科學教育學刊
2003, 第十一卷第三期, 235-256

Chinese Journal of Science Education
2003, 11(3), 235-256

實踐小學因數教學模組之研究

劉祥通[1]　黃國勳[2]
[1]嘉義大學 數學教育研究所
[2]嘉義縣 南新國小

（投稿日期：民國90年12月26日，修訂日期：91年6月3日，接受日期：92年4月11日）

摘要：本研究的目的是實踐已發展的因數教學模組，以檢閱學生學習因數的效果。透過合作行動研究的方式，由研究者、一位數學教育學者和一位合作教師，進入二班五年級的教室現場。因數教學模組分為起始、發展和檢驗活動三部份。本研究發現：(一)起始活動-實施動態的教學活動使學生比較容易理解整除與因數的意義。(二)發展活動-操作具體物的教學活動，以強化學生整除與因數的概念。(三)檢驗活動–藉由趣味化的遊戲活動，促進學生主動學習，確保學習成功。

關鍵詞：因數、合作行動研究、教學模組、創新教學。

壹、研究背景與目的

過完暑假，又要回頭教五年級了！雖然今年已是第六度擔任五年級的級任老師，但一想到「因數」的單元，仍令我不由得頭痛起來。因為每次教因數時，雖然費盡唇舌的講解，台下的學生卻猶如置身五里霧中，因數的意義對他們來說似乎很難理解。而與教育界同仁的討論，也大多認為「因數」是學生學習數學倍感困難的單元之一，教學時很難讓因數的意義具體化。這是因為因數的概念相當抽象，在學生的生活經驗中也缺乏與因數概念結合的活動。尤其對剛從四年級升上五年級的學生而言，確實是一個很大的挑戰，比以往需要更多的思考與推理（康軒教學指引第九冊, 2001）。

以研究者的教學經驗來看，剛升上五年級的部份學童，學習因數概念時往往因為乘除法計算能力不足，以致求因數時發生計算錯誤的情形；另外，從解題和運算來看，求某一個數的因數時，不像加、減、乘、除或四則運算只是求得一個合理的答案，求因數則必須逐一判斷或運算，以「窮盡」一個數可以被整除的所有情況，若有遺漏答案便殘缺不完整了（黃國勳和劉祥通, 2000）。雖然我們可透過乘除的互逆關係來減輕學生繁複的運算過程：甲＝乙×丙 → 甲÷乙＝丙 → 甲÷丙＝乙，得到丙是甲的因數，乙也是甲的因數。但程度稍差的學生卻仍然無法理解乘除互逆的關係，雖然知道算式 $48 = 2 \times 24$ 或 $48 \div 2 = 24$，卻只知道 2 是 48 的因數，不知 24 也是 48 的因數。因而無法學會簡化運算的技巧。由此看來，因數

問題在解題和計算上確實較為繁雜，粗心的學生常有解題和運算錯誤的情形，程度較差的學生更是常常陷入學習的困境！

國內有若干研究顯示：學童在學習因數時存有若干迷思概念（林珮如, 2002），無法理解因數概念（蕭金土, 1995），以致產生學習上的瓶頸（陳清義, 1995）。同時陳清義（1995）也發現教材中部份概念練習出現次數太少，建議教師應自行設計補充教材。而學童若無法形成完整正確的因數概念，將不利於往後數學的學習，因此教師應佈置一個有利的學習情境，來幫助學生了解因數的意義。

九年一貫課程的列車已從今年正式啟程了，新課程中特別強調的「學校本位課程發展」，改變了原有課程發展模式，將自行編製教材、發展課程的權力還給教師。編製教材或設計課程的方式有很多，其中教學模組的設計個人認為最具實用性。因為教學模組係透過一系列的教學活動來發展學生的數學概念，使學生獲得完整的知識。此外，教師也可以視個人需求調整教學模組的實施方式，進行教學時有很大的彈性空間。因此，研究者設計「因數教學模組」，試圖經由教學模組的教學實踐，使學生樂於學習數學，並能了解因數的意義，形成正確與清晰的因數概念，以利日後因數相關教材的學習。

合作行動研究（cooperative action inquiry）能充分發揮理論與實踐結合的功能（甄曉蘭, 1995），近年來逐漸在教育研究領域受到重視與肯定。因此，二位研究者在尋得合作教師老師後，便決定採用合作行動研究做為本研究的研究方法，希望透過共同討論、反覆辯證和省思的方式，探討學生因數學習的效果。

綜合以上所述，學生學習「因數」概念時確實發生困難，為解決此一問題，研究者透過合作行動研究的方式，將已經發展完成的因數教學模組付諸實踐，以探討學生的學習效果。

貳、文獻探討

本研究的主要目的是經由合作行動研究的方式，探討研究者發展因數教學模組實踐教學的學習效果。以下首先闡述教學模組的意義，其次則做教材的分析，最後探討五年級學童學習因數概念困難的原因。

一、教學模組

九年一貫課程是我國新世紀的希望工程，亦是教育改革的重大突破。新課程特別倡導學校本位課程發展，強調課程權力的下放，它是一種由學校教育人員所發動的草根性活動和自主性活動（高新建, 1998），是一種「由下而上」的課程發展模式，目的在於發展適合學校內學生的課程設計。在學校本位課程發展過程中，站在第一線的教師最了解學生的需求，自然是教學的主導者，更是參與課程的決策者。而教學活動是課程設計的一部份，以此論之，教師當然負有設計教學活動與發展教學模組的權責。

Goldschmid 和 Goldschmid（1972）對模組（module）的定義是：「一個獨立的單元，用來協助學生完成某種明確的目標（objective）」。因此，模組是一個以單一概念為主題單元的教學計畫（Russel, 1974）。它的功能在於提供許多目標明確的單元，讓教育者可以自行組合以達成更大的任務與較長期的目的（Warwick, 1987）。陳文典（2001）則認為「教學模組」是一個以「探討及解決議題」所組成的教學活動，在探究的過程中，師生可以視實際的需求自由選擇與運用，最後的目的是使學生能夠對「議題」有更切實的認識，或獲得更精湛的技能。簡單的說，教學模組是一個主題式教學的概念，具有獨立與目標明確的特性。當我們將模組設計應用於教學時，也就是對某一主題進行探究的活動，學生藉此活動獲得各項技能、概念與應用性的知識。

從教學內容來看，教學模組是一種重新建構的教材，目的是為了解構刻板化的教科書，或取代教科書中不適切的編排方式與內容。就形式而言，教學模組是一個主題式教學，內容上包括若干個相關的「子問題」。而子問題的組合，需根據教學者的特定目的而分解重組；子問題的多寡可因教學目標與教學時間做取捨（黃鴻博, 2000）。也就是說，教學模組就像一個由許多教學活動（元素）所組成之有主題的「集合」。在此主題之下，教學者可視實際教學狀況抽取部份「元素」形成一個新的「子集」進行教學（姚如芬, 2001）。從教學方式來看，教學模組的教學沒有固定的形式，可以以實驗活動、參觀活動、主題調查報告、分組討論或舉辦展覽、比賽……等等的方式來進行教學活動，也就是依照所選取模組的特性，靈活的運用各種教學方式（陳文典, 2001）。

由於教學模組具有獨立的特性，教學者可以依照自己的教學目標、教學時段和選擇的教學資源，組織模組所欲達成的目標，這樣的課程設計不僅給教師自由、彈性的教學空間，也可以使學習者的學習經驗能夠有系統的組織起來，獲得統整的知識。在模組教學過程中，教師除了活潑教學之外，也需準備各種評量的測驗或活動，隨時檢核學生學習的進步情形與困難，作為回饋，俾能順利完成預期的目標（林生傳, 1988）。

總結言之，教學模組是由一個個獨立的小單元所組成的套裝教學計畫，教學時可依照學生學習的需要予以分解或重組，也可以增添或減量，讓教師能靈活的進行教學與評量，使學生獲得完整的知識，因此，具有自由化、彈性化、系統化和目標明確的優點。

二、教材分析

什麼是因數呢？在國小數學中因數的討論是以正整數為範圍，民八十二年課程將因數定義為：指定一個正整數，哪些正整數為單位量是可以乘法性的合成這個指定的正整數（台灣省國民學校教師研習會, 1997）。例如：探討 8 的因數時，一個「8」是 8；二個「4」是 8；四個「2」是 8；八個「1」是 8。「8」、「4」、「2」、「1」這些單位量都是可以乘法性的合成「8」，稱之為 8 的因數。也就是說，因數問題是向內探討組成一個正整數的單位量。

因數是以除法原理（若有 a、b 兩個正整數，則必可找到 q、r 兩個非負整數，滿足 $a=b\times q+r$ 的關係，且 $b>r\geq 0$。也就是一般所熟知的：被除數 = 除數 × 商 + 餘數，其中餘數大於或等於零且小於除數。）為基礎，透過判斷 a 是否能被 b 整除（餘數是否為 0）的方式，引入因數的定義（台灣省國民學校教師研習會, 1997）也就是使用除法的觀點，由總量為問題的起點，探討可能組成的單位量，來定義因數的意義。以總量 12 為例，12 以「2」為單位量來描述，12 共有六個「2」，能夠以「2」為單位量來組成 12。可是改用「5」為單位量來描述時，12 無法用整數個「5」來組成（只有在整數範圍內討論因數的意義），所以無法以「5」為單位量來組成 12。透過 12 可以由「1」,「2」,「3」,「4」,「6」,「12」這些單位量組成的方式，引入因數的概念（謝堅, 1997）。

從因數的教材地位來看，因數單元安排在五年級的課程，學習它的先備概念是三、四年級教材中有關乘、除法的知識。而因數概念是學習等值分數的先備知識，也是比例概念的基石（劉祥通和周立勳, 1999），更是往後學習因式、倍式、多項式、因式分解、數列與級數的重要基礎。學童若無法了解因數的意義，往後學習比較高階數學時，恐會產生新舊知識銜接困難的問題。

三、因數概念學習困難之分析

因數概念對於五年級學童發生學習困難的

原因，可以從以下五方面來探討（黃國勳和劉祥通, 2003）：

(一)從先備知識來看，由 Vergnaud（1983）提出乘法概念域（multiplicative conceptual field，簡稱 MCF）的觀點，我們可以說乘法、除法與因數概念的關係是密不可分的。以因數的概念階層來看，因數是由整數的乘除法等幾個元素所組成，這些組成的元素為「子概念」或「下屬概念」（sub-concept）。相對的，因數概念則為其子概念的「上位概念（super-concept）」。因此，因數可說是由複雜概念所組成之更複雜更抽象的概念。學生若不能了解因數概念的下屬概念，即未具備學習因數的「先備能力」，當然無法了解因數概念。由以上分析可知，要了解因數概念最重要的下屬概念是整數的乘除法，學生若未具備整數乘除法的能力則學習因數時會產生困難（劉秋木, 1996）。舉例來說，要「窮盡」所有的因數，對整數乘除法計算能力的不足的學童而言，真是一個「艱苦」的歷程。

(二)從認知運思能力來看，雖然我們可以透過具體物的操作來幫助學生了解整除的意義，再由整除來說明因數的意義，但因數的意義還是不易直接透過觀察來獲得。也就是說，因數屬於二階層的概念，它是由整除概念抽象後再抽象而得，因此學生較難透過具體物的操作來表現他是否懂得因數的概念，他必須運用語言或文字說明因數的屬性或定義。然而剛升上國小五年級學童尚處於具體運思期，他們的推理思維能力只限於眼見的具體情境或熟悉的經驗（張春興, 1996），因此對於因數概念的學習是感到困難的。另外，學童能理解「3 是 12 的因數」的意義，是將「12」看成是「3」的集聚單位，或是（3、3、3、3），且能將「3」是看成是「1」的集聚單位，或是（1、1、1）。換言之，對於 12 與 3 的關係來說，3 是 12 的部分，12 是 3 的全體，對於 3 與 1 的關係來說，1 是 3 的部分，3 是 1 的全體，也就是掌握了兩個階層的「部份－全體運思」。這樣的數學運思能力即為國內學者甯自強（1994）所提出的測量運思（measurement operations）。但是，部分五年級學童測量運思能力尚未發展完全（周立勳和劉祥通, 1997），因此比較不容易理解因數的概念。

(三)從語意理解來看，Brainbridge 曾指出：學生在學習數學時，會因為無法理解特定的專有名詞，導致基本概念混淆不清，造成學習上的障礙（引自陳麗玲, 1992）。Mayer（1983）也強調：當學生對數學名詞或字彙不甚了解時，會因為語意知識的不足和錯誤，影響了他對問題的轉譯與解碼，造成解題上的錯誤。學童在學習因數概念時，對於「能整除、被整除」的意義和因數、倍數有何關係並不很了解。對於「甲數能整除乙數」或「甲數能被乙數整除」的敘述中，誰除以誰、哪個是因數或哪個是倍數分不清楚（陳清義, 1995）。換言之，學童對於整除和被整除的語意容易混淆。而因數與倍數是二個互逆的概念，若甲是乙的因數，乙則是甲的倍數。因此，學童更加難以理解甲乙二數之間的關係。

(四)從學生的生活經驗來看，因數的概念很抽象，對學生而言，它只是一個獨立於生活之外的數學名詞。如同劉秋木（1996）所認為的：數學的學習應該在生活的實際情境中進行，或至少有密切的關聯。但在學生的生活經驗中，幾乎沒有談論到「因數」這個名詞，運用的情況也很罕見，所以學生學習因數教材時覺得很陌生，而學了因數教材之後，在生活上的應用也付之闕如。這種學習比較無法與學生的生活經驗連結，除了較缺乏學習的動機，學生消化吸收知識的過程也會比較困難。

(五)從過程概念的觀點來看，有些數學概念要經由操作程序而獲得。例如，經由「數數」的過程獲得「數」概念，經由「往上數」的過程，獲得「和」（sum）的概念，經由連續「累

加」的過程獲得「積」（product）的概念，這種經由操作程序而獲得的概念稱之為「過程概念（pro-cept）」（Gray & Tall, 1994）。過程概念是由「過程」（process），「概念」（concept），與「符號」（symbol）組成。例如，$\frac{3}{4}$ 這個符號，暨代表3除以4的過程，也代表分數$\frac{3}{4}$的概念，而稱此符號（$\frac{3}{4}$）所代表的概念為過程概念。簡單的說，$3+2$ 代表3與2兩數的相加，也代表兩數之和的概念，所以也是個過程概念（Gray & Tall, 1993）。如此看來，「因數」也是個過程概念，它是經由「因數」除「倍數」的過程，再經整除的確認，因數與倍數都是經由此等過程所得到的概念，所以都具有過程概念的特質（黃國勳和劉祥通, 2003）。

過程概念是從過程衍生而來，所以此種概念含有隱藏的知識（tacit knowledge），此隱藏知識往往在教學中未被突顯（朱建正, 1997）。舉例來說3整除54，3是54的因數，既然3整除54得到商數「18」，所以18也應整除54，18也是54的因數。但是，後者是隱藏的，往往未被學生注意，在教學中也未被老師突顯出來，所以學生在找尋因數時無法有效節省計算的過程，造成解題的困難。此外，也使得在找尋因數時有所遺漏（未能配對出現），因而學生找某數的因數時未能窮盡所有的因數，以致未能解題成功（黃國勳和劉祥通, 2003）。

、研究方法

一、合作行動研究法

近年來在教育研究領域中發展最快速的當屬行動研究（Hopkins, 1985）。教育「行動研究」的主要特色是幫助教師藉由反省式的探究（reflective inquiry）去釐清他們在課堂教學中的實務需要（pragmatic requirements），其終極目標是改進教學的品質（郭重吉、江武雄、王夕堯, 1999）。以課程與行動研究的關係來說，為了驗證「課程」是否在教室實際情境中具有教學的可行性，因此將「課程」視為「有待教師於教室情境中加以考驗的研究假設」（curriculum as a hypothesis to be tested in the classroom context），並鼓勵教師採取課程行動研究以考驗課程之研究假設（蔡清田, 1998）。同樣的，當教師設計教學活動時，亦可透過行動研究來檢驗教學活動對學生的學習效果。而教學模組是教師教學前的準備與規劃，也是教師對教學的一種假設（黃茂在和陳文典, 2000）。本研究即希望透過合作行動研究來檢驗因數教學模組，在實際教學情境中探討學生的學習效果。

二、參與人員

參與此研究的研究小組成員共有三位，包括劉老師（第一研究者）、黃老師（第二研究者）、吳老師（合作教師）和二班五年級學生，分別介紹如下：

(一)劉老師（第一研究者）

目前是數學教育師資培育者，在此研究中劉老師除到現場觀察教學外，並與研究者及吳老師討論教學的實際問題，針對學生的學習過程與結果提出他的見解與假設，並檢驗學生對整除與因數概念的認識。在資料分析時，也參與檢驗原案分析的適當性。

(二)黃老師（第二研究者）

在本研究中研究者是研究問題的發動者，負責文獻資料的收集、整理與分析。也擔任教學模組設計、參與觀察和教學者的角色，負責收集各種資料，並與吳老師、劉老師共同討論修正方案。

(三)吳老師（合作教師）

吳老師在本研究中負責前導教學的工作，並參與教學觀察，與其他二位研究者共同討論教學現場的問題，和學生的學習成效。

(四)參與學生

嘉義縣某國小兩班五年級學生，黃老師(第二研究者）和吳老師（合作教師）分別為這二個班級的級任老師。家長社經背景屬中下，學生的素質平均而言屬中等程度。學生經過等質編班（S 型編班法），二班學生程度應大致相近。

三、研究流程

此研究的設計可分為(一)教學模組設計階段：發現問題、文獻探討和教學模組設計。(二)執行階段：教學前座談→修正與建立共識→前導教學→檢討、修正→修正教學→檢討、修正→學習效果評估。本研究從研究者教學經驗的體會出發，發現學生因數學習困難後，試圖解決此一問題。隨後蒐集因數概念的相關文獻，並著手教學模組的設計，完成之後即進入執行階段。首先，舉行教學前的座談，參與研究人員針對教學模組的內容和實施方式提出修正的意見，經由三人的討論、辯證建立因數教學模組實踐的共識。執行階段是一循環式的過程，由合作教師先在其班級進行前導教學，在教學活動結束後，研究小組依據上課的觀察記錄、錄音與錄影的資料和深度訪談資料，進行省思及辯證。反省教學活動設計需改進之處，共同協商出新的解決方案，黃老師再依據新修訂的內容再回到自己班級進行教學活動。同樣的，三人再進行省思、辯證和修正並形成比較符合實際教學的方案。教學模組執行完畢之後，參與研究人員以學生的學習效果為重心，來評估教學模組的可行性。

四、因數教學模組

以下將敘述本研究教學模組的活動內涵及設計的理念：

(一)教學模組的活動內涵

研究者綜合各版本教科書（南一、康軒、翰林和國編版），歸納「因數」的教學目標為：(一)了解整除和因數的意義，(二)能找出某一個數的全部因數，(三)能指出最小的因數和最大的因數。本研究因數教學模組依此教學目標設計，可分為起始、發展和檢驗活動（詳如附錄），由四個小模組（四個活動）組合而成。活動一（聽數字分組）和活動二（沖天炮）為起始活動，活動三（磁鐵排方陣比賽）為發展活動，活動四（因數賭城）為檢驗活動。

蓋聶（Gagńe, 1968）提出心智技能階層是由四種不同的心理能力所組成，它們由簡單到複雜依次是區辨學習、概念學習（具體的與定義的）、規則學習和問題解決（高層次規則學習）。本研究因數教學模組的組成正是符應這個原則，希望學生能漸進的獲得各種心智技能。也就是說，本研究教學模組是採垂直模式設計，四個小模組各有其教學目標且可以獨立存在，但予以連貫之後，則構成一個系統化的教學計畫。本研究因數教學模組建構的心智技能階層如表 1。

(二)教學模組設計的理念

起始活動的二個子活動（聽數字分組和沖天炮）是透過遊戲的方式讓學童了解總量（人數）可以分完的情形，而後進入整除的意義，再由整除的觀點定義因數的意義。期能活化教材並與學生的生活經驗相結合，以激發學生的學習興趣。此外，也透過具體的活動使學生有身歷其境的真實體驗，進而將整除的意義具體化，使學生容易理解因數意義。發展活動（磁鐵排方陣比賽）是透過分組比賽的方式，使學習氣氛增加刺激性與趣味性，讓學童樂於學習，從而發展、強化因數的概念。檢驗活動（因數賭城－撲克牌遊戲）則利用學童喜好玩撲克牌的興趣，將撲克牌遊戲轉化為學習活動，使學生覺得新奇有趣而不覺得在做計算練習或測驗。並且運用合作學習的方式，讓程度好的學童來教導程度較差的學童。綜而言之，本研究

表 1：因數教學模組的心智技能階層

技能的類型	學　習　目　標
區辨學習	分辨人數可以剛好分完和不能剛好分完的情形。
概念學習	透過「聽數字分組」的遊戲逐一找出可以將 12 個人剛好分完的情形來定義「整除」。
具體的概念	
定義的概念	透過「沖天炮」的遊戲窮盡所有單位量的除法算式，找出可以剛好分完的情形即為整除，再由能整除的數定名為「因數」。
規則的學習	透過「排磁鐵比賽」指出所有的因數，並能歸納出最小是 1 和最大的因數是本身。
問題解決 （高層次規則的學習）	透過「撲克牌」遊戲，能正確找出每一個數的所有因數，並發現每一個數的因數其個數不同，每一個數為其他數的因數的次數也不同（如 1 的次數最多，2 次之，11 的次數則很少）。進一步運用此規則於玩撲克牌的情境中，善用因數的知識和玩牌的策略以獲得勝利。

因數教學模組設計是利用學童愛好遊戲的天性，將遊戲融入數學科的教學活動，期使教學過程充滿刺激與樂趣，讓學生在生動活潑的情境中學得因數的知識。

由前面教材分析可知因數是一個抽象且複雜的概念。Wehman 和 McLaughlin（1981）則把概念形成區分為具體類型和抽象概念兩者，而因數概念屬於抽象概念，此類概念的形成須經由定義來學習，比較不容易直接透過觀察來獲得。是故，教導因數概念時教師必須先讓學生了解整除的意義，經由整除來定義因數的意義。Nelson（1973）認為在概念形成的教學過程中，應盡可能在自然的情境中以具體的方式來呈現或介紹概念。Lave（1988）也曾主張：學習是身歷其境（situated）所產生的作用。本研究教學模組設計的構想即基於這些學者的觀點，從學生的生活經驗（分組的經驗）出發，透過具體的遊戲活動給學生「身歷其境的學習」（situated learning），希望學生藉由反覆的具體體驗逐步建立清晰的整除概念，進而理解因數的意義。然後藉由趣味的遊戲活動，繼續強化學童的因數概念，以確保因數概念學習成功。

五、學習效果評估

本研究教學模組於實際教學場景執行時，學習效果的評估乃透過以下三個方式：檢驗學生的學習表現、觀察學生上課的反應情形和評閱學生數學日誌的內容，尤其是中低程度學生的部分。為了協助學生做數學日誌的寫作，日誌內容以「老師上課教的是」、「我學會的是」和「我的感想」三個標題，來引導學生寫作。前二項在於評估學生的學習表現，第三項乃評估學生情意的表現，希望藉由學生不同向度的寫作內容評估不同向度的成效。

六、資料分析

本研究採取參與觀察（觀）、座談（座）、討論（討）、深度訪談（訪）、學生數學日誌（誌）及研究者省思筆記（省）和隨堂札記（札）等方式來收集資料，資料內容包括上課的觀察記錄、上課錄音、錄影等轉譯資料，教學活動前後研究者、合作教師與指導教授的座談與討論記錄，兒童的數學日誌，以及研究者的省思札記等。資料分析採用持續比較法和三角校正來考驗學生的學習成效。實踐教學模組效果的評估檢閱學生的學習表現、觀察學生的上課反應，和評閱數學日誌，是為資料來源的三角校正。此外，再藉由參與研究人員的共同討論辯證，以避免研究者個人主觀的認定，則為參與研究人員的三角校正。

各種原案資料編碼的意義舉例如下：（900907 黃討）代表九十年九月七日黃老師的討論記錄；（900907 札）代表九十年九月七日隨堂札記；（900907 025誌）代表九十年九月七日25號學生的數學日誌；（900907 觀）代表九十年九月七日觀察記錄；（900823 黃座）代表九十年八月二十三日黃老師的座談記錄。

肆、研究結果與討論

本研究的教學模組設計階段於暑假中完成，開學後即進行執行階段。因數教學模組經過執行階段的教學與修正後，逐漸將實際教學可能發生的狀況呈現出來並予以處理（註1）。最後修正完成的教學模組，可使教學進行較為順暢，有助於教師教導因數概念時，將抽象的因數概念意義化、具體化，可以使學生比較容易理解因數的意義。限於篇幅，以下先概略說明實施過程，其次從學生的學習情形和情意二方面，來探究學生的學習效果。

一、起始活動的實踐

本研究因數教學模組設計的起始活動，其教學目標是使學生了解一個總量可能組成的單位量有哪些？進而理解整除的意義，形成因數的概念。起始活動可分為：活動一（聽數字分組）和活動二（沖天炮）。二個活動的類型大同小異，都是透過數字令讓學生進行分組，然後使用除法算式記錄分組的情形，讓學生共同發展整除的意義。之後，進行活動二，則由教師定義因數的意義。

起始活動實施後的檢討，劉老師提出：

「只做12和10的因數的探討，在數字上是否太小了，可不可以再加大一點的數字？」（900907 劉討）

黃老師隨後提出澄清的意見：

「剛開始我們旨在讓學生了解整除和因數的基本意義而已，數字大小應該比較沒有關係。而且受限於時間和場地，太大的數字逐一玩起來，在時間上會拖很久，玩遊戲時場地也會太擁擠。」（900907 黃討）

因此，只以10和12比較小的數字來進行教學活動。

在前導教學時，學生因為玩遊戲太過興奮，學生找到同學湊成一組後，形成人仰馬翻的混亂局面，其他學生較不易觀察到分組的情況（900907 觀）。黃老師提出一個想法：

「可以在每一遊戲開始時學生都到教室中央為成一個圓圈以求公平。學生找到同學湊成一組後，請各組到中央排成一列一列的，形成方陣隊形，方便學生觀察分組的情況。」（900907 黃討）

劉老師和吳老師點頭表示贊成此種方式。

所以黃老師的修正教學便以此方式進行教學活動，這樣的形式確實能讓學生方便觀察，一目了然便可知道：一組有幾人？分成幾組？剩下幾人？另外，也有利於下一個數字令的進行及老師對於秩序的控制。從二班的教學觀察和學生的數學日誌，可以知道學生學習情形不錯，上課反應非常熱烈。

(一)中低程度學生能了解整除和因數的意義

教學活動進行時如需抽問學生回答時，教學者都儘量找中低程度的學生來回答，以確認學生學習的進展和需加強的地方。在進行活動二教學時，黃老師發現有些學生在判斷是否能整除時蹲下或站著的動作比較慢，突然靈機一動暫停遊戲，特別找中下程度的學生來抽問，希望了解學生是否真的知道整除，或者只是跟著別人做動作。抽問的結果學生都能正確回答，表示程度較差的學生不是隨著別人站著或蹲下而做動作的，只因他們心算能力較差，需要多一點的時間。例如在「一次放『9』支」時，便抽問小鈴（因為小鈴是最後才做動作的）：

原案一

黃老師問：「妳為什麼站著？」

小鈴：「因為 9 不可以整除 10！」

黃老師問：「怎麼說？」

小鈴:「10 除以 9 會等於 1，還剩下 1。」（900907 觀）

學生先前對於除法算式中的「除盡」已有基本的認識，因此介紹「整除」時，對學生而言並不困難。在這個活動中主要透過具體的活動來喚起學生的舊經驗，以銜接因數意義的了解。從教學現場的觀察、訪談和學生的數學日誌予以綜合分析，中低程度的學生也能正確完整的回答除法算式、整除和因數的意義，例如屬中低程度的小恬：

原案二（訪問小恬）

黃老師：「10 可以整除的情況有哪些？」

小恬：「10 除以 1 等於 10 餘 0；10 除以 2 等於 5 餘 0；10 除以 5 等於 2 餘 0；10 除以 10 等於 1 餘 0。」（她完整且流利的說出沒有錯誤）

黃老師：「這些是整除，那 10 可被哪些數整除？」

小禎：「1、2、5、10」

黃老師：「這些數就是什麼？」

全班齊說：「10 的因數。」（900907 觀）

原案三（再度訪問欣恬）

黃老師：「9 的因數有哪些？」

（小恬舉手）

黃老師：「欣恬來說說看！」（黃老師特別點妞她做為指標）

小恬：「1、3、9」

黃老師：「2 是不是？」

小恬：「不是！9 除以 2 等於 4 餘 1」（900907 觀）

從小昇（中等程度）的數學日誌中（900907 016 誌），也發現他能完整說明整除和因數的意義：

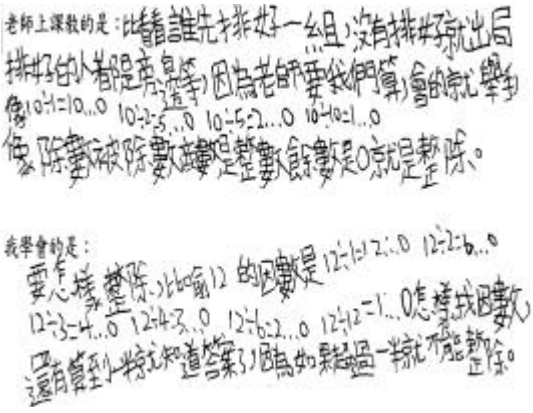


圖 1

吳老師和劉老師在座談會也分別指出：

「這個教學活動設計有別於傳統的教學，能將數學概念的學習與生活經驗結合，且讓孩子們實際參與和具體操作，概念建立的過程中，學生印象深刻，連中低程度的學生概念也清楚，應可保留較久，學習效果比傳統教學好……」（900912 吳座）

「想不到因數也可以用這麼活潑的方式來教學，透過具體的活動，學生的因數概念應該很清晰了……」（900912 劉座）

(二)激發學生學習動機，上課氣氛熱絡

兩班的學生一聽到要玩遊戲，都表現出興奮不已的樣子！「好耶！好耶！真是太棒了！」（900907 觀）活動進行中學生反應非常熱烈，積極參與學習活動，不太像平常的數學課。平常要求同學發言總是意興闌珊、寥寥無幾，今天上課舉手發表的意願竟然那麼強烈，「我！我！我！」的聲音不絕於耳（900907 觀）。尤其黃老師班上一些平日比較安靜的小朋友表現出活潑和踴躍發表的樣子，真是令人印象深刻。例如：

「今天老師帶我們到英語教室上數學課玩遊戲，大家都很高興，以前都沒有這樣過！」（900907 015 誌）

平日文靜的小璇在玩遊戲時雀躍不已的樣子令我感到驚訝：想不到小璇也有這麼活潑的一面！（900907 札）

黃老師和吳老師先前都預期以這樣玩遊戲

的方式教數學，學生一定很高興，只是沒有想到學生學習情緒如此高漲（900907 吳討）。更令研究小組欣喜的是，平日不善於表達而缺乏發表意願的學生，竟也因為感染到學習氣氛的熱絡而踴躍發表。小恬在數學日誌上如此寫著：

我在課堂上我有舉手，我覺得我好勇敢，平常在教室我不敢舉手因為我沒有那個勇氣。我也覺得老師讓我們可以放鬆不會說很嚴肅。（900907 028 誌）

學生也因為學習的成功，建立了他們的自信，積極參與學習活動。尤其小壕的表現最令人感動：

小壕因有先天性的聽障導致發音口齒不清，平日的他只是沈默的聽課，對於說話的事避而遠之。今天想不到他一再舉手要發表，使我感到不可思議和十分的欣喜與感動！（900907 札）

因為他內心充滿自信才能克服長久以來的障礙吧！

吳老師在教學後的座談也提出她的心得：

「透過用心設計的遊戲活動及具體的操作，大大的提昇了學生學習興趣，使教室中歡笑聲不斷，孩子們主動積極參與學習活動。教學歷程不再只是教師一廂情願的講述，學生的學習由被動轉為主動。」（900912 吳座）

二、發展活動的實踐

由於起始活動僅以「10」和「12」二個數字做為教學內容，所以發展活動（磁鐵排方陣比賽）便以較大的數字來進行，希望發展和強化學生因數的概念。原本的設計是分撲克牌比賽，但經過座談會的修正：

「改成在黑板上排磁鐵比賽，可以具體呈現學生排磁鐵的情形，而且透過分組比賽的方式會比較刺激」。（900823 劉座）

劉老師這個好的建議，當然獲得其他二位老師的贊同。

吳老師先在黑板貼了 6 張 A3 的白紙，做為各組排磁鐵的區域。說明比賽規則後，以「15」先開始進行比賽，讓學生由小而大將「15」的因數逐一排出（1 個 1 組，3 個 1 組，5 個 1 組和 15 個 1 組）。每排出 1 個因數，比賽的學生還需配合磁鐵分組的情形，寫出除法算式。吳老師一聲令下，到前面比賽的同學莫不使出渾身解數，希望為小組贏得分數。由於有起始活動找人分組的經驗，學生很快就進入狀況，且能完整說出除法算式的意義，如「15 個磁鐵，3 個分成 1 組，可以分成5組。」（900911 觀）。之後，進行「24」的比賽，仍然進行得很順暢。

前導教學後的檢討會，黃老師提出：

「吳老師還是以分組的形式讓學生排磁鐵，我想變成排長方形的方式，一來可以跟課本對照，二來也可以讓學生學到另外一種說法和呈現的形式。第二個意見是，我們班每一組剛好有小白板，我想讓學生排在小白板上，若有需要時可以拿在手上展示給學生看。」（900911 黃討）

因為這二個意見，為黃老師的修正教學埋下困窘的種子。

實際進行教學時，黃老師錯估學生對排成「長方形」的理解，所以並未詳細說明和示範。當比賽開始，學生要將磁鐵一行一個排成一長條時，受到要排成「長方形」的干擾，都無法完成，只好暫停比賽重新示範說明。第二個教學受挫的窘況是，一開始就讓學生排「13」這個質數，以致學生排半天還排不起來，耽擱了教學的時間，也讓學生的學習興致受到一點打擊。然而，不順遂的情況還未停止，因為使用小白板，當進行第二個數字「20」時，將 20 個磁鐵排成一長條，小白板的範圍不夠大，加上比賽緊張的心情，學生排起來互相碰撞，形成混亂的局面（900911 觀）。黃老師的修正教學就在跌跌撞撞的情形下結束，相較之下，前導教學顯得流暢多了。儘管如此，從教學現場

的錄影資料，二班學生都能說出較大數字的整除算式意義並指出所有的因數。連續二次的遊戲化教學活動，使學生對於數學課的觀感也有所改變。

(一)中低程度學生可「窮盡」較大數字(24)的因數

吳老師在學生排完「15」的所有因數後，將除法算式擦掉，找了各組程度比較低的學生出來重新寫一次。其中，小娟的動作最慢，本來挺令他們組員擔心的，但最後還是完成了算式，且完整說出算式的意義和指出「15」的所有因數：

原案四

吳老師：「小娟你說說看這些算式的意思？」

小娟：「1 個 1 組可以分 15 組，3 個 1 組可以分 5 組，5 個 1 組可以分 3 組，15 個 1 組可以分 1 組。」

吳老師：「小朋友他說的對不對？」

學生：「對！」(齊答)

吳老師：「小娟你再說說看 15 的因數有哪些？」

小娟：「1、3、5、15。」(900911 觀)

除了以上的例子以外，透過發展活動排磁鐵與整除算式的同步呈現，學生也都能指出「13」、「20」和「24」的所有因數。學生在剛開始接觸因數教材時，要找出某一數的所有因數，是需要經過逐一運算的。想要「窮盡」所有因數的過程裡，不僅要了解整除與因數的意義，更要計算無誤，所以這是一個比較繁複、困難的問題。學生能窮盡所有的因數，表示已形成正確的因數概念。

(二)中低程度學生也能歸納出最小和最大的因數

發展活動末段的教學，二位教學者都要學生去觀察最小和最大的因數。中低程度的學生很快便能歸納出來：

原案五

黃老師先問學生 2、3、4、6、9 各數的所有因數，再將它們的因數寫在黑板上，然後問學生：「最小的因數是多少？」

小儒：「1。」

黃老師：「最大的因數是誰？」

小儀：「本身。」

黃老師：「什麼叫本身？」

小儀：「就是它自己。」(900911 觀)

隨後教學者抽問學生 20、15、30 的最大因數是多少，學生都能馬上說出正確的答案。

發展活動結束後，小恬（繼續追蹤她的學習情況）的數學日誌也這樣記載：

一位數字裡一定有 1 和自己的數字為因數。1……自己，假如是 15 有 1……15（自己）(900911 028 誌)。

(三)學生對數學課觀感的轉變

不管對自己或學生而言，以往學習數學的經驗都是不愉快的，因此長久以來數學科一直被學生排斥。特地前來探視與關心的陳校長看到學生快樂學習的樣子，就表示「如果上數學課可以這樣輕鬆有趣，學生就不會害怕數學了！」平常上數學課時，學生迫於老師的權威，總是一副無奈的態度。但這次的教學，「幾乎每一個孩子臉上都充滿自信，並且能參與討論。」(900912 吳座) 甚至有些程度較差的學生對數學課的觀感也有了改變，學生的數學日誌上這樣記錄：

我希望老師可以用這種方法來上課，因為大家原本很討厭上數學課，後來老師用這種方法，大家變得很有興趣了。(900911 001 誌)

今天上數學課，雖然有錯，又好玩，可以讓我們手忙腳亂，又可讓我學習真好。(900911 18 誌)

今天可以一邊學到因數的東西，一邊玩好玩的遊戲。學數學真是太好玩、太方便、太簡單、太棒了。(900911 011 誌)

我對數學的印象越來越好了，數學不只是要玩，還要聽課。(9009011 021 誌)。

不只是程度較低的學生對數學觀感有所改變，程度好的同學更能深思他們對數學課的上課方式：

玩完了因數的比賽遊戲後，突然覺得其實數學不是想像中的那樣沒什麼有趣的。它也是有好玩、有趣的一面，不然全班哪有可能玩得那麼激動，所以只要動動腦，數學的任何一種東西就可以變成有趣的一些東西。（900911 030 誌）

藉由磁鐵的排列方式，看圖的作法雖然很麻煩，但比較容易懂，而且也能儘快的了解。對於算式的做法，可能就要從另一方面去思考了。而數學雖然大家都不喜歡上，可是如果換個方法教，像玩遊戲、比賽的方式……等，或許數學這一門可能是大家最喜歡上的課哦！（900911 025 誌）

三、檢驗活動的實踐

檢驗活動（因數賭城—撲克牌遊戲）旨在評量學生學習因數的成果，並做為學生課後計算練習的活動。也就是將撲克牌遊戲轉化為學習活動，寓教於樂，使學生覺得有趣好玩，無形中反覆的做計算練習，使因數的概念更為穩固。教學活動進行中，二位教學者運用合作學習的方式，二人配對來玩撲克牌遊戲，藉由程度好的學生來教導程度較差的學生。遊戲開始讓程度好的學生先玩，以做為程度較差學生的示範。在打了三局之後，教學者提出佈題，要求學生在打牌時思考，並在遊戲結束後分組討論。在熱鬧滾滾的「打牌」活動後，發現了不錯的學習效果：

(一)中低程度學生能獨自完成撲克牌遊戲

或許是天性使然，學生很快的進入遊戲的規則之中。學習的情形和檢驗的成果，著實令研究小組欣喜：

「原本我們的設計是希望程度好的學生來幫助程度差的學生，在我的觀察看來，分不出那個是程度好的學生？那個是程度差的學生？表示中低程度的學生不需要幫助也能正確打出應該打的牌。」（900912 劉討）

黃老師也回應劉老師的話：

「從撲克牌的遊戲中，我們還是可以看出獲勝的都是程度好的學生。打牌時不僅要知道那個數的因數有哪些？致勝的秘訣還更需要一些策略。不過就如同劉老師所說的，程度差的學生也能獨自完成打牌的遊戲。」（900912 黃討）

在佈題一「哪張牌最容易打出去？」的討論中，學生在黃老師的問話後，都隨即斬釘截鐵的回答：

原案六

黃老師：「你們剛玩了撲克牌，你覺得哪些牌最容易打出去？」

學生齊答：「1。」

黃老師：「為什麼？」

學生齊答：「因為 1 是所有數的因數。」

黃老師：「還有哪些牌也是容易打出去的？小恬妳說說看？」（黃老師再次特別指定中低程度的小恬回答）

小恬：「2。」

黃老師：「為什麼？」

小恬：「因為 2 也是很多數的因數。」

黃老師：「比如呢？」

小恬：「2、4、6、8、10、12。」（900912 觀）

顯然的，小恬從打牌中理解了：2 是偶數的因數，她對於因數概念的了解又進了一步。

(二)中低程度學生展現自信的學習態度

進行修正教學時，研究者規定每一個數的因數的牌打完後，要將撲克牌整理好成一疊。以便讓學生複習某一個數的因數有哪些。研究者欣喜的發現：那些程度較差的學生竟也當起主持人的角色（通常是組長的工作），自信大方的問同組的組員某支牌的因數有哪些？小成便是個令人印象深刻的例子：

原案七

小成（該組程度最低的學生）：「9 的因數有誰？」（拿著撲克牌問同組的組員）

小輝：「1、9」

小成：「還有呢？」（小成一邊把手中 1 和 9 的撲克牌現出來，得意的提示小輝）

小輝：「還有 3。」

小成：「對了！那 12 的因數咧？」

小輝：「1、2、3、4、12。」

小成：「還有一個喔？」（小成一邊把手中 1、3、4 和 12 的撲克牌現出來，然後再提示）

小輝：「啊！還有 6。」（小輝也露出滿意的笑容）（900912 觀）

他們平日上課時表現出自卑與羞於表達的樣子，已不復見！是遊戲讓他們忘記了「數學不好」的標籤，也讓他們對數學課有正面的態度 對成績不好的學生來說，除了「數學知識」，還有更重要的東西——「自我的肯定」與「學習的態度」（900912 省）。

四、綜合討論

由以上三個活動的實踐結果，可以得知中低程度學生也能達成教學目標，顯示多數學生的學習情況應該不錯。而從教學活動中學生顯現正面的學習態度，令參與研究人員感到欣喜，但同時也是奠定學習成功的重要基礎。此外，綜觀整個教學實踐的過程，學生獲得課外的學習和改善教室內成員的互動關係，亦令人甚感驚喜與欣慰。

(一)學生增加教科書之外的數學知識

除了達到教科書的教學目標外，經由非例行性的教學活動，學生額外獲得了教科書以外的數學知識。「十幾年的教學經驗，課本上所有的教材內容我都耳熟能詳，因此學生學習會遇到哪些困難，我大概也能掌握。以前運用講述法『照本宣科』時，幾乎沒什麼新的挑戰，學生能學的就是課本內容罷了！（不過能學會課本上的數學知識也難能可貴了。）這次的教學活動卻出現課本上教不到的例子，真是令人欣喜的發現。」（900907 札）

劉老師在前導教學後的檢討會提出他的觀察：

「當吳老師說她的數字令故事時，他先說碰到『4』個人，學生每 4 個人一組。然後又說買了『6』包衛生紙時，學生不知道是可以分完的情況，仍然急忙的抓人湊成一組，最後還有人愣在一旁……由這個觀察可見學生尚未意識到以整除的觀念來玩遊戲。」（900907 劉討）

黃老師和吳老師同意這個觀點，但並未深入去探討。當黃老師的修正教學進行完畢後，劉老師又再度提出他的觀察和訪談結果：

「黃老師說到『2』隻羊時，學生仍然不知是可以分完的情形，很慌張的找人……『6』包衛生紙時，小廷拼命的找人而且還用一個一個點數的方式，到『4』根香蕉時，建廷的情況依然如此。活動結束後訪談小廷，他知道 12 ÷ 4 和 12 ÷ 6 是能除盡的，問他為什麼要急忙找人，他則回答：『沒有想到！』由此學生在玩遊戲時可能只是靠直覺來找人，而不知道數字是否能整除。……」（900907 劉討）

想不到劉老師的這番話啟發了吳老師新修正方案的構想，她重新在班上進行「聽數字找人分組」的活動。首先在不提示的狀況下讓學生玩遊戲，如預期般的學生果然「抓人」抓成一團！後來吳老師集合學生說明整除和數字分解合成的關係，例如，「學生從 6 個人一組接著到 4 個人一組時，只要每組各退出 2 個人再組成一組就可以了。」（如圖 2）之後，她重新定訂規則：「如果有找不到人成一組的同學就要做鬼臉的動作，表示是餘數。動作做對的同學表示他的觀念是正確的，不用被淘汰，做錯的同學才會被淘汰，換新的同學進來玩！」（900910 觀）

經過吳老師整理說明，學生在了解這個策略後，遇到能整除的數就能從容以對，不能整除時才會急忙找人，找不到人湊成一組的學生也都能了解自己是餘數而做出鬼臉的動作，顯

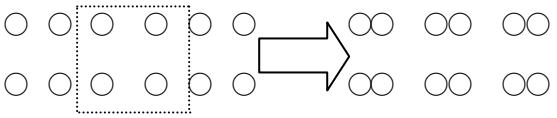


圖 2

得非常有自信。聰明的學生甚至遇到不能整除的數時，乾脆自己先做鬼臉表示餘數，省得抓人抓半天（900910 觀）。表示學生們已更進一步了解整除的意義，整個教學活動也變得更順暢了。

接著，吳老師又跟學生討論從六人一組到四人一組只要各退出 2 人成一組的問題，並強調移動最少人數的規則，隨後展開另一次的遊戲活動。這次吳老師找了 20 個小朋友出來，由「1」人一組開始，再來是「2」人一組，如此由小而大依序進行。這樣的玩法學生因為可以預測下一個數字是什麼而做出正確的反應。例如進行「4」人一組到「5」人一組時，反應快的學生早已知道可以整除，一邊蠢蠢欲動，一邊還嚷著「分四組！可以整除！」。在一陣小騷動後，便有一組的 4 人，分散到其他組，使全部成為分成四組，每組有「5」人的情況；超過「10」以後學生也懂得每次只要增加一人到可以湊成完整人數的那一組就可以了（900910 觀）。這樣的結果表示學生已經了解數字的合成分解，並悠游的應用於遊戲之中。

在發展活動進行中，吳老師班級的學生利用數字合成分解的技巧更為純熟。在找「24」的因數時，學生依因數大小的順序排磁鐵，從一組「3」個磁鐵到一組「4」個磁鐵時，小藝很快就完成了，她拆了二組「3」個磁鐵，各分配一個到其他 6 組，使每一組成為「4」個磁鐵；再來排一組「6」個磁鐵時，她使用相同的技巧，將二組的「4」個磁鐵拆開，各分配一個到其他 4 組，使每一組成為「6」個磁鐵。經過吳老師的訪問和展示，其他學生很快就又領悟了這個技巧（900911 觀）。

除此之外，檢驗活動也讓學生在遊戲中，提供學生非例行性數學思考的機會。撲克牌遊戲後的小組討論，黃老師介入了第六組的討論，扮演引導者的角色，黃老師以佈題二問學生：「哪些牌較難打出去？」學生紛紛的說出「13」、「7」、「11」、「9」，接著：

原案八

小鴻：「12 點。」

黃老師：「12 為什麼難打出去？」（追問曜鴻）

小鴻：「因為 12 只有別人出 12 時才可以打出去！」

黃老師：「那你手中如果有 12 的牌要先打出去嗎？」

小儀和小廷同時立即明確的回答：「不要！」

黃老師：「為什麼？」

小儀：「因為打 12 出去，別人就有很多支牌可以打了，不就幫了別人害了自己了嘛！」（900914 觀）

在後續的討論中，學生也歸納出大的偶數的因數比較多，所以要最後出牌。

這些學習內容都是因非例行性的教學所衍生出來的，在這樣的數學學習過程中，促進了學生深度的思考，也是對教材加深加廣的學習，不管對學生或老師都是額外的收穫。

(二)改善教室內成員的互動關係

從前教因數時，台下的學生一副茫然的樣子，站在台上的我不由得焦慮起來，這樣的情緒也間接的散播在學生身上，使他們更加煩躁不安（900907 黃札）。這次的教學活動老師不再繃著臉，而是與學生們共同沈浸於歡笑聲、尖叫聲中（900907 觀）。活動三（排磁鐵比賽）運用分組比賽的方式激起學生的學習興趣，果然在榮譽感的驅使下，各組被指定出來的選手莫不卯足勁全力以赴，底下的「同袍戰友」也大喊加油，希望贏得最後的勝利。相較於沒有同儕互動的講述教學，這似乎充滿了人情味，而孩子們可愛的

一面更展露無遺（900911 觀）！從學生的回饋和研究者的省思札記中，可以知道這樣的教學型態是輕鬆自然沒有壓力的，有益於教室內成員間的互動：

老師用遊戲來上課很有趣，不覺得老師那麼可怕，希望以後可以也用遊戲來上課，那我們一定可以吸收得很快，(900907　010 誌)。

比賽時，讓我有要更快的感覺。我看很多人都「吃快撞破碗」(台語)，但是每個人都帶著笑容到下課。(900911　004 誌)

以往是全班靜默地聽著台上的老師口沫橫飛的講述，偶而老師的問答，才出現師生互動的情形，學生之間幾近沒有互動。靜肅的教學氣氛下，儼然藏著一顆顆不安的心。在玩撲克牌遊戲後，讓學生先討論老師的佈題，再請各組派代表說明，最後則進行全班一起討論。雖然秩序上有些吵雜，但是可以確定大多數的學生都在參與學習活動。我想，就學習而言，這是比較重要的（900912 札)。

本研究因數教學模組強調，讓學生從具體活動中理解整除和因數的意義，以形成因數的概念。起始活動先讓學生身歷其境的找人分組，再讓學生觀察分組的情形，最後以除法的算式表示分組的情形。而「分組」既是具體活動也是學生熟悉的生活經驗，因此學生能將整除的意義具體化，由此引入因數的定義，學生比較能夠理解因數的意義，和建立因數的概念。再經由發展活動反覆的具體物操作與體驗，使整除和因數的關係連結得更為牢固。如果從整個教學模組設計來看，也是從具體到抽象，學生抽象運思時（打撲克牌）可以具體活動的經驗為憑藉。也就是說，提供學生由具體活動再抽象反思因數意義的機會，這樣的歷程應是有利於抽象概念的學習。

本研究因數教學的主要目標，在於讓學生了解整除意義和形成因數的概念。所以教學時只以比較簡單的數字（10、12、20、24 等）做為主要教學的內容，同時也摒除繁雜的計算（如因數分解和短除法），因此比較可以減免因先備知識不足所帶來的影響。相對的，老師和學生「教」與「學」的壓力也減輕了許多。另外，在定義因數的意義時，是連結具體活動後的除法算式來定義。也就是經由遊戲活動後黑板上所留下的除法算式（$10 \div 1 = 10$, $10 \div 2 = 5$ 等算式），來說明 10 可以被 2 整除，所以 2 是 10 的因數。這樣的方式，使學生能連結整除與因數關係，同時也避免以「甲可以被乙整除或甲可以整除乙」這種抽象且不容易讓學生理解的語意來定義。

研究者回憶以往的教學經驗，學生在學習因數這個單元時，常只是焦躁不安的等待下課；相反的，在本研究的教學過程中，卻發現學生學習興趣盎然，積極參與學習活動。饒見維（1996）曾在「國小數學遊戲教學法」一書中強調：遊戲是最吸引小朋友的，能讓兒童在自由的情境中學習，教學過程充滿了刺激與樂趣，學習的動機自然提升。本研究的教學設計就將遊戲融入數學科的教學活動，以激發學生的學習動機。加上提供學生輕鬆愉快的學習情境，和容易學習的教材設計，增加了學生成功學習的經驗。而學習成功的本身就是一種獎賞（黃光雄, 1989），學生也因為學習的成功建立了自信心，更加積極參與學習活動。

伍、結論與建議

本研究因數教學模組經由前導教學與修正教學的實踐，並透過合作行動研究的歷程，已經將教學模組修正得較符合實際教學的情況。研究發現研究者設計的因數教學模組在實際進行教學時，確實有助於學生解決因數學習的困難，也可以使學生在活潑有趣的學習情境中，獲得正確的因數概念。茲將本研究之結論和建

議，分別敘述於下：

一、結論

如前述，本研究因數教學模組實際進行教學時，確實能達到各活動的教學目標，中低程度的學生也可以獲得成功的學習經驗，進而建立自信心。此外，透過非例行性的教學活動設計，使學生增加教科書以外的數學學習。而符合學生能力教材的安排和遊戲化的教學活動，激發了學生的學習動機，使學生積極參與學習。在此實踐歷程中，改變了部分學生原來排斥數學課的觀感，也增進教室內成員上的互動關係。能達到如此的效果，乃因為本研究因數教學模組具有以下三個特色：

(一)起始活動：實施動態的教學活動，使學生比較容易了解整除和因數的意義

學生經由起始活動反覆的親身體驗，可以具體的觀察到「10」和「12」個人，可以剛好分完和剛好不能分完的情形。並藉由共同發展的除法算式，清楚的理解整除的意義，這樣的教學使整除的意義具體化。理解是概念建構的基礎（黃幸美, 1997），由此來定義因數，學生自然比較容易理解因數的意義，連中低程度的學生也能了解因數的意義。

(二)發展活動：操作具體物（磁鐵）的教學活動，強化了學生整除與因數的概念

起始活動限於場地與時間，僅能以「10」和「12」二個較小的數字來進行教學。為了讓學生更加了解因數的意義，發展活動則以較大的數字（如 20、24 等）來實施。並讓學生反覆操作具體物（排磁鐵）的教學活動以加深整除的印象，再度強化學生因數的概念，使其概念更為鞏固，中低程度學生也能窮盡 24 等數的因數。由於排磁鐵是從「1」個一組（行）開始排起，程度好的學生能預測下一個數字是否能整除指定的數，而運用整除和數字合成分解的知識去玩遊戲。這樣也就是使學生在真實化的學習情境中，主動操作並運用所學的知識，建構了有意義的知識，成為自己的知識。

(三)檢驗活動：藉由趣味化遊戲，促進學生主動學習，確保學生因數學習成功

檢驗活動利用學童喜歡的撲克牌遊戲融入於教學活動，讓學生覺得新奇有趣，除可藉以評量學生的學習情形，還提供學生主動反覆練習的誘因。這樣的設計，激發了學生學習數學的興趣與動機，使學生除了可以精熟基本的計算能力，也提供學生對話與辯證的機會，並培養數字推理思考的能力。

二、建議

由前述的研究結果和發現，本研究因數教學模組確實能幫助學生突破學習因數概念的困境，讓參與研究人員甚感欣喜。雖然本研究原始的教學模組設計有未盡考慮之處，使得模組的實踐過程中發生若干困擾。幸而經由合作行動研究，能就實際進行教學的問題予以修正，這樣的歷程正是行動研究可貴之處。若以合作行動研究不斷反省、探究的精神，來看待本研究的結果，與其說是一個研究的結束，不如說是另一個研究的開始！以下茲對未來進行相關研究提出四點建議：

(一)本研究因數教學模組以生活化、趣味化的活動為設計重心，獲得不錯的教學效果，可做為有意發展教學模組的參考。

(二)本研究因數教學模組經實際進行教學後，學生獲致不錯的學習效果，可供教育界伙伴於教導「因數」教材的參考。

(三)以研究者開發教學模組的經驗來說，基層教師想要發展一個完整的教學模組誠屬不易，建議站在教育第一線的伙伴們，可先嘗試從發展創新教學著手，做為開發教學模組的基礎。

(四)本研究因數教學模組以除法算式的數字來定義因數（即 $12 \div 2 = 6$，12 可以被 2 整

除，所以2是12的因數），而非以「甲可以被乙整除」來定義「乙是甲的一個因數」。未來的研究可以針對定義語意的困擾來設計教學活動，以幫助學童學習因數概念。

(五)根據前面文獻所述，簡言之，過程概念周延的學習者擁有較豐富的隱藏性知識；易言之，若沒有隱藏性知識，往往沒有周延的過程概念。因此，吾人可以透過隱藏性知識的有無，做為判斷學習者過程概念是否周延的依據，這個向度的研究甚少，是未來可以探討的題材。

附　註

本文研究主要探討學生在因數教學模組實踐教學的學習效果，至於教學模組的發展與修正過程將另文探討之。特別提出來說明的是，整個教學模組在教學的實踐過程中，模組的整體架構和各小模組的內容並無太大變動，修正的部分都是實際執行的層面。

致　謝

本研究是國科會專題計畫「九年一貫數學教學模組的開發與實踐（91-NSC-2521-S-415-002）」的研究成果，感謝國科會的經費補助。嘉義縣南新國小陳福來校長對於本研究全力的支持，及合作伙伴吳佳玲老師用心的投入，使本研究得以順遂進行。又蒙審查委員細心的指正，使本文之品質得以提升，在此一併致謝。

參考文獻

1. 台灣省國民學校教師研習會（1997）：國民小學數學實驗課程教師手冊第十冊。台北：台灣省國民學校教師研習會。
2. 朱建正（1997）：國小數學課程的數學理論基礎（民85國科會成果報告，未出版）。
3. 林珊如（2002）：國小學童因數解題與迷思概念之研究。屏東：國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文（未出版）。
4. 林生傳（1988）：新教學理論與策略。台北：五南。
5. 周立勳和劉祥通（1997）：國小兒童解題策略與數學能力之關係—以解「積木問題」為試探。國立嘉義師範學院國民教育研究學報，3，25-44。
6. 姚如芬（2001）：從學校本位教學模組之發展協助小學數學教師專業成長之研究。載於國立嘉義大學教育學院主編：2001年海峽兩岸小學教育學術研討會論文集，185-208。嘉義：國立嘉義大學教育學院。
7. 高新建（1998）：學校本位課程發展的立論基礎與理想情境。論文發表於台北市立師範學院主辦，八十七學年度教育學術研討會。台北市：台北市立師範學院。
8. 張春興（1996）：教育心理學--三化取向的理論與實踐（二版）。台北：東華。
9. 康軒文教事業（2001）：第九冊數學科教學指引。康軒文教事業出版。
10. 陳清義（1995）：國小五年級學童因數、倍數問題學習瓶頸之研究。台北市：台北市立師範學院初等教育學系碩士論文（未出版）。
11. 陳文典（2001）：「生活課程」的特質、功能與設計。九年一貫課程自然與生活科技領域教學示例，23-34。台北：教育部台灣省國民學校教師研習會。
12. 陳麗玲（1992）：國小數學學習障礙學生計算錯誤類型分析之研究。彰化：國立彰化師範大學特殊教育系碩士論文（未出版）。
13. 郭重吉、江武雄和王夕堯（1999）：輔導中學數理教師設計教學活動之行動研究(2/3)。國立台東師範學院行動研究國際學術研討會彙編。台東：國立台東師範學院。

14. 黃茂在和陳文典（2000）。由教學模組看自然與生活科技學習領域之教學，載於教育部台灣省國民學校教師研習會編著之「九年一貫課程的教與學」，75-84。台北：教育部台灣省國民學校教師研習會。
15. 黃鴻博（1999）：在國民小學實施 STS 教育合作行動研究之成果與限制。論文發表於中華民國第 15 屆科學教育學術研討會論文摘要彙編（pp.121）。彰化市：國立彰化師範大學。
16. 黃光雄（1989）：教學原理。台北市：師大書苑。
17. 黃幸美（1997）：兒童的概念學習、解題思考與迷思概念。教育研究雙月刊，55，55-60。
18. 黃國勳和劉祥通（2002）：歡樂滿堂的數學課—因數教材創新教學之實踐。科學教育研究與發展季刊，26，52-64。
19. 黃國勳和劉祥通（2003）：五年級學童學習因數教材困難之探討。科學教育研究與發展季刊，30，52-70。
20. 甯自強（1994）：國小低年級兒童數概念之發展研究（Ⅰ）-「數概念」類型研究（Ⅱ）。國科會研究報告，NSC-82-0111-S-023-001。
21. 甄曉蘭（1995）：合作行動研究—進行教育研究的另一種方式。嘉義師院學報，9，297-318。
22. 蔡清田（1998）：教師如何透過行動研究成為研究者：「教師即研究者」的理想與實踐。國立中正大學教學科技研討會論文彙編。嘉義：國立中正大學。
23. 劉秋木（1996）：國小數學科教學研究。台北：五南。
24. 劉祥通和周立勳（1999）：國小比例問題教學實踐課程之開發研究。國立台中師範學院數理學報，3（1），1-25。
25. 蕭金土（民 84）：國小數學學習障礙學生的鑑定、學習問題診斷及學習策略教學效果之研究。台北市：國立政治大學教育研究所博士論文（未出版）。
26. 謝堅（1997）：實驗課程中因數與倍數教材的設計。國立嘉義師範學院八十六學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編。嘉義：國立嘉義師範學院。
27. 饒見維（1996）：國小數學遊戲教學法。台北：五南。
28. Gagn′e, R. M. (1968). Learning hierarchies. *Educational Psychologist, 6*, 1-9.
29. Goldschmid, B., & Goldschmid, M. L. (1972). *Modular Instruction in Higher Education: A Review*. (ERIC Document Reproductions Service No. ED061 158)
30. Gray, E. M., & Tall, D. (1993). Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching, 142*, 6-10.
31. Gray, E. M., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-40.
32. Hopkins, D. (1985). *A teacher's guide to classroom research.* Milton Keynes, UK: Open University Press.
33. Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge, Cambridge University Press.
34. Mayer, R. E. (1983). *Thinking, problem solving, cognition.* New York: W. H. Freeman Company.
35. Nelson, G. K. (1973). *Sensory-motor and verbal foundations of concept acquisition: A study in early childhood.* (ERIC Document Reproductions Service No. ED 094 889)
36. Russell, J. D. (1974). *Modular instruction: A guide to the design, selection, utilization and*

evaluation of modular materials. (ERIC Document Reproductions Service No. ED 089 343)

37. Vergnaud, G. (1983). Multiple structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.

38. Warwick, D. (1987). *The modular curriculum*. Oxford: Basil Blackwell.

39. Wehman, P., & McLaughlin, P. J. (1981). *Program development in special education*. New York: McGraw-Hill.

附錄一

活動一：聽數字分組

教學目標：分辨剛好分完和不能剛好分完的情形、了解整除的意義。

活動說明：(一)透過遊戲逐一找出將 12 剛好分完的情形和能整除 12 的整數。

(二)釐清整除，做為因數的預備經驗。

遊戲規則：

1. **先找 12 個學生出來圍成一個圓圈，老師說一則故事，故事中只要提到數字，學生就要以這個數字找同伴。**
2. **老師說出數字令後，學生需先判斷是否能分完，判斷能分完者即蹲下，判斷不能分完者就站著，(判斷錯者即淘汰由新的同學遞補)。老師說開始找人時，學生才可以開始找同伴，找到同伴後到場地中央蹲下排成一列一列，以形成方陣。當找不到同伴成一組時（剩餘的人）則須做鬼臉動作以表示遭到淘汰，再替補新的學生，維持場上都是 12 個學生的狀態。**
3. **讓學生觀察分組的情況，並以除法算式記錄在黑板上。**

如此類推，將 1　12 每個數字都玩過一遍後。老師依照黑板紀錄的除法算式讓學生共同發展整除的意義。

活動二：沖天炮（配合節令）

教學目標：了解因數的意義

活動說明：透過遊戲窮盡所有單位量的除法算式，找出可以剛好分完的情形，定名為因數。

遊戲規則：與活動一規則相同，唯將遊戲口號改為：老師說：「中秋節大家來放沖天炮！」學生問：「一次放幾支？」然後老師下數字令。將 1~10 每個數字都玩過一遍後。老師依照黑板紀錄的除法算式來定義因數的意義。

活動三：排磁鐵比賽

教學目標：指出所有的因數，並能找出最小和最大的因數。

活動說明：給定總數，透過實際操作，找出可以分完的單位量，更進一步了解因數的意義。

遊戲規則：

1. **各組自行編號，老師抽號碼到黑板進行排磁鐵比賽。**
2. **將磁鐵排成長方形的情形由 1 個 1 行開始排起，依序由小而大。**
3. **最快排完且能正確寫出除法算式，並說出排列意義者，該組得一分。最後統計各組得分，最高分者為優勝組。**

例題：皮卡丘有 15 粒磁鐵，如果平分給小朋友，有哪幾種分法可以剛好分完？

活動四：因數賭城

教學目標：強化因數的概念

活動說明：透過玩撲克牌的遊戲，使學生更深入了解因數的概念。

遊戲規則：類似「撲克牌大老二」的玩法

(一)每兩人組一小隊，每組分四家競賽。

(二)一副撲克牌分給四家，每家分得 13 張，最先將牌出完為優勝者。

(三)由拿到黑桃 2 者先出牌（出什麼牌都可以），跟牌者的點數只要是第一出牌者點數的因數即可，不分牌的點數和花色大小，若無牌可出時，則輪空由下一人跟牌。

(四)當沒有人可以跟牌時，則由最後跟牌者取得新的出牌權。

(五)當有一家將牌出完取得第一優勝後，其餘三家仍然繼續玩，新的發牌權則由第一優勝者的下一家取得。以此類推，直到四家都分出勝負為止。

(六)每出完某一數的因數後，由組長將該數的因數的撲克牌整理成一疊，並於一局的比賽結束後，以展示各疊撲克牌的方式，詢問組員各數的因數。

佈題：

(一)哪一張牌最容易打出去？為什麼？

(二)哪些牌比較難打出去？為什麼？

(三)手中握有哪些牌比較可以穩操勝券？

The Study of Practicing Teaching Module of Divisors' Number

Shiang-Tung Liu[1] and Kuo-Hsun Huang[2]

[1]The Graduate Institute of Math Education, National Chiayi University

[2]Nan-Shin Elementary School, Chiayi County

Abstract

The purpose of this study was to help students overcome the difficulty of learning divisors number by practicing developed teaching module. The cooperative action inquiry was conducted in this study. Two authors and a teacher worked as a team to enter two fifth graders' classes to see the effects of students' learning. The teaching module was divided into initial activity, developing activity, and examining activity. This study found that 1) initial activity via dynamic processes improved students' understanding the divided numbers and the divisors of an integer, 2) developing activity via operating concrete materials helped students' enhance the concepts of divided numbers and the divisors of a number, and 3) examining activities via interesting games motivated students' active learning and made sure learning successfully.

Key Words : Divisors, Cooperative Action Inquiry, Instructional Module, Innovative Teaching.