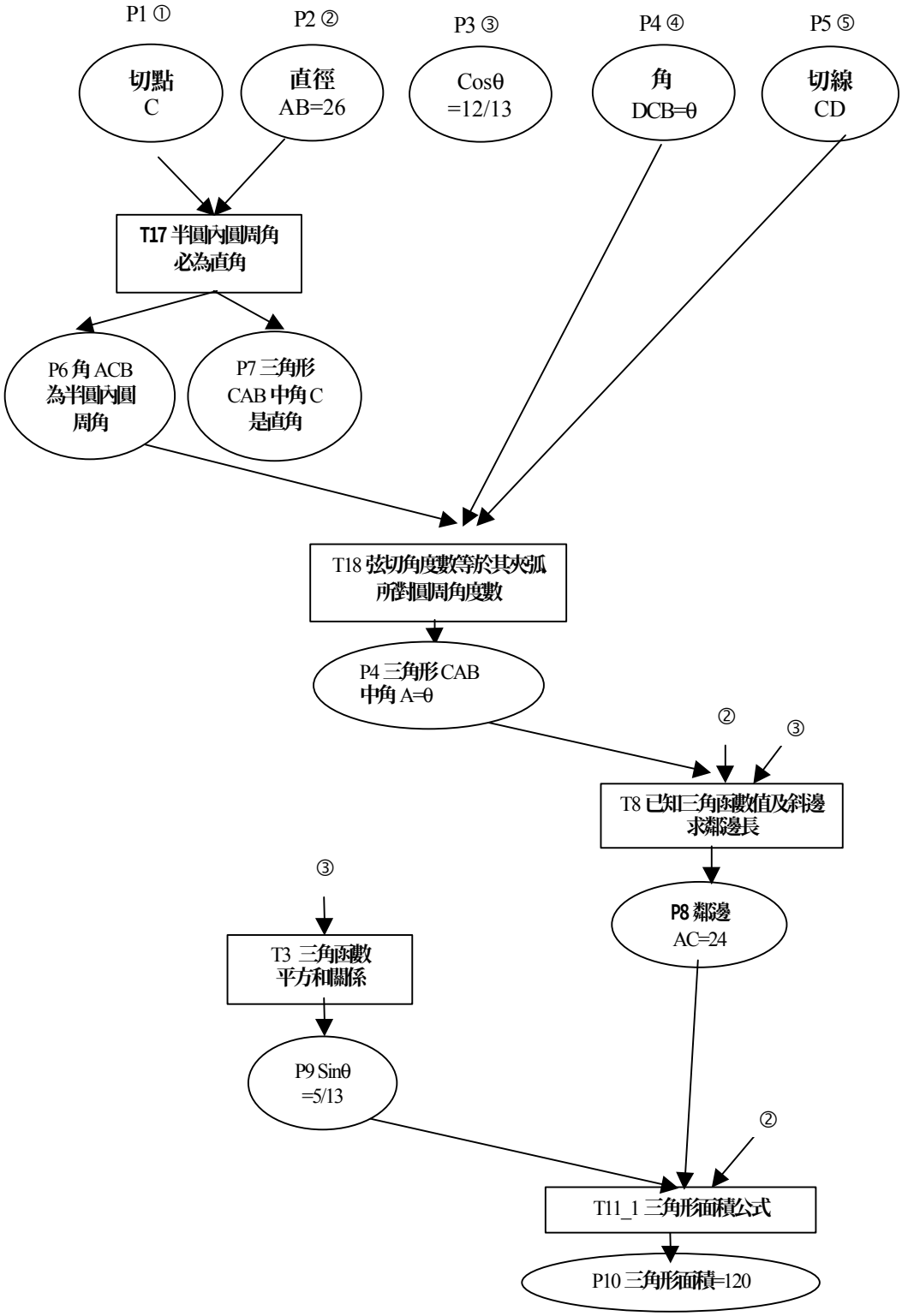


圖 7：範例題之派特里網路圖

表1：範例題「位置」所代表的意義

位置	所表示之解題條件	位置	所表示之解題條件
P1	切點	P2	直徑
P3	餘弦數值	P4	角
P5	切線	P6	圓周角
P7	直角	P8	鄰邊
P9	正弦數值	P10	面積

表2：範例題「轉變」所代表的意義

轉變	相關函式、觀念或定理	相關函式、觀念或定理性質
T3	三角函數平方和關係	
T8	已知三角函數值及斜邊求鄰邊長	
T11	三角形面積公式	T11_1：1/2*斜邊*鄰邊* Sin$q$
		T11_2：底*高/2
T17	半圓內的圓周角必為直角	
T18	弦切角度數等於其夾弧所對圓周角度數	

統發展者可以用同樣的方法分析整理其他數學單元之知識內容，並將其他的數學函式、觀念或定理陸續加入系統核心中，以增強解題系統的解題能力。

每個解題函式可依其用法找出其輸入條件與輸出條件。某些函式的用法較為單純，其輸入、輸出條件亦較為固定。但某些函式則在不同的解題情境中會有不同的使用方法。以「畢氏定理」為例，它具有 T0_1（已知兩邊長，求第三邊）和 T0_2（由三角形的三邊長判斷是不是直角三角形）這兩種使用狀況。第一種情況所需之輸入條件為兩個線段長，而輸出條件為另一線段長；至於第二種情況之輸入條件為三角形之三邊長，而輸出條件則為該三角形是否為直角三角形。

數學題目千變萬化，每一道數學題目所給予學生的解題條件亦是林林總總。為了簡化系統所需處理的條件數目，我們必須設法將解題條件進行分類。經仔細分析單元中之各種題型之後，我們發現在特定的解題範圍內，題目所給予的已知條件類型通常是有限的。以「數值三角及應用」單元為例，我們歸納出大約三十種解題條件類型，如表 4 所示。針對每一種解題條件類型，MathCAL 均設計一個輸入視窗讓學生將相關的數值輸入，以便系統將這些解題條件的資訊轉換成各種程式物件和資料型態，以利系統之運算與分析。

接著，我們可利用系統矩陣來表示解題條件與解題函式之間的關係，亦即派特里網路圖中位置與轉變之間的關係。以範例題為例，它所用到的 10 個位置以及 5 個轉變之間的關係可表示為表 5 之矩陣。至於解題系統所需建立的完整系統矩陣則為一個 m x n 之大型矩陣，其中 m 為系統所提供之解題函式之總數，n 則為解題條件之總數。至於矩陣中的數值則依以下之定義設定之：若 $p_i \in I(t_j)$，則利用「– (負號)」標記，並註明其數目；反之，若 $p_i \in O(t_j)$，則無需負號，只需標明其數目。(p, t, I, O 請參照上述派特里網路的基本定義)。

系統矩陣為 MathCAL 解題器的運作核心。

表3：數值三角及應用相關之函式、觀念或定理

編號	相關函式、觀念或定理	相關函式、觀念或定理性質
T0	畢氏定理	T0_1：已知兩邊長，求第三邊
		T0_2：判斷是不是直角三角形
T1	三角函數倒數關係	
T2	三角函數商數關係	
T3	三角函數平方和關係	
T4	互餘角關係	T4_1：求餘函數
		T4_2：求角度
T5	特殊角求三邊長比值	
T6	用邊長求三角函數值	
T7	已知三角函數值及斜邊求對邊長	
T8	已知三角函數值及斜邊求鄰邊長	
T9	已知三角函數值及鄰邊求對邊長	
T10	三角函數值設定其兩邊長比值關係變數	
T11	三角形面積公式	T11_1：1/2*斜邊*鄰邊* Sin θ
		T11_2：底*高/2
T12	三角形的三個內角和等於 180 度	
T13	最小邊長對應的角最小	
T14	等腰三角形性質	T14_1：已知一等腰三角形及兩腰找出頂角
		T14_2：等腰三角形的頂角平分線必垂直平分底邊
		T14_3：由相等兩邊判斷為等腰三角形
		T14_4：等腰三角形兩底角相等
T15	輔助線	T15_1：等腰三角形頂角平分線（高）
		T15_2：圓心到切點連線
T16	等角觀念	
T17	半圓內的圓周角必為直角	
T18	弦切角度數等於其夾弧所對圓周角度數	
T19	圓心與切點連線必垂直該切線	
T20	等弧所對圓周角相等	

當使用者想運用某解題函式進行解題時，系統會將學生所點選的已知條件送入此系統矩陣中，由系統矩陣去判斷這些已知條件是否足以觸發此解題函式。舉例而言，若已知一個三角形之三邊長，而學生在解題步驟區中點選了此三個邊長的值為已知條件，並想運用畢氏定理來判斷此三角形是否為直角三角形時，系統會將此三邊長所對應的位置和與該畢氏定理相關的轉變所需的輸入條件（亦即「位置」）做比對。比對的結果若顯示該轉變所需的位置都已涵蓋在學生所點選的已知條件中，系統就會將執行此解題函式所產生的中繼結果增列至解題

表4：「數值三角及應用」單元的已知條件類型

1. 某角是直角	2. 某角角度為何	3. 直線或線段性質
4. 三角形三線段比值	5. 直線方程式	6. 三角函數值
7. 兩線段關係	8. 等腰三角形三線段值	9. 三角形的高
10. 一線段為一圓的直徑	11. 直徑（半徑）	12. 特殊角（30°、45°、60°）
13. 三角函數的關係式	14. 一線段平分一角	15. 三角函數方程式
16. 兩圓圓心距	17. 一外公切線	18. 正五邊形
19. 梯形	20. 三邊成等差數列	21. 三邊成等比數列
22. $\sin A * \cos A$ 之值	23. $\sin A + \cos A$ 之值	24. 一線段切圓於某點
25. 切點	26. 不等式	27. 點座標
28. 首項、項數	29. 三角形	30. 三角形三個角比值

表5：範例題之位置與轉變間的關係矩陣

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
T3	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
T8	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	0
T11_1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	1
T17	-1	-1	0	0	0	1	1	0	0	0
T18	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0

步驟區的已知條件中。反之，若比對結果不符合，則系統會顯示適當訊息，告知學生其所點選的已知條件並不滿足運用該數學觀念之要求。

三、系統資料庫設計

資料庫的使用主要是希望達到知識共享、儲存、擷取、分析等目的。我們希望藉由知識共享的過程，使學習者可藉由觀摩系統中學科專家或其他學習者的解題經驗，來反思自己的解題過程。同時，我們希望將學習者操作系統過程中所產生的學習歷程資料，透過關聯式資料庫（relational database）的結構儲存起來，如此即可利用結構化查詢語言（Structured Query Language）撰寫查詢指令以擷取資料庫中的資料，並設計演算法來分析、探索資料中較深層的意涵。

MathCAL 採用雙重有向多重圖（BDGPN）的觀念來儲存解題知識。我們先將抽象、零散的解題步驟轉換成派特里網路圖，然後再將派特里網路圖形轉換成 BDGPN（讀者可參照圖 5 之左圖與右圖），接著即可根據 BDGPN 來規劃解題知識相關資料的實體關係圖（Entity-Relationship Diagrams）（Date, 1995）。由此所得之解題知識實體關係圖如圖 8 左下方內嵌之區塊中所示。

以上述方式儲存解題知識具有以下幾項優點：

(1)同質性的資料置於同一檔案中，有助於解題知識的整合、分析與擷取。
(2)檔案中的欄位係以「物件」的角度來規劃，便於資料的維護。
(3)正規化關聯式檔案的設計方式可避免資料重覆儲存所可能產生的弊病。
(4)能夠儲存系統進行診斷矯正所需之相

關資料。

(5)每個數學題目均可儲存兩種以上派特里網路圖所表示的不同解題方法。

(6)能清楚表示每個解題方法中轉變和位置間的關係，無須透過系統矩陣再做一次觸發處理。

(7)易於將所儲存的資訊回復成原來記錄解題過程的派特里網路圖形，不會造成資訊流失。

圖 8 的解題知識區塊中包含了「解題策略」、「解題條件」、「使用的解題函式」、和「輸出輸入條件」等四個實體集合（entity sets）。其中「解題策略」用來記錄系統所提供的所有解題函式資料；「解題條件」記錄了解題方法中所產生的位置資料；「使用的解題函式」是用來記錄解題過程中所觸發的所有函式代號及觸發這個函式時的相關資訊；而「輸出輸入條件」則在記錄觸發某個函式所需之輸入條件及執行該函式之後所產生的輸出條件。其中值得一提的是「使用的解題函式」實體集合中所包含的「關鍵性策略」屬性。我們在記錄每一個數學題目的每一種解題方法時，會同時記錄整個解題過程所引用的解題函式中，哪一個（或哪幾個）函式是解題關鍵所在。記錄此資訊的主要目的在於使系統於引導解題與提供矯正功能時可有較為明確的方向。至於此資訊之來源則是由專家解題者所提供，其輸入方式將於下一節描述題目編輯器之功能時一併說明。

除了上述與解題知識相關之資料外，系統資料庫尚須儲存數學題目、使用者資料、解題引導策略，使用者的動態解題過程等等。圖 8 顯示了 MathCAL 整個資料庫的實體關係圖。根據此圖所產生之關聯式資料庫檔案加以正規化（normalization）之後，即可用於儲存 MathCAL 運作所需的之資料。

由圖 8 可看出，MathCAL 之解題知識是以「解法編號」來做識別，而系統所儲存的題目則是透過「使用者的解題方法」這個關係（relation）來連結「解題方法」這個實體（entity），而後再進一步對應至系統的整個解題知識。系統所儲存的每一個題目都會在「解題方法」中註冊它的解題方法，以取得一個在系統中唯一的解法編號，並允許利用文字來描述這個解法的解題思考方向。

關於使用者部分，每個使用者除了會有一般的基本屬性，包括個人帳號、個人登入密碼、電子郵件帳號、使用者的層級之外，在「使用者的解題方法」中還會記錄使用者曾經解過的題目以及所曾使用的解題方法。「迷失解題策略類型」則記錄了使用者對於系統所有解題函式的使用情形與瞭解情形。「信件」實體則可儲存使用者和其他使用者之間意見交流的資料。在「筆記本」中，使用者可將每次完成解題的心得記錄下來，除能幫助使用者進行自我知識的內化之外，亦可提供使用者將來複習參考之用。這些和使用者息息相關的資料均是透過使用者在系統中所取得的唯一代號來進行橫向的連結。至於「波利亞引導策略」實體則是系統解題診斷矯正機制的一部分，它會根據「使用者的解題方法」以及「迷失解題策略類型」兩實體集合中的資訊提供適當之解題引導與學習資料。

四、解題診斷矯正機制

Pólya（1971）指出，當解題者陷入解題僵局時，可以藉由喚起解題者舊有的學習經驗來思考當前的問題解法。當解題者的舊有解題經驗不足時，則可採用其他解題者的類似解題經驗來引導解題者。MathCAL 的做法即基於此種理念。它的整個診斷矯正機制可概分為四階段：(1)學習者解題過程診斷，(2)解題過程引導，(3)學習者解題函式認知診斷，及(4)精熟學習引導。

在第一階段（學習者解題過程診斷）中，

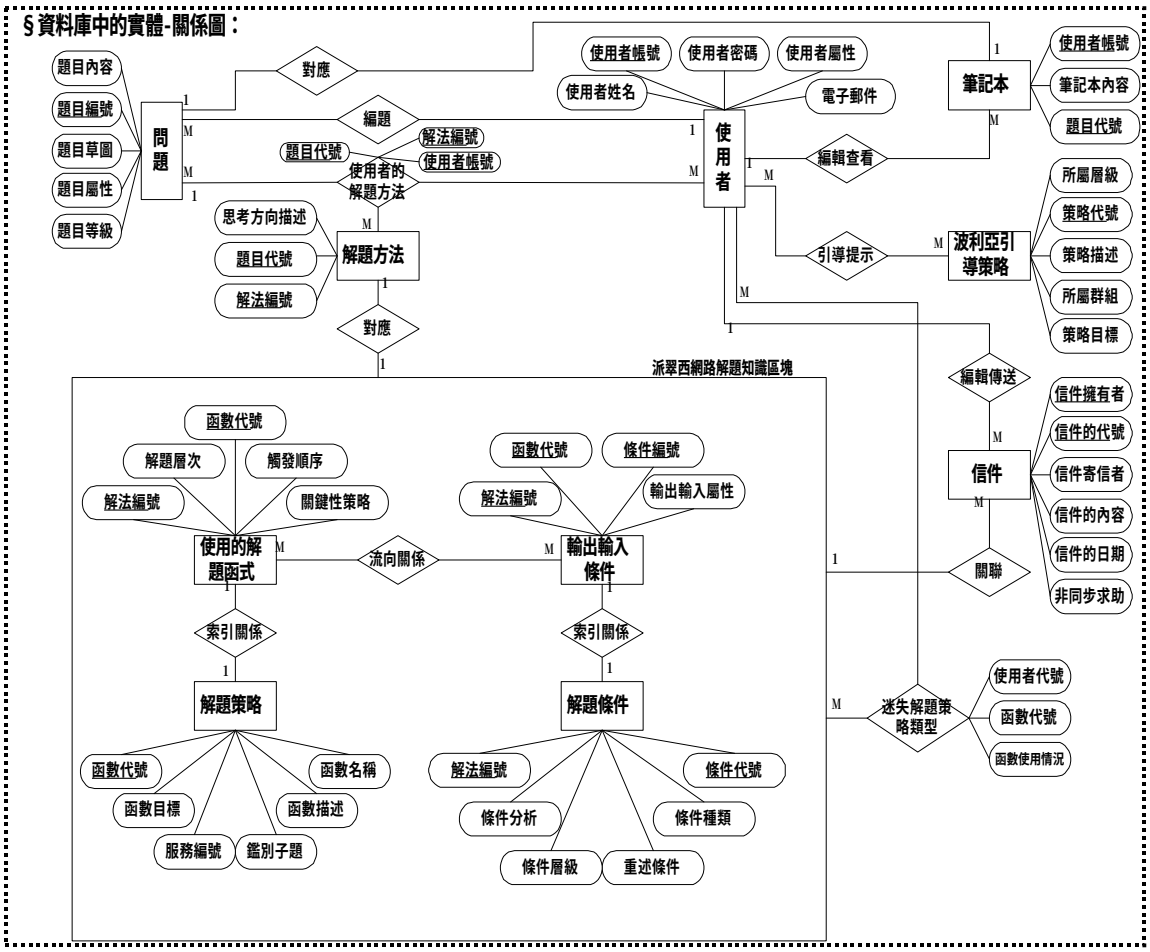


圖 8：MathCAL 整體資料庫的實體關係圖

我們採用以下三部份的組合來判斷學習者的解題階段：

(1)已知條件（以 K 表示）：分為「尚未產生」、「已產生但未完整」、「已完整」三種狀態。

(2)未知條件（以 U 表示）：分為「完整」、「未完整」兩種狀態。

(3)觸發的函式（以 T 表示）：分為「已觸發」、「未觸發」兩種狀態。

將以上三部份的狀態加以組合並排除其中五種無效的組合之後，將產生七種不同的情況，系統可進而針對各種情況推斷學習者陷入僵局的可能原因。舉例而言，若 K 為「已產生但未完整」、U 為「未完整」、而 T 為「未觸發」，則系統將據以推斷解題者不完全瞭解題意，因為學習者顯然尚未成功地將解題所需之已知條件輸入系統中。此時，系統將會協助學生重新思考問題，設法提醒學習者去找出「題目的已知條件是什麼？」、「題目的未知數是什麼？要求取什麼？」，並思考這些條件所隱含的意義是什麼。

當系統推斷出解題者陷入僵局的可能原因之後，即進入第二階段（解題過程引導）。此階段的主要動作是將系統所儲存之專家解題知識與學習者的解題資料相比對，期能據以提供適當的引導。以上述解題狀況而言，由於學習

者尚處於題意分析階段，因此系統可由資料庫中取出題目原有之已知條件以及重新詮釋之已知條件以顯示提示訊息。由於某些已知條件在表面上看不出與未知之間的關係，重新詮釋已知條件的目的在於幫助學生找出這樣的關係，或是根據題意的上下文轉換出別種解題意義，使得內隱的解題條件外顯化。表 6 所顯示的即為範例題的題目條件分析表。以已知條件 2 為例：CD 切圓於 C，重新詮釋出的已知條件「角 ACB 為半圓內圓周角」可幫助學生聯想三角形 CAB 為直角三角形的意涵。

若學習者已進入解題的中間過程（亦即當 *T* 為「已觸發」的狀態），則系統首需確定何種解題方法最適合用來引導學習者。在比對學習者的解題資料與專家的各種不同解題方法時，我們的主要考量在於解題者是否觸發了某種正確解法的關鍵性解題函式，其次再根據以下三個要素來決定最適當的解題引導：在所有解題方法中，何者所包含的使用者已觸發之解題函式的數目最多、何者顯示解題者已完成最高比率之解題步驟、以及何者距離完成解題尚需觸發的函式數目最少。我們所採用的演算法如下：

步驟 1：取出資料庫中該題目的所有解法。

步驟 2：若該題僅存在一種解法，則傳回該解法之編號；反之則執行步驟 3。

步驟 3：分析解題者之解題步驟，包括解題者曾使用過的解題函式以及這些函式在解題知識的層級。

步驟 4：由步驟 1 所得之解法中取出其一，分析該解法使用了哪些解題函式，其中哪些函式為關鍵性解題函式、以及使用者是否觸發了關鍵性解題函式、其使用的層級為何等等。

步驟 5：比較步驟 3 與步驟 4 的分析結果以判斷解題者未完成之解題過程尚需使用哪些函式，而後再取得解題者對這些解題函式的使用經驗，以訂定該解題方法對解題者而言的難易度。

步驟 6：重覆執行步驟 4 和步驟 5，直到計算出所有解法的難易度為止。

步驟 7：傳回對解題者而言難度最低的解題方法編號。

當系統決定將以哪一種專家解題方法引導學習者之後，仍須進一步分析學習者目前的解題狀態是屬於以下三種狀態之中的哪一種：(1)學習者一時不知下一步該朝哪個方向解題；(2)學習者雖然熟悉某個該觸發而未觸發的函式，卻不知可將其運用於此題中；或(3)學習者並不瞭解某個該觸發而未觸發的解題函式。此即第三階段（學習者解題函式認知診斷）的主要工作。為了判斷學習者的解題狀態，系統將採取漸進式的提示。首先，系統將告知學習者下一個應完成的解題次目標是什麼，讓他自行思考該使用哪個解題函式以達成該次目標。若學習者仍不知如何進行，系統即進一步由專家解題方法中找出下一個該使用的函式，明確地告知學習者可利用該函式進行解題。若學習者因而突破僵局，則系統可據以判定學習者瞭解該函式，只是先前不知可運用該函式解題；反之，若經過進一步的提示之後，學習者仍不知如何往下解題時，系統即進入第四階段（精熟學習引導）。換言之，系統將引導學習者先行熟悉解題所需的函式觀念。此階段除了提供相關函式觀念的文字與圖形說明之外，尚須由系統資料庫中取出適當的題目供學習者進行精熟練習，以幫助學習者熟悉該函式觀念，並進一步將其用於目前的解題步驟中。取出精熟練習題目之原則有二：(1)該題目之解題步驟中必須包括學習者所欲精熟練習之函式觀念，以及(2)該題之解題步驟中沒有包括學習者有認知困難的其他函式觀念。

在喚起解題者的舊有學習經驗方面，MathCAL 是藉由分析使用者的學習歷史來達

表6：範例題題目條件分析表

	題目原本之已知條件	重新詮釋之已知條件
1	AB 是圓 O 的直徑	直徑 AB 也是三角形 CAB 其中一個邊長
2	CD 切圓於 C	CD 為圓 O 的切線，C 為切點，角 ACB 為半圓內圓周角
3	角 DCB = q	角 DCB 為弦切角，且弦切角度數等於q
4	Cos q = 12/13	三角函數餘弦函數值 = 12/13
5	直徑 AB = 26	三角形 CAB 中，邊長 AB = 26

成。在上節所描述的資料庫設計中，透過「使用者」與其他實體集合的連結，即可將各個使用者的學習歷史做適當的儲存。利用這些資料，系統採用了以下演算法來提醒解題者其舊有之解題經驗：

步驟 1：判別解題者之身分及目前所解題目之題號。

步驟 2：依照該題目編號取得該題目所屬之類型。

步驟 3：判別該解題者的舊有成功解題經驗中是否存在該類型的題目。若是，則跳至步驟 4；否則即傳回不存在的訊息。

步驟 4：取出舊有經驗的題目，並提供給解題者參考。

當使用者成功地完成解題時，系統除了顯示解題成功的訊息之外，尚須將學習者這次的解題經驗加入他的解題歷史中，並詢問使用者是否願意輸入自己的解題心得。此外，系統還會提示學習者思索其他可能的解題方法。另外更重要的是，系統必須判別這個解題方法是否已存在於資料庫的解題知識中。若屬新的解法，則需新增這個解題知識，並建立該解題知識和資料庫中其他知識的連結關係，其程序如下：

步驟 1：取出資料庫中該題目所有解題方法的編號。

步驟 2：分析解題者使用了哪些函式、使用的層級為何。

步驟 3：取得步驟 1 所得之某一解題方法，分析該方法使用了哪些函式，以及函式的使用層級為何。

步驟 4：假設步驟 2 所得到的使用者解題資料為集合 A，而步驟 3 所取出之解題方法之解題資料為集合 B。若存在 $B \subseteq A$，則代表 A 和 B 在解這個問題的方法等價，B 為系統中已經存在的正確解題步驟，表示使用 B 就可以完整解出這個問題，而（A − B）則是使用者誤用（不該用但使用者卻用了）的部分。因此，A 解法並非新的解法。反之，若不存在 $B \subseteq A$，則重覆執行步驟 2 和步驟 3，直到每一個解法編號均驗證過了。若仍然不存在 $B \subseteq A$，則判定該解題方法為新的解題方法。

肆、系統架構與主要功能

一、系統架構

MathCAL 採用如圖 9 所示之三層架構。最下層客戶端（Client）亦即使用者瀏覽器端，任何可以讀取 Java applets 程式的瀏覽器都可被用來登入 MathCAL 系統。中間層是利用 Java application 設計的應用程式伺服器（application server），用來負責和客戶端進行連結，並處理客戶端所傳進來的要求。它同時負責和資料庫端連結，處理資料庫的存取。最上層是系統的資料庫端，用來存放相關的資料。

客戶端與伺服器端的連結必需藉由 Java 所提供的插座（Socket）來完成。在伺服器端，

我們為每一個連上 MathCAL 的使用者建立一個執行緒（thread）來處理他們的要求，而每個執行緒會建立兩個資料流：輸入資料流（input stream）與輸出資料流（output stream）。資料流為一記憶體緩衝區，當系統進行資料傳輸時，只需將資料寫入資料流中即可，無需再和 Socket 連結。在 Client 端也是同樣的處理機制。因此，MathCAL 在客戶端與伺服器端的溝通處理流程如圖 10 所示。

二、系統操作流程

MathCAL 目前之系統主畫面如圖 11 所示。整個畫面除了視窗上方之工具列圖示之外，共分為四個主要區域：左上方的題目內容顯示區、左下方的解題步驟顯示區、右上之解題工具區（含輸入條件選單以及解題函式選單）、以及右下之訊息傳遞區。使用者可由輸入條件選單中點選所欲輸入之條件類型，而系統則針對每一種條件類型提供了一個對應的輸入視窗供使用者輸入該條件之屬性。以「線段長」為例，視窗中將會要求使用者輸入兩個端點的名稱、線段長數值等等。使用者所成功輸入之解題已知條件將會顯示在解題步驟顯示區。當使用者欲使用某個解題函式進行解題時，首先由顯示區目前已有的條件中勾選這個解題函式所需之輸入條件，而後再由解題函式選單中選取所欲使用之函式。系統在處理此一解題動作時，將首先檢查使用者所勾選的條件是否符合觸發該解題函式所需之輸入條件，若然，則觸發該函式並將該函式之輸出結果加入解題步驟顯示區的已知條件中，否則便顯示錯誤訊息提示使用者重新勾選輸入條件。整個解題過程就在❶解題者輸入已知條件、❷點選已知條件、❸選擇欲觸發的解題函式、❹產生中繼條件等四個步驟中循環地進行，直到解題者完成解題為止。

當使用者要求系統進行解題引導時，系統將判斷使用者的解題狀況和對解題函式的瞭解

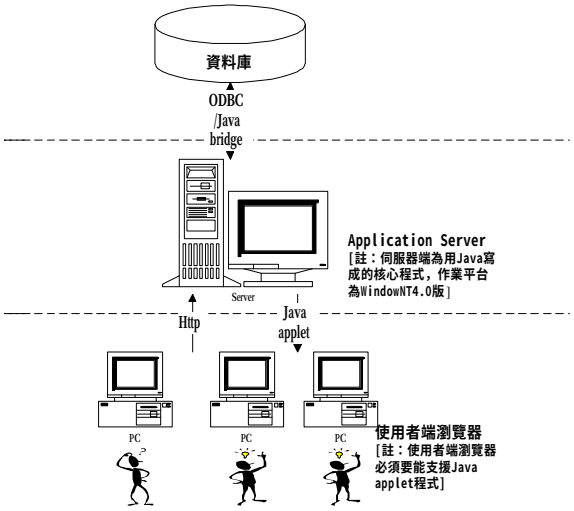


圖 9：MathCAL 的系統資料庫連接圖

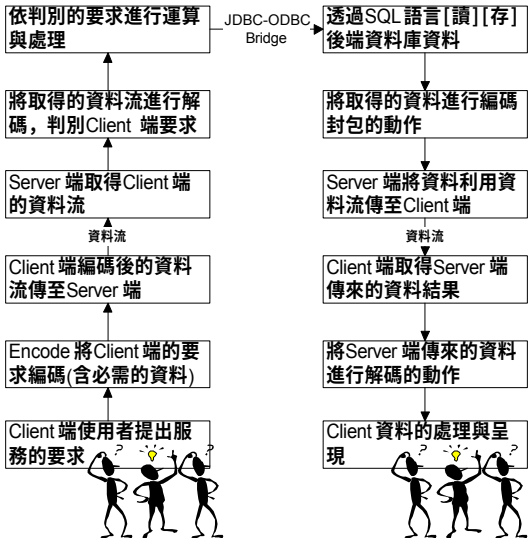


圖 10：客戶端與伺服器端溝通處理流程

情形，並給予提示。圖 12 即為一例。若使用者仍要求系統進一步提示，則系統將顯示該函式的相關知識供使用者學習（如圖 13、14），或進一步由資料庫取出與該函式相關的題目供使用者選取練習（如圖 15）。

若使用者有意向其他的系統使用者求助，它可由工具列中啟動同步或非同步求助。同步求助乃是由系統將目前在線上的其他使用者名

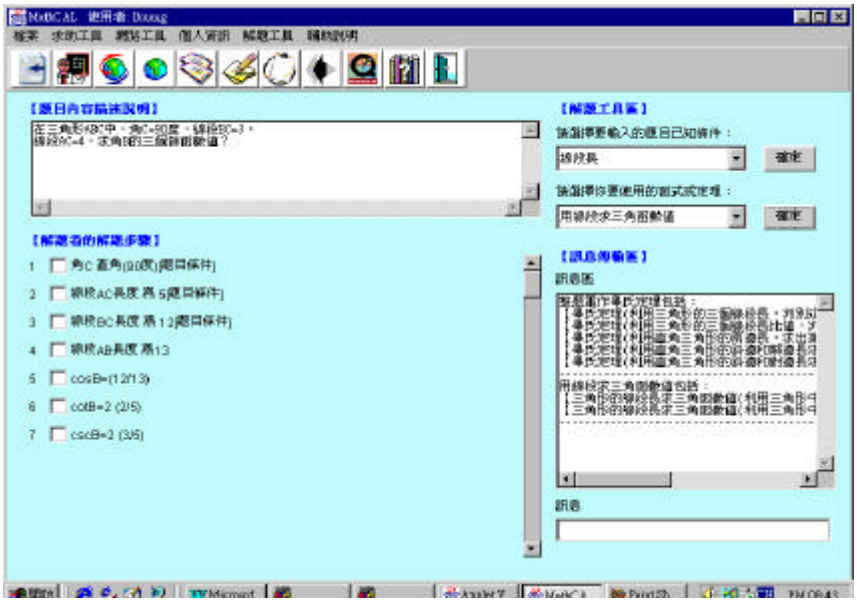


圖 11：MathCAL 系統主畫面

單顯示出來供使用者選擇欲求助之對象。若對方同意協助，系統即會建立兩者之間的連線，並將求助者這一端的畫面傳輸給對方，使對方可以看到求助者的解題畫面。如此，對方即可透過訊息傳遞區指示求助者如何解題，並同步觀察求助者這一端的解題情形。

至於非同步求助則是以電子郵件向他人求助。在信件中，使用者可以附上所要求助的題號以及他目前的解題過程，再加上必要的信件內容描述，如圖 16 所示。解題過程的傳輸方式是當求助者按下畫面上的「解題過程」按鈕時，系統就會將系統內部所記錄的解題過程轉換為條列式的步驟敘述並附加在信件內容中寄出。當系統收到求助者的信件之後，它會將該信件內容加以儲存，並寄發 email 給收件者，通知他進入 MathCAL 系統接收信件。

當被求助方收到求助信件時，他可以利用系統的解題器將解題過程在系統中執行一次，MathCAL 系統會主動抓取該解題過程的資訊，並將必要的解題過程轉換成文字敘述傳送給求助者，如圖 17 所示。

三、題目編輯器

為使系統所儲存之題目能不斷擴增，以提高學習者的使用興趣，MathCAL 設計了題目編輯器（如圖 18），讓學科專家或教師可隨時將題目新增至題庫中供學生練習。由題目編輯器界面可看出，題目編輯者除了必須輸入題目內容之外，尚須輸入題目的難易等級以及題目類型。若題目中須附上圖形時，編輯者可利用一般的繪圖軟體將圖形畫好之後，按下「上載插圖」的按鈕以載入圖形。另外更重要的是，當題目編輯者完成題目內容的輸入之後，必需將這個題目的解題過程利用解題器示範一次，並根據系統的提示輸入與解題過程相關的訊息，例如哪些函式是關鍵函式、哪一個步驟應該使用何種提示等等。這個步驟的主要目的是讓系統能夠立即取得該新增題目的解題知識，以便其他解題者隨後選取該新增題目進行練習時，系統可有初步的資訊提供解題引導。因此，MathCAL 不僅具有新增題目的機制，此機制亦確保了解題知識將同步新增至其知識庫中。



圖 12：解題提示訊息

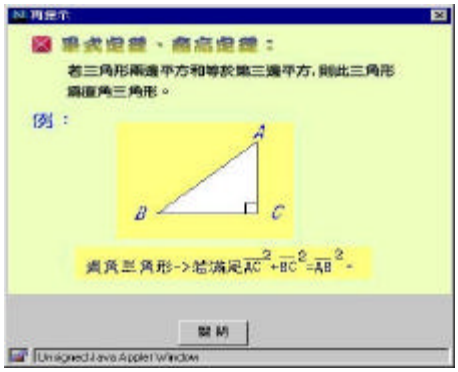


圖 13：解題函式相關知識 (一)

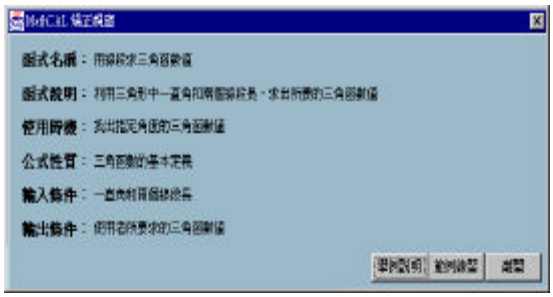


圖 14：解題函式相關知識 (二)

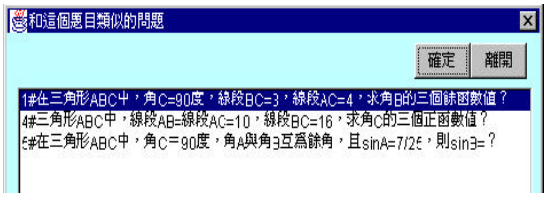


圖 15：與解題函式相關的練習題目

伍、結論與未來研究方向

本文中我們提出了以派特里網路為理論基礎所設計的一個數學解題練習系統之雛形。它可將專家與學習者之解題過程完整地記錄於系統的資料庫中，以便於必要時提供解題引導。它同時提供了網路上同步與非同步的溝通機制，使學習者可獲得網路上其他使用者的協助而達到合作學習與知識共享的目的。系統所提供的題目編輯器使系統所儲存之題目和解題知識可與時俱增，而資料庫中對於解題知識與使用者解題歷史之記錄則使系統可因而提供較為適切之引導與矯正。

然而，以 MathCAL 目前之發展狀況而言，僅堪稱雛型底定，距離可實際上線供學習者使用仍有兩大方面亟待加強。首先是知識領域的擴充，換言之，系統所能處理的知識範圍必須夠廣，所儲存的題目必須夠多，方能充分發揮其解題練習之功能；而在建立數學知識庫時，必須力求所儲存之數學知識的正確性與完整性，方足以提供適當的解題引導。目前 MathCAL 所能處理的知識範圍僅及於國中數學的三角函數單元，且所儲存題目之題型與數量均有待擴增。在後續開發正式版本的解題系統時，我們將尋求學科專家的共同合作，進行各單元之知識分析與題目收集，以加強系統知識庫中數學知識的質與量。

其次，任何電腦軟體無論其功能再強，若無良好的界面設計，將無法為使用者所青睞。我們過去幾年來著重於 MathCAL 系統內部功能之研發，並未在使用者界面設計上多所著力。若能重新仔細規劃 MathCAL 的界面，配合中學生之操作習慣與喜好加上親和性甚至趣味性的包裝，將更能引起使用意願。而當這兩方面得以完成之後，後續的主要工作則為學習者使用本系統之學習成效探討。這些都是我們目前仍在繼續努力的方向。



圖16：求助信件



圖 17：帶有解題過程的回覆信

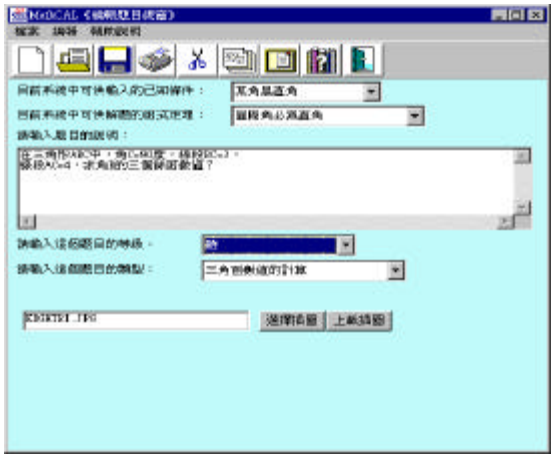


圖18：MathCAL的題目編輯介面

此外，本文所述之設計理念其實亦可用於其他知識領域。我們只要根據領域知識分析的結果賦予派特里網路之轉變與位置不同的意義，便可將 MathCAL 之解題機制同樣用於其他領域的解題。盧思靜（2001）曾以國中物理之「牛頓運動定律」單元為知識領域，發展了一套物理解題系統之雛形，初步驗證了派特里網路理論亦可用於塑模物理解題過程。若能進一步探討派特里網路的運作機制在社會科學領域的決策分析與支援能力，亦將是頗具意義的研究方向。

致　　謝

本研究承蒙中華民國國家科學委員會之研究經費補助，計畫編號為 NSC-88-2520-S-003-002、NSC-89-2520-S-003-001、以及 NSC-89-2520-S-003-007，特此致謝。

參考文獻

1. 林碧珍（1989）：國小學生數學解題的表現及其相關因素的研究。台北市：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。
2. 侯鳳秋和陳龍川（1999）：適性 CAI 的個人化文意範例對國小學生解數學文字題的影響。科學教育學刊, 7(3), 233-254。
3. 孫茂鑫（1997）：以派翠西網路為基礎之數學解題系統－高中數學之「圓」單元。台北市：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。
4. 孫鵬宗（1998）：一個網路化的數學解題系統－國中數學之「三角函數」單元。台北市：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。
5. 許金葉（1999）：以派翠西網路為基礎的數學解題診斷矯正模式。台北市：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。
6. 黃正志（1997）：問題解決式數學科教學軟

體解題流程分析－運用派翠西網路。台北市：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。
7. 黃瀧輝（2000）：MathCAL 的資料庫設計。台北市：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。
8. 國立台灣師範大學科學教育中心（1984）：各國數學及自然科學課程研究。台北市：國立編譯館。
9. 國立編譯館（1998）：國民中學選修科目數學教師手冊。台北市：國立編譯館。
10. 教育部（2002a）：國民教育行政資訊傳播網（國民中學數學課程標準）。2002 年 9 月 20 日，取自 http://www.eje.ntnu.edu.tw/k-search/k-mainframe.htm。
11. 教育部（2002b）：學習加油站。2002 年 9 月 20 日，取自 http://content.edu.tw/index.html。
12. 溫亦剛主編 (1990)：怎樣學好數學。台北市：九鼎出版社。
13. 楊弢亮（1992）：中學數學教學法通論。台北市：九章出版社。
14. 楊維哲和沈長庚 (1990)：大專數學 (上冊)。台北市：東華書局。
15. 盧思靜（2001）：數理科解題系統設計。台北市：國立台灣師範大學碩士論文（未出版）。
16. 戴建耘（1996）：虛擬教室遙端線上練習之系統建構與控制模式研究。台北市：國立台灣師範大學博士論文（未出版）。
17. 繆龍驥譯（1988）：現代數學初步（Ruric E.Wheeler 原著）。台北市：國立編譯館。
18. 鐘貴兒（2002）：美國新數學課程標準。2002 年 9 月 20 日，取自 http://www.tw.org/wave/cs1.txt。
19. Abidin, B., & Hartley, J. R. (1998). Developing mathematical problem solving skills. *Journal of Computer Assisted Learning, 14*(4), 278-291.
20. Birmingham Advisory & Support Service [BASS] (2002). *Software to Support Mathematics Teaching*. Retrieved September 20, 2002 from http://atschool.eduweb.co.uk/ufa10/softmath.htm.
21. Booch, G. (1994). *Object-oriented analysis and design with applications*. (2nd Ed.). New York: Addison-Wesley Publishing Company.
22. Burton, R. R., & Brown, J. S. (1982). An investigation of computer coaching. In D. H. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (pp.79-98). New York: Academic Press.
23. Cardelle-Elawar, M., & Wetzel, K. (1995). Students and computers as partners in developing students' problem-solving skills. *Journal of Research on Computing in Education, 27*(4), 387-401.
24. Campione, J.C., Brown, A.L., & Connell, M.L. (1989). Metacognition: On the importance of understanding what you are doing. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.93-114). Hillsdale, NJ: Erlbaum Publishing company.
25. Chen, Y., Horng, T. A., & Yang, D. (2000, November). *A Java-based interactive learning system of junior high school level geometry*. Paper presented at the 8th International Conference on Computers in Education, Taipei, Taiwan.
26. Collins, M., Carnine, D., & Gersten, R. (1987). Elaborated corrective feedback and the acquisition of reasoning skills: A study of computer-assisted instruction. *Exceptional Children*, *154* (3), 254-262.
27. Date, C. J. (1995). *An introduction to database systems* (6th Ed.). New York: Addison-Wesley Publishing Company.
28. Drexel University (2002). The Math Forum @

Drexel. Retrieved September 20, 2002 from http://www.mathforum.org.

29. Edwards, T. G. (1994). *Current reform efforts in mathematics education. ERIC Digest.* (ERIC Document No. EDO-SE-94-5).
30. Educational Software Cooperative [ESC] (2002). *ESC Software Library*. Retrieved September 20, 2002 from http://www.edu-soft.org/library/index2.shtml#MATH.
31. Garofalo, J., & Mtetwa, D. K. (1990). Implementing the standards: Mathematics as reasoning, *Arithmetic Teacher, 37*(5), 16-18.
32. Greene, B. D., Herman, M., & Haury, D. L. (2000). TIMSS: What have we learned about math and science teaching? *ERIC Digest.* (ERIC Document No. EDO-SE-00-05)
33. Grouws, D. A., & Cebulla, K. J. (2000a). Improving student achievement in mathematic part1: Research findings. *ERIC Digest.* (ERIC Document No. EDO-SE-00-09)
34. Grouws, D. A., & Cebulla, K. J. (2000b). Improving student achievement in mathematic part2: Recommendations for the classroom. *ERIC Digest.* (ERIC Document No. EDO-SE-00-10)
35. Kieran, C. (1996). *The changing face of school algebra.* Invited lecture given at the 7th International Congress on Mathematical Education. Retrieved December 20, 2001 from http://www.math.uqam.ca/_kieran/art/algebra.html.
36. Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.3-38). New York: Macmillan Publishing Company.
37. Lin, J. M.-C., Juang, J.-Y., & Sun, P. (1999, March). *An Internet-based CAL software for solving trigonometric problems*. Paper presented at the International Conference on Mathematics/Science Education and Technology, San Antonio, Texas.
38. Lin, J. M.-C., Juang, J.-Y., & Sun, P. (2000a, February). *Representation of problem-solving procedures in MathCAL*. Paper presented at the International Conference on Mathematics / Science Education and Technology, San Diego, CA.
39. Lin, J. M.-C., Hsu, C.-Y., Huang, K.K., & Juang, J.-Y. (2000b, November). *MathCAL's diagnostic sub-system*. Paper presented at the 8th International Conference on Computers in Education, Taipei, Taiwan.
40. Lin, J. M.-C., Huang, L.-H., Huang, K.K., & Juang, J.-Y. (2001, June). *MathCAL and its database design*. Paper presented at the World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia & Telecommunications, Tampere, Finland.
41. Liu, L. (2000, February). *PCLego and mathematical thinking processes*. Paper presented at the International Conference on Mathematics/Science Education and Technology, San Diego, CA.
42. Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L., & Smith, T.A. (1998). *The mathematics and science achievement in the final years of secondary school.* Retrieved September 20, 2002 from http://timss.bc.edu/timss1995i/MathScienceC.html.
43. Nakano, A., Murakami, N., Hirashima, T., & Takeuchi, A. (2000, November). *A learning environment for problem posing in simple arithmetical word problems*. Paper presented at the 8th International Conference on Com-

puters in Education, Taipei, Taiwan.

44. The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and* evaluation *standards for school mathematics*. Retrieved September 20, 2002 from http://-standards.nctm.org/Previous/CurrEvStds/index.htm.
45. The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Retrieved September 20, 2002 from http:// standards. nctm.org / document / prepost / cover.htm.
46. Özgün-Koca, S. A. (1998). Technology in mathematics education Internet resources. *ERIC Digest*. (ERIC Document No. EDO-SE-98-06)
47. Peterson, J. L. (1981). *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Englewood Cliffs, N. J: Prentice-Hall, Inc.
48. The Petri Nets World (2002). Online services for the International Petri nets community. Retrieved September 20, 2002 from http:// www.daimi.aau.dk/PetriNets/.
49. Pólya, G. (1971). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.
50. University of Minnesota (2002). The Geometry Center. Retrieved September 20, 2002 from http://www.geom.umn.edu/.

A CAL System for Practiceing Mathematical Problem Solving: The Underlying Design Concepts

Janet Mei-Chuen Lin, Jie-Yong Juang, Ponson Sun, Chin-Yeh Hsu, Long-Hwai Huang, Szu-Ching Lu and Kevin K. Huang
Department of Information and Computer Education
National Taiwan Normal University

Abstract

This paper describes the prototype of an Internet-based computer- assisted-learning system that allows learners to practice mathematical problem solving. Petri nets are used by the system as its knowledge representation model. Math knowledge within a chosen domain is pre-analyzed to derive a set of macro functions for use in solving problems. Each macro function typically embodies a math concept or rule that may be applied to transform a math problem from a state to another. The macro functions correspond to *transitions* in a Petri net graph, while the conditions for triggering those functions correspond to *places*. With Petri net graphs, the system can store experts' static problem-solving knowledge as well as learners' dynamic problem-solving procedures. The graphs may then be used effectively for diagnosing learners' problem-solving difficulties and for offering guidance. The system also supports synchronous and asynchronous network communication functions that may be used by learners to solicit help from other system users. Users may add new problems to the problem bank with the system-provided editor. In addition, the system can automatically detect new solution paths to any old or new problem and augment the system's knowledge base accordingly.

Key words: Object-Oriented Design, Petri Nets, Computer Assisted Learning, Mathematical Problem Solving, Relational Database Systems.