科學教育學刊
2004, 第十二卷第一期, 53-81

Chinese Journal of Science Education
2004, 12(1), 53-81

數學乘除問題情境發展之研究 --以 BBS 爲管道

馬秀蘭
嶺東技術學院

（投稿日期：民國 91 年 8 月 26 日，修訂日期：92 年 4 月 15 日，接受日期：92 年 8 月 28 日）

摘要：本文旨在透過 BBS，去促進學生做數學之意願，以培養其發展問題的能力，並從問題情境中去瞭解學童對乘除法概念認知的程度，以及掌握不同問題情境的能力。研究結果發現，上網的樂趣，能促使全體學生在一學期的時間裡持續上網去發展問題，因而問題能眞正反應出他們實際生活經驗中的乘除法模式及認知的程度；其中「倍數法」與「比例因子」及「等分除」是多數乘法及除法之問題情境類型，而「較小整數」且「符合計算信念」是問題的其它結構變項。而且拜 BBS 效益之賜，低學校能力者也願意投入數學的活動中，因此再次證明藉網路的 BBS 去促進學生「做數學」的意願是可行的，BBS 可被視爲一個支援、協助學校能力低之學生發展數學問題的管道。

關鍵詞：乘除法、發展問題情境（擬題）、電子佈告欄系統（BBS）。

壹、緒論

本研究是利用電腦網路來培養學童發展數學問題能力的第二部份，著重在發展學生數學「乘除法」問題的能力，其是有別於第一部份「加減法」數學問題之發展（馬秀蘭, 2000b, 2001）。本文旨在透過電子佈告欄系統（BBS），以促進學生長期地發展問題（擬題），再經由對學生發展之問題情境分析，以瞭解他們對乘除概念認知的程度，以及他們日常生活的經驗與掌握不同問題情境的能力。

臺灣之數學教育著重程序性知識與技能，以期學生能獲得較高的成績，然而學童卻不能將如此之計算能力轉換爲對數字及運算之理解與應用（Rey & Yang, 1998）。而運算之使用表示介於所學算術與眞實世界間之重要關係，許多青少年及成人甚至已知道如何去執行運算，但也無法使用算術（Usiskin, 1974）。尤其當學校傳授予學生手邊工作不相關之知識，則會限制他們數學概念之發展（Schliemann, Araujo, Cassuné, Macedo, & Nicéas, 1998）。因此聞名國際之美國教育家 Paulo Freire，其趨近最明顯的特色就在於擬題（Wallerstein, 1983）與對話（dialogue），而其主要的討論均是環繞在學習者實際生活經驗之話題上。

Spanos（1991）指出擬題牽涉到文化主題的使用與目標開放的題目，它是依賴學生之背景知識、價值及渴望產生的討論，因此學生基於他們自己之經驗，要對實際生活問題之定義、問題起因之討論及提出之解答去擔負責任。本研究的學生用自己的數學知識和生活經驗，把已知條件的"數字"與"符號"建立關係並組織起來，發展出一個或多個數學題目；其爲擬題活動的形式之一。Booth（1986）指出「擬題能力」在於評估學生「逆向」思考數學之能力，並可從中了解學生的數學概念。由於要求學生「解題」，只是讓他們解正常情況下的問題，然而要求學生「擬題」，卻可看出孩童心目中對問題的認知結構。透過學童發展之問題，教師不僅可發現新的問題，且可發覺學生有困惑之處；而學生則可發揮自己的創造力，發展出屬於他個人的問題，更重要的是學生可針對課程內容多一分瞭解與應用（坪田耕三, 1987）。

乘、除的概念與計算，就像加、減一樣廣泛地應用在我們日常生活中。Greer（1992）在回顧乘除法文獻中指出，乘除法如「情境模式（models of situation）」是涉及到心理學上的複雜；故相較於加減法，乘除法是較爲困難，其主因在於加減法只是單一向度的問題，但乘除法的向度就較爲複雜。本研究是利用 BBS 爲管道，要求學童從他們日常生活問題著手去發展乘除問題情境，藉「長期（一學期）」的收集學生持續貼在 BBS 上發展之問題，去反應出孩童日常生活的乘除經驗與數學認知程度；而從中不僅可勾勒出孩子不正式的數學知識，並可增加他們處理生活問題的經驗。

至於以易學易用的 BBS 爲管道，主要在促進學生發展問題的意願。而且透過 BBS 可讓弱勢族群從一般數學課堂上沈默的邊緣人，變成參加者，而無論上網者是扮演何種的角色，他們都是浸浴在學習的情境中（馬秀蘭, 2000a, 2000b, 2001）。事實上，網路上 BBS 的「隨時、隨地、任何人」的學習環境正符合現今教育的精神；不少研究已證實過，以 BBS 爲基礎的教育活動有正向的利益與潛力，例如在訓練寫作或增進寫作技巧上（Johanson, 1996; Zoni, 1992）、成人的教育活動上（Ellsworth, 1991）、小學生「數學解題」能力上（馬秀蘭, 1999a, 1999b, 2000a）及數學加減法之問題情境發展上（馬秀蘭, 2000b, 2001），或在廣播資訊（Muzio, 1992）及在推動環境教育上（黃正文, 1996）等；而不少遠距教學的計畫（Eslick, 1993; Figueiredo & Steele, 1992; Montana, 1991; 楊錦潭和林佳毅, 1998）及利用 BBS 從事數學活動的研究（馬秀蘭, 1999a），也視 BBS 爲一個溝通及討論的園地。

因此本研究再以學童有更多機會上網打 BBS 爲誘因，進一步去探究 BBS 在教育上的功能；在此作者嘗試將 BBS 視爲一個可能支援、協助學生發展數學乘除問題的管道。本研究的目的如下：

一、探討透過網路的 BBS 去促進學生「做數學」的可行性。

二、探究學生在 BBS 上所發展之乘除問題的情境類型，以覺察學生的日常生活經驗及掌握不同問題情境的能力。

三、探究學童對乘除法問題的認知結構，以瞭解其乘除概念。

四、探究影響學生發展問題的原因。

五、比較學校能力不同學生問題發展之差異。

貳、文獻探討

一、乘除法情境類型與影響乘除法相關因素之分析

若以「單位量」來闡釋加減乘除法，則「加減法」是在解決量的合成、分解或比較的活動，

而「乘除法」則是「單位量轉換」活動，其中「乘法」是把高階單位表示的量轉化成低階單位表示的量的活動，而「包含除（quotitive/measurement division）」則顛倒；至於「等分除（partitive division）」則是新高階單位量未知的單位量轉換活動（甯自強, 1993）。而相對於乘法問題，「包含除」是解決"單位數未知"的問題，「等分除」是解決"單位量未知"的問題（蔣治邦、謝堅、陳竹村、吳淑娟和林昭珍, 2000）。

由於學童一般習慣按照數字出現之次序來記錄活動，例如：「6 的 5 倍是 30」記成「6 × 5 = 30」，所以選擇使用「倍」之語言引入「乘法算式」（蔣治邦等人, 2000），且教學時，「倍」的意義被提示成「同數累加的次數」，因此數學科教材是由「倍數法」意義引導學童由連加法進入乘法。Usiskin 和 Bell（1983）依使用意義類型不同，將「乘法」分爲以下三種類型，即（1）大小改變（size change）：原始量 × 改變大小的比率 = 改變後的量，其中改變大小的比率是無單位的，如利率。（2）交叉運用（acting across）：兩個保留單位的量相互交叉運作，而得到一個複合單位的量，如：面積和組合問題。（3）比例因子（rate factor）：比例因子 × 數量 = 另一個量，其中比例因子如 3 個/人，60 公里/時等。其中（1）包括「倍數法」。

「除法」的問題一般分爲「等分除」及「包含除」兩大類；但 Usiskin 和 Bell（1983）卻將除法分爲以下五種類型，即（1）求同單位量間的比率（ratio）：兩個意義相同及單位相同的數量相互比較所得之無單位的數值，如倍數、百分率、打擊率。（2）求異單位量間的比率（rate）：兩個不同單位量相互比較，而得到一個單位量，如單價、人口密度、速率。（3）除數爲異單位量間比率的除法（rate divisor）：爲乘法比例因子的逆運算，如分東西、時間單位轉換。（4）除數爲大小改變因子的除法（size change divisor）：爲乘法大小改變的逆運算，即已知一數量的倍數或是一部份，而求原數量，如加成。（5）反求因子（recovering factor）：爲乘法交叉運用的逆運算。其中（2）和等分除之意義相同，（1）及（3）兩類是包含除之細分。

陳春杏（1989）依 Usiskin 和 Bell 之分類法，歸納我國六十四年版之國小數學科共十二册中所有的 696 道乘法文字題中，大小改變的題目佔 25 %，交叉運用佔 32 %，比例因子分量最多，佔 43 %；488 道除法文字題中，求同單位量間的比率約佔 25 %，求異單位量間的比率約佔 39 %，除數爲異單位量間比率的除法約佔 21 %，除數爲大小改變因子的除法約佔 11 %，反求因子約佔 4 %；故乘法及除法之類型比例不甚平均。除法的前二類屬於基本意義類型，後三類則爲與乘法互爲反運算之意義類型，但只有 175 題，約只是上述乘法文字題個數的 1/4。此懸殊比例使得學生平均演算了近 4 個乘法題，才做了一個反運算題。如此不僅忽略了運算間存在的關係，更減少了學生對除法問題意義的瞭解；因此作者進一步質疑此點是高年級學生成績急速滑落的原因。

（被）乘數或（被）除數之「數字性質」與學童對乘除法之原始數學信念是影響學生乘除法解題表現之關鍵。Greer 和 Mangan（1984）與 Greer 和 McCann（1991）均發現問題類型對學童沒影響，數字之型式才是關鍵；前者並指出其中被乘數影響較小，乘數影響則較大，他們統計當乘數是整數、大於 1 小數或小於 1 小數的情況下，學生則各有 92 %、71 %或 53 % 能正確作答；至於在除法問題中，等分除和包含除題型亦受到數字型式之影響。而一般研究（如 Bell, Fischbein & Greer, 1984; Davydov, 1991; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Greer & Mangan, 1984）也陸續發現乘數之數

字性質及被除數小於除數的情況，對解決乘除法問題影響最大。

其中 Fischbein 等人（1985）提出的「直覺模式（intuitive model）」，是認爲學生對乘除之直覺想法會影響其解題策略之選擇；乘法之直覺模式是與「累加」之假設連接，即「乘法會變大」且「乘數應是正整數」；而除法包括「等分」及「包含」兩種直覺模式，兩種均須「大數除小數」，且前者是「除數必是整數」、「除法會變小」，而後者若商是整數，則被視爲「累減」問題。而 Bell, Greer, Grimison 和 Mangan（1989）則修正直覺模式，提出影響乘除問題的四個因素，即「數字大小之偏好」、「問題結構」、「數字的迷失概念」、和「比例問題中數字的關係」。

一些研究皆認爲「等分模式」主宰學習者除法的直覺想法，例如 Bell 等人（1984）在其探究用算式發展文字題之研究，發現當算式符合用等分除之問題時，有 93 %的五、六年級學生均可寫出合適之問題，但當算式不合用等分除之內涵時，而須以包含除來發展文字題時，就只有大概 1/2 的學生能正確寫出該類問題。較早的 Brown（1981）已指出在除法中，大部分發展的是等分除問題，其大概是包含除問題的 10 倍之多。Fischbein 等人（1985）在分析五、七、九年級學生解決等分除與包含除算式時，亦發現五年級學童除法的直覺模式是等分除，他們並指出透過學習經驗能促使九年級學生發展出上述兩種想法。然而 Simon（1993）卻指出甚至職前老師仍停留在等分模式。因此 Graeber（1993）在綜合有關乘除法文獻中發現學生較易接受等分除之概念，從學童說故事題中即可看出他們對等分除之熟悉度較高；但作者感歎當學生只抱持等分除概念時，卻易產生更多的錯誤概念，甚至妨害包含除概念，其舉被除數和除數均爲小數之文字題（4.2 公尺繩子每隔 1.4 公尺剪成一段，可剪成多少段？）來說明此遺憾。

二、加減乘除法比較之分析

乘、除運算的意義比加、減運算更加困難（Dickson, Brown & Gibson, 1984）。以問題本質而言，乘除法問題比加減法問題複雜多，因爲後者只涉及到一維度空間，但前者則可能牽涉到二維或三維之度量空間，甚至於是涉及到度量空間之間的關係（林碧珍, 1991）。或以「單位」觀點而言，「加減法」只涉及到一種「單位」，但「乘除法」卻是包含兩種「單位」，後者如"一隻狗有4條腿，三隻狗有幾條腿"爲例，「隻」與「條」是兩種「單位」。而學童使用一種「單位」與同時使用兩種「單位」之困難度是不一樣的（蔣治邦等人, 2000）。依據 Schwartz（1988）的論點，乘除法是「指示物改變的合成物（referent transforming composition）」，他們甚至產生一個與原來二者不同的數量，即所謂的「內涵量（intensity）」。對兒童而言，內涵量的問題是較困難的題目（劉秋木, 1996）。

其實 Brown（1981）早已歸因於乘除運算結構的額外困難，是由於加減情境只要結合兩同類量的合成或分解，然而乘除中的兩個運算元經常不是同一屬性的量；並且生活上解決乘法問題經常是使用累加的結果。因從加法到乘法情境是牽涉到一個比較複雜的單位考量（Hiebert & Behr, 1988）；因此一般兒童甚至於成人均避免使用乘除的方法，而比較喜好以加減運算來解決問題，例如 Hart（1981）發現超過 1/3 的國中生選擇使用加法，而不是用乘法來解決比例問題。

而除法又難於乘法。游麗卿（1999）指出除法程序性知識包含乘法的陳述性（declarative 或概念）知識和程序性（procedural）知識；而學童在不一定處於部份全體運思階段下，則不一定會混用兩階單位去理解「除式」含意，

此尤其發生在他們對乘法算式不清楚之情況下。Suydam（1984）在數學教育成就之研究結論出，一直要到九年級，大部分學生之「除法」成就測驗分數才指示出他們對除法的精熟度至90 % 以上，而在4、5、8和9年級，雖然成就分數上限已到 80 至 90，但上述各年級之衆數(modal score)只是在70、70、70和80；因此對許多學生而言，除法延續是一個困難，甚至到10~12 年級，才傾向改善，但仍無法與其它運算一樣可達到最高水準。Simon（1993）甚至指出文字題中除法的符號表示即使對職前教師也不總是有意義的表徵，例如他們不能用「3/4 除以 1/4」去表達眞實世界文字題的數學結構；或不能以「51 除以 4」分別去擬出實際生活中帶有非整數商、四捨五入或無條件捨去的整數商之三種情境脈絡；其可能歸咎於答案早就先被老師或教科書決定之舊經驗所限制。作者進而指出，辨別適當單位之困難可能是引起對除法了解困難的顯著原因。

三、擬題（發展問題）

數學擬題直至近期已受數學家和教育家們注意（Silver, 1993），例如美國的數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1989）提到要加設擬題於課程中；在1991 年，又進一步指示教師提供機會給學生提出自己問題之重要性。澳洲的教育協會也指出鼓勵學生擬題是重要的，他們應該學習如何擬題，並試著去解自己所擬的題目（Stovanova & Ellerton, 1996）。

依給定的條件不同，擬題類型的分類則不同，較早的 Reitman（1965）以“有沒有定義已知（given）”及“有沒有定義目標（goal）”的「已知-目標」分類法，依“有或沒有”組合成四種情況。

日本學者 Tsubota（1987）將擬題出問題之方法分爲七個，即(T1)「模仿法或類題法」：學習某個問題後，做出和此同樣的題目；(T2)「算式法」：提出一個公式，再做出適用此公式的問題；(T3)「原理法」：給與四則算法和通分等原理，做出和此相對的題目；(T4)「訂正法」：出一個題目，其中故意漏掉必要的條件，或是給予其他不必要的條件，或做出矛盾而訂正的方法；(T5)「實驗法」：實驗或以具體東西的操作，再以此現象爲根基做出問題；(T6)「自由法」：以自由的題材，做成自由型式的問題；(T7)「題材法」：給定題材來做問題。

Silver（1995）只將擬題分成兩類，(S1)爲由已給定之題目中再產生新問題，(S2)爲由情境或經驗中發展新的問題。Stovanova 和 Ellerton（1996）則提出擬題的三種情境，即(SE1)「結構情境」可利用現有題目作改變，(SE2)「半結構情境」利用先前之數學知識、技巧、概念，及關係作連接，完成結構完整的問題，與(SE3)「自由情境」，即自由發揮。

上述四種分類（各以研究者姓氏的第一個英文字母代表，即 R、T、S、SE）方式，以 Reitman（1965）的「已知-目標」分類法最明確，在此將以其作標準，指出其它三種中與它相似之類型。S1、SE1 與 T1「題目」屬於 R1“有定義已知-有定義目標”之類型結構，S2 與 SE2 屬於 R2“有定義已知-沒有定義目標”或 R3“沒有定義已知-有定義目標”之結構，而 T2、T3、T4、T5 與 T7 均是 R2“有定義已知-沒有定義目標”類型，至於 SE3 與 T6 則是 R4“沒有定義已知-沒有定義目標”的題型。

國內外有關擬題之研究大都參考上述方式進行，例如澳洲學者 Ellerton（1986）即使用「題目的條件」及「題目最終目的」都由高、低能力的孩子決定之自由法，請他們寫出一個朋友覺得困難之題目。日本學者古藤伶（1986），其是以“已有數學部份而欠故事內容”的研究，去探求小朋友怎樣去寫出如“5＋3＝8”

的故事題。相似的，美國學者 Winograd 的博士論文（1990）也用「數字-故事」分類法，去探索五年級學生在一般上課時擬題、解題，並在小組中分享時的數學信念及擬題行爲表現。Rudnitsky, Etheredge, Freeman 和 Gilbert（1995）透過結構與寫作去學習解加減法文字題的研究，先給三、四年級學生一些相關類型的樣本故事，再讓他們寫出自己的數學故事，最後轉換成數學問題並解題。

在 Silver 和 Cai（1996）作算術擬題分析的研究裡，中學生是被給一段類似教科書的故事情節，藉此"刺激"他們依據其內容去提出三個能被解答的問題來。English（1998）則以正式與不正式內涵去探究澳洲三年級學童的擬題行爲，其中正式內涵是給孩子一個算式去寫故事題，不正式內涵則是給孩子一"刺激物"（如照片或文獻）去寫故事題，或一段文字陳述去寫一個目標不限定的故事題。而以上提到之"刺激（物）"，尚有 Hodgin（1987）使用圖片寫問題的擬題研究等。

Leung 和 Wu（1999）採用類似 Tsubota（1987）之「訂正法」教學。在教師出題時無意中漏掉必要的條件，而導致無法解題的情況下，教師就'將錯就錯'的要求學生先修正題目，然後再解題；結果發現此方式不僅適時提供了擬題的機會，並且教學效果也佳。

國內學者梁淑坤（1995）以純文字、包含數值及包含符號三種擬題作業形式去探討在職及職前師範生的擬題行爲，發現"包含數值"內容下的擬題量是最多。該作者（1997a）並製作一份適用於國小高年級之擬題能力評量工具，其中有「文字」、「圖片」和「答案」三種作業模式。梁淑坤（1997b）接著又建立了一套涵蓋國小階段的數學擬題素材，其中六種擬題類型的已知條件分別爲「算式」、「文字」、「圖表」、「解法」、「答案」與「題目」。而楊惠如（2000）的擬題活動融入國小三年級數學科教學之行動研究，即參照梁淑坤的六種類型分類，而將其中的四種「算式」、「圖表」、「解法」與「題目」納入擬題教材中。

叁、研究方法與步驟

一、研究對象

本研究的樣本（採用六十四年版教材之最後一屆）是來自台中縣一所國小六年級中四個班級的 30 位學生，其中高（H）、中（M）、低（L）數學程度各十位，各程度中又包括男生（B）、女生（G）各五位。例如 BH1 代表男生（B）高數學程度（H）的第一位（1）或GL2 代表女生（G）低數學程度（L）的第二位（2）。而數學程度是以他們在五年級下學期的數學成績，在各班（常態班級）的前 1/3、中 1/3、及後 1/3 來區分的。由於該國小對電腦科技及網路的推行總是不遺餘力，因而該校國小高年級學生對上網打 BBS 是駕輕就熟。

Krutetskii（1976）指出「數學能力」應包括「學校能力（school ability）」與「創造能力（creative ability）」，前者表現在對學校數學課程的成功學習上，此能力高者能有效率的精熟學習學校數學所需技能，而後者表現在科學之數學活動上，可產生對人類社會創新而重要之結果與成就；此兩種能力之間應該有關聯。因此本研究樣本之數學程度即指其學校能力。而 Silver（1994）認爲與擬題（問題發展）技能有關的其中三要素，即問題的總產量（fluency）、類型之變化數（flexibility）及創意之多少（originality）。因擬題之歷程與創造之歷程相當接近，是故擬題能力以廣義的觀點而言，即是一種創造能力（陳美芳, 1995）。因此學生擬題（發展問題）能力的表現當能反應出他們眞正數學能力的一部份。

二、研究之擬題素材

全部 34 個發布在 BBS 討論區上讓學生發

展問題（擬題）的素材（內容如附錄所示）分別涵蓋乘法 14 題、除法 15 題、含有乘或除法之「多步驟」5 題。上述三類型又被分配至四個階段中，即模仿法、算式、算式填充題、自由法。表 1 列出有關學生發展三種類型與四個階段素材之題數與時間，以及每一問題素材題號（如【2-1】、【4】等）。爲了避免研究中之「模仿法」給予學生發展問題之線索，而影響他們直覺發展的問題，因此在「研究前」鼓勵學生自由出一道乘法及除法的應用題（題號爲【0】），以之比較。至於「多步驟」之所以納入素材中，是爲了探究學生發展單一乘法或除法之問題情境外，亦想探知學生對多步驟中含有乘法或（及）除法之擬題表現。因乘或除法之「多步驟」題目可能包含兩種「單位」以上或兩種單位的「換單位」問題，亦可能涉及到「度量空間轉換」問題；而在使用一種「單位」與同時使用兩種「單位」之困難度不一樣（蔣治邦等人, 2000）以及不同「維度」轉換之複雜化情況下，學童發展的情境脈絡可能受影響。因此本研究藉觀察學生在「單步驟」與「多步驟」兩者下所發展的乘除法情境模式，以檢查學童對乘除法不同問題情境的掌握程度。

由於開放式目標（open-ended）的問題能鼓勵有效擬題與解題之優點已被證實（Baroody, 1993; Charles & Lester, 1982），因此本研究之四個階段中，除了給學生作樣本參考的「模仿法」外，其它三階段均是採開放式目標的模式。「模仿法」下之素材分類則是依 Usiskin 和 Bell（1983）的觀點，其中乘法有【1-1】大小改變型、【1-2】交叉運用型及【1-3】比例因子型，除法有【5-1】求同單位量間的比率、【5-2】求異單位量間的比率、【5-3】除數爲異單位量間比率的除法、【5-4】除數爲大小改變因子的除法及【5-5】反求因子。

「算式」是包含被運算的事物及其結果，其是數量的操作活動紀錄，例如【2-2】$32 \times 1.6 = 51.2$。而「算式填充題」則是含有未知數量的操作活動紀錄，例如【7-2】$147 \div (\quad) = 21$。因此當學生若能發展出符合某「算式」或「算式填充題」的問題情境，表示他們已清楚算式中的數字及符號的意義及關係，或已瞭解已知與未知之間的關係。至於「自由法」，則是指讓學生在沒有限制「已知」或「目標」的情況下任意去發展有關乘除或多步驟問題之情境。

其中擬題素材之結構變項包括不同之乘除法類型（【1~】、【5~】）、數域（【2~】、【6~】、【9~】）及未知數位置（【3~】、【7~】），尤其素材中依數值安排成「整數且符合計算信念」、「非整數但符合計算信念」與「非整數且不符合計算信念」三類；此所謂符合「計算信念」是指「乘法會變大、除法會變小」之直覺模式及「整除」之模式。因此「乘數大於 1 或小於 1」及「被除數與除數大小不同之關係」是被安排在不同數域之素材中。其中【1~】代表擬題素材 1 中的所有各題，其它表示（如【5~】等）亦同。

三、研究管道

本研究之所以透過 BBS 來執行之主因是將學生上網打 BBS 的喜好，物盡其用地作更有效的功能發揮。因爲本研究打算「長期（一學期）」收集學生持續反應其日常生活及數學認知之問題資料；但如果只是純粹要求學生「長期」利用「課餘時間」去「做數學」，一段時日後，他們可能就會覺得枯躁、無聊，而無法持續太久；因此爲了促進學生繼續「做數學」的意願，找出一個吸引學生願意從事活動的門路是需要的。對大部份國小學童而言，網路是新鮮、時髦的玩意兒，他們喜歡上網路的 BBS 去發表、聊天是大家有目共睹的。故本研究即利用此優勢，以 BBS 爲管道去促進學生發展數學問題，讓學生感覺他們是在「玩電腦」、「上網路」，藉此舒緩是在「做數學」的

表1：不同素材類型、階段的題數與時間

	研究前	研究中		
素材類型 / 階段	乘法、除法	乘法	除法	多步驟（含乘、除法）
	一週	五週（14題）	六週（15題）	三週（5題）
第一階段：模仿法		【1-1】~【1-3】	【5-1】~【5-5】	
		一週（4題）*	二週（5題）	
第二階段：算式		【2-1】~【2-5】	【6-1】~【6-5】	【9-1】~【9-4】
		二週（5題）	二週（5題）	二週（4題）
第三階段：算式填充題		【3-1】~【3-4】	【7-1】~【7-4】	
		一週（4）題	一週（4題）	
第四階段：自由法	【0】	【4】	【8】	【10】
	一週	一週（1題）	一週（1題）	一週（1題）

註：*【1-2】有【1-2a】與【1-2b】兩題

壓力及枯躁，以提昇他們「長期做數學」的意願。

由於 BBS 是一個可以彼此觀看分享，相互觀摩學習的公開佈告欄，其討論區爲上網者討論溝通的舞台，發展問題過程的記錄板；因而討論區上張貼的資料有的是學生的原始反應，有的是自我陸續修正或彼此溝通討論的記錄成果。因此討論區上的資料能反應出他們日常生活及數學的認知，而非學生一時的想法，此是較客觀於其他「短時間」收集資料的研究。

至於以 BBS 爲管道之其他原因，其觀點除了網路上「隨時、隨地、任何人」的環境符合現今教育的精神外，尚可減少平日課堂上所呈現出之反應效應（王文科, 1986），例如在數學課裡利用紙筆或訪談來收集問題時，程度好的學生積極表現，而程度差者則反應被動、沉默。其次在 BBS 上發表之文章不僅就自動被記錄起來，而且尚有時間記載，研究者就不須要額外利用錄音或錄影去收集資料，可避免 English（1998）在其實驗中發生的三年級樣本學生不太情願將其發展之問題被錄音的情況；還有上 BBS 發表問題就要"書寫"，而 Connolly（1989）指出透過書寫能增進學習效果等；額外無論學生對數學的喜歡與否，大部份學生均視數學爲一科需要「思考」的科目（Ma, 2000），加上學童起初發展出的問題可能是比較不完整的或不可行的，比起一般書本內之題目「粗糙」（梁淑坤, 1993）；因而在「課餘時間」利用 BBS 來從事數學活動，除了不會影響正常課業進度外，尚可增加學生數學思考的時間，以及讓學生有足夠的時間，對粗糙的問題情境作記錄或修正。以上所述均是以 BBS 當橋樑的價值。因此老師可視 BBS 爲教學的另一支援系統或將補救教學從傳統教室移至 BBS 的環境（Ma, 2000），此亦爲本研究以 BBS 爲管道的考量。

四、研究過程

本研究計畫分上、下兩個學期實施。在上學期，30 位樣本學生被「鼓勵」利用在校課餘時間，透過校內網路上的 BBS，對研究群每週或兩週乙次在"主題討論區"布下數學有關乘法、除法及多步驟運算共 34 個問題素材，作腦力激盪，儘可能寫出符合該素材的所有日常生活之「問題情境」。額外爲了探究以網路的 BBS 去「做數學」的可行性，在上學期研究之初與一學期研究活動之後，全體樣本均被要求在 BBS

上寫出個人對數學的看法。

本研究群包括樣本學校的一位電腦教師、他校的一位數學教師與作者本人。前者主要負責在 BBS 討論區上張貼給學生擬題之素材內容及發布、管理一切相關事宜，而後兩位則是設計擬題之內容及監督討論區上學生張貼的資料訊息。由於學生上網的電腦教室就是該電腦教師在校的辦公室，因而十分方便學生隨時地進入，去上網「做數學」。而爲了要獲得學生最原始、最自然的數學認知，本研究群在學生發展問題的過程裡，不介入學生出題的方向與內容。

在下學期，研究群匯整並統計歸納學生貼在 BBS 上有關對數學的看法以及陸續發展的問題情境記錄。由於本研究培養學生發展問題的興趣重於問題的正確性，故對學生發展問題之評量方式，首先看數量，其次才判斷「正確」或「不正確」。錯誤類型、錯誤乘除結構、計算錯誤、資料不足、以及數學與現實生活（或故事情節）無法兼顧等之問題全列在「不正確」範圍內。當問題是「正確」時，才去辨識其情境之「物件」、「主體」與「類型」，然後再進一步再去判斷情境的創意性等。最後再藉「正確」與「不正確」的問題去覺察學生的日常生活經驗與掌握不同問題情境的能力，以及分析學生對乘除法問題的認知結構與影響學生發展問題的原因。額外尚利用 SPSS 統計套裝軟體之單因子變異數分析去檢查學校能力不同學生在乘法、除法、多步驟及全部問題發展上的正確率差異。

肆、研究結果與討論

本研究是利用 BBS 爲管道，去促進學生做數學之意願，以培養其發展問題的能力。研究期間發現，在將近一學期的活動期間，樣本學生大都願意主動上網，持續去發展數學問題，他們幾乎利用在校之課餘時間（大部份爲中午 12 時至 13 時 20 分的午休或上午 10 時 10 分至 10 時 30 分的課間活動，偶爾利用少許電腦課）上網去做數學；其中雖然有些學生是爲了上網路而到電腦教室，但他們也都會先上 BBS 的討論區去觀看或張貼有關問題發展的資料（此亦達到促進學生做數學之目的）。

並且由樣本學生張貼在 BBS 上有關對數學的看法顯示，幾乎所有學生對以 BBS 爲管道來從事數學活動均有濃厚興趣，上網者腦力激盪一題後，就「迫不急待」的等新素材的出現，以便展示、發表他們的題目；他們視上 BBS 做數學爲「玩數學」，期待能繼續上網做數學直到畢業。更值得一提的是，數學能力低的學童亦能將其想法及問題發表在 BBS 上，其與他們平日在數學課堂上的表現迥然不同。此完全拜網路的效益所賜，因透過 BBS 進行擬題時，由於沒有時間限制，沒有衆人虎視眈眈的壓力，任何程度者在討論板上均可沒有顧忌地儘情發揮表現。因此本研究再一次證明，透過網路的 BBS 去促進學生「做數學」的意願是可行的。至於有關學生在態度方面的反應與馬秀蘭（2001）之研究類似，爲篇幅考量，故此文不再陳述。

以下將分四大類來討論學生在 BBS 上發展的問題，即一、正確發展之問題情境分析；二、問題結構分析；三、影響學生發展問題的原因分析；四、學校能力不同學生所發展之問題分析。至於內容中出現的代碼，例如（BH4）是樣本學生的編號，【5-1】是擬題素材 5-1 題的編號，而【5~】代表擬題素材 5 中的所有各題（上一章已述）。

一、正確發展之問題情境分析

(一)主體與物件

全體 30 位樣本學生在研究前【0】共發展 75 道問題（乘、除法各 41、34 道），正確率高達 96 %。在【1~】至【10】的 34 個問題素材裡，總計發展出 1261 道問題，正確的問題有 894 道，約佔 71 %。表 2 列出全體學生在

每個素材中總共發展的、正確的問題數與正確率，以及正確問題情境的物件、主體題數與正確率。

正確發展的問題情境之「主體」，當以人名、人稱代名詞、家人或親人及其他來分類時，發現約各佔了 29 %、4 %、12 % 及 55 %，其他的範圍很廣，包括場所和沒有主體的問題，前者如（BH5）一個學校的男生總共有 8361 人，卻只佔女生所有人的三分之一，請問女生總共有多少人？後者如（BM2）有一袋糖果，分給 24 個人，每個人 3 顆糖果，請問共有幾顆糖果？此結果與研究前【0】之分析（22 %、3 %、18 %及 57 %）相近。

當正確發展的問題情境之「物件」是以食、衣、住、行、育樂、貨幣及其他來分類時，發現貨幣（元）最多，約佔 37 %，其次爲食物（如糖果、蘋果派等），約佔 28 %，其他類佔 24 %（如人，小朋友等），育樂約佔 10 %（如彈珠、鉛筆等），極少數物件與衣、住、行有關（共 1 %）。雖然在【0】中，貨幣只佔了 14 %，食物佔了 49 %，其他則佔 10 %，育樂佔 25 %，行佔了少數的 3 %，完全沒有衣與住之問題；但事實上在【0】之問題情境中，有近 1/3 的食物物件是伴隨貨幣的運算，如（GH1）小美的媽媽今天上午去市場買水果，每一公斤的蘋果價錢是 50 元，請問 63 公斤是多少元？因此研究前【0】與全部 34 個素材研究的結果均發現「食物」與「貨幣」二物件大概共佔六、七成左右，而衣、住、行三項出現率是微乎其微。

額外由於對「數（number）」不斷的使用「實體指示物（physical referents）」是校外情境中計算程序的一典型特色，相對的在發展問題時，「食物」與「貨幣」這兩類物件就成了學童多數的「實體指示物」。研究進一步發現，「實體指示物」多爲可數的「離散量」，如【8】（GH1）有 1500 人參加救國團，每 15 人一組，請問共有幾組？「貨幣」爲一連續量（朱建正, 1997），而當問題中出現連續量時，其大多爲貨幣，比如【6-1】（GM5）我有 21 元，我的 1/3 是多少元？而多數離散量也以貨幣爲其單位，如（BM5）皮球 1 個 120 元，買 5 個要多少錢；即學生擅於將「單價法」套用在問題情境中。而學生解題時，連續量比離散量困難（Hart,1981），相對的此或許亦可解釋學生在發展問題時儘量不使用連續量的原因。

綜合上述結果可知，學生在研究中（【1~】至【10】）與在研究前（【0】）發展問題情境之「主體」或「物件」均差不多，由於擬題是基於學生自己實際生活之經驗，由他們之背景知識、價值及渴望所產生的討論（Spanos, 1991），因此以上結論反應出孩童日常生活經驗多寡的項目，尤其可知「食物」與「貨幣」在他們心目中的價值及渴望。

(二)類型

在【2-1】至【4】正確之乘法問題情境類型中，發現 12 %爲「大小改變型」，10 %爲「交叉運用型」，78 %爲「比例因子型」；至此與學生在【0】所發展的乘法問題比例（15 %、13 %、72 %）差異不多。然而最後到多步驟中涉及乘法情境之【9-1】、【9-2】、【9-4】和【10】就完全沒有「交叉運用型」之問題，而「大小改變型」以及「比例因子型」則分別佔 0 %、42 %、36 %和 68 %以及 96 %、58 %、64 %和 32 %，其中「大小改變型」偏向「倍數法」問題，且有急速遞增趨勢，尤其【10】竟有 33 %之多。進一步探究學生所發展之「倍數法」問題，發現其正確率是 100 %。由於數學科教材是由「倍數法」意義引導學童由連加法進入乘法；而倍數問題是指定一個正整數做爲單位量，訊問由此單位量可以乘法性的生成那些正整數（國立編譯館, 2001），尤其倍數法問題又只涉及到一個單位，因此基於此二理由就不難瞭解在所有發展的問題中，涵蓋倍數法之問題總是若隱若現且幾

表 2：發展問題素材與問題情境之物件、主體的正確率

發展問題素材	總共問題數	正確問題數	正確率(%)	正確問題情境之物件							正確問題情境之主體			
				食	衣	住	行	育樂	貨幣	其他	人名	人稱代名詞	家人	其他
【1-1】	38	33	87%	1	0	0	0	0	32	0	8	5	7	13
【1-2a】	37	27	73%	0	0	0	0	0	0	27	1	0	0	26
【1-2b】	31	18	58%	0	2	1	0	1	0	14	0	0	0	18
【1-3】	33	30	91%	0	0	0	0	0	30	0	0	0	0	30
【2-1】	34	24	71%	3	0	0	0	1	17	3	9	0	2	13
【2-2】	34	27	79%	3	0	0	0	1	19	4	9	1	0	17
【2-3】	33	27	82%	0	0	0	0	0	23	4	3	0	0	24
【2-4】	34	24	71%	9	0	0	0	0	8	7	4	2	0	18
【2-5】	34	29	74%	10	3	0	0	4	5	7	2	3	0	24
【3-1】	32	27	84%	4	0	0	0	7	15	1	9	2	0	16
【3-2】	34	29	85%	8	0	0	0	10	10	1	6	1	6	16
【3-3】	30	23	77%	5	0	0	0	3	4	11	2	0	0	21
【3-4】	30	11	37%	4	0	0	0	3	4	0	4	0	1	6
【4】	112	105	94%	14	1	0	1	5	64	20	37	1	12	55
【5-1】	33	25	76%	2	0	0	0	19	1	3	16	0	5	4
【5-2】	31	29	94%	0	0	0	0	0	0	29	17	0	9	3
【5-3】	31	25	81%	11	0	1	0	4	3	6	5	1	1	18
【5-4】	31	28	90%	0	0	0	0	0	28	0	3	0	7	18
【5-5】	33	20	63%	0	0	0	0	0	0	20	1	0	0	19
【6-1】	31	26	84%	13	0	0	0	3	3	7	6	2	7	11
【6-2】	33	19	58%	11	0	1	0	0	3	4	5	0	5	9
【6-3】	34	16	47%	9	0	0	0	0	2	5	4	4	1	7
【6-4】	32	21	66%	19	0	0	0	1	0	1	3	4	2	12
【6-5】	31	19	61%	11	0	0	0	1	3	4	12	1	1	5
【7-1】	31	24	77%	7	0	0	1	3	12	1	11	2	2	9
【7-2】	31	25	81%	17	0	0	0	0	7	1	9	2	1	13
【7-3】	32	7	22%	6	1	0	0	0	0	0	3	0	0	4
【7-4】	31	17	55%	12	0	0	0	2	1	2	4	0	1	12
【8】	62	51	82%	23	0	0	1	10	8	9	20	4	4	23
【9-1】	32	23	72%	18	0	0	0	2	1	2	4	0	10	9
【9-2】	31	12	39%	1	0	0	0	0	5	6	6	0	0	6
【9-3】	31	23	74%	11	0	0	0	4	4	4	12	0	8	3
【9-4】	32	14	44%	3	0	0	0	0	5	6	9	0	2	3

【10】	82	40	49%	13	2	0	0	6	12	7	18	5	10	7
總計	1261	894	71%	248	9	3	3	90	329	216	262	40	104	488
總計 (%)		100%		27.7%	1.0%	0.3%	0.3%	10%	36.8%	24.1%	29.3%	4.5%	11.6%	54.6%

乎是以正整數做爲單位量,而導至正確率是 100 % 的事實，如（GH4）小明有 300 元，他是美美的 3 倍，請問美美有多少錢？

在【6-1】至【8】正確除法問題情境類型中，發現 79 %爲「求異單位量間的比率型」，即「等分除」，17 %爲「除數爲異單位量間比率的除法，1 %爲「求同單位量間的比率」（後二者即爲「包含除」，佔 18 %），反求因子型有 3 %，除數爲大小改變因子之除法型則完全沒有出現。至此均與學生在【0】所發展的等分除與包含除問題之比例（79 %，15 %）不差上下。然而繼續到多步驟的【9~】時，「等分」模式呈一面倒情況，最後到【10】時，學生所有發展之問題完全沒有「包含」模式存在。此結果與 Fischbein 等人（1985）對除法「直覺模式」修正後之假設更爲貼近，他們認爲除法的最原始直覺模式是出現在「等分除」中，至於包含除之問題，學童早期仍受到等分除直覺影響，一直要等到教學後，才會顯示包含除的直覺模式。然而在本研究中，學童至少已接受兩、三年以上之包含除教學，但在他們心目中除法最原始的型態仍是"可以平分到多少"的等分形式。此可與 Simon（1993）發現職前老師仍停留在等分模式相互印證。

綜合上述結果可知，學生在研究中（【1~】至【10】）與在【0】所發展之正確問題情境「類型」一致，在「單步驟」問題中，乘法的「比例因子型」及除法的「等分除」高達七、八成左右，至於在「多步驟」問題中，乘法的「倍數法」與「比例因子型」以及除法的「等分除」幾乎就主宰乘除之情境脈絡，而有關交叉運用型幾乎絕跡。此結果可從林碧珍（1991）對國小高年級學生與周幸儀和梁淑坤（1994）的小四學童之研究得到印證，他們均表示學生對倍數法、量數的同構（比例因子、等分除、包含除）類型之文字題較易瞭解，但交叉型則較難瞭解。由於倍數問題只涉及到一個單位，比例因子、等分除、包含除涉及到兩個單位，叉積型則是三個單位；而叉積型較連加法問題難以解釋（Hart, 1981）；此單位觀點或許可說明學童發展問題的類型偏向。而 Martin 和 Harel（1989）與 Fischbein 和 Kedem（1982）發現被演繹論證說服的學生會想要進一步以實驗去證實。此論點或許亦可說明本研究學生傾向發展出日常生活中他們親身經歷或嘗試過的問題（比如倍數法、比例因子或等分除）；他們寧可擬出平日接觸過或已經歷的那些已被證實的類型，才能感受其所發展之問題的確定性，至於那些只是在課本上被教授，但從未或較少在孩童個人生活中經驗過的類型問題，對學童而言僅是紙上談兵而已，是不切實際的。

至於本研究學童發展的類型不多，雖然證實了許多孩子有困難去創造不同類型問題之發現（English, 1998），但有一個可能要對學生發展其他類型題目時產生障礙負責的是 Fischbein 等人（1985）主張的「原始模型理論（primitive-model theory）」，即有一模型是由運算最初被指派的意義所構成，此基本運算會與原始的模型一直保持連繫，在習以爲常下，其對孩子而言是本性上的行爲及有意義的，故該模型可能會對孩子去保有其它問題情況放置一個限制。

(三)正確率

全部素材之「正確率」爲 71 %，若分別以乘法（【1~】~【4】）、除法（【5~】~【8】）

及多步驟（【9~】~【10】）素材類型來討論，則正確率依序遞減，各是79％、69％及54％；而且30位學生中有25位（83％）所發展的乘法問題之正確率均比除法高或差不多，若以「單位量」觀點討論，表示學童較擅於把高階單位表示之量轉化成低階單位表示之量的乘法活動。例如部份學童在自由發展之問題，儘管個人已發展出三、四道問題，但卻均未涉及到除法，如（GL3）有一朵花，花瓣15個，長了2倍，掉了1倍，請問現在有幾個？或（BL4）弟弟有1箱汽水40灌，哥哥拿3灌，爸爸拿2灌，媽媽又買1箱是多少？等（句中「灌」爲該生對「罐」的錯字）。此結論不僅可支持Suydam（1984）指示的「除法對許多九年級之前的學生而言，延續是一個困難」，亦可佐證Greer和Mangan（1984）在探究乘除法問題結構變項之發現，即無論結構變項如何，整體而言，學生對除法問題比乘法問題感到困難。此或許也能證實陳春杏（1989）的質疑，即學童對「除法」之意義及運算間存在的關係瞭解不夠，因而造成高年級學生成績之急速滑落。

二、問題結構分析

以下將分別針對學生在四個階段所發展的問題作結構分析，藉此去探究學童對乘除法問題的認知結構，以瞭解其乘除概念。

(一)模仿法

1.**乘法【1~】：**茲以【1-1】某班級在銀行存款10000元，一年的利息是本金的13％，一年之後共得多少錢？爲例分析。在該素材正確發展的33道問題（正確率87％）中，若以數字而言，只有2道保留原始量（10000）及3道保留大小比率（13％）；若以情境而言，只有1道保留主體（某班級）及物件（銀行存款）。其它大多以「不同的主體」、「相同或不同的物件（如郵局存錢、媽媽那存錢等）」配上「不同數字」來發展問題，例如（BH1）爸爸在郵局有3200000元，半年的利息是原本的9％，半年之後共得多少錢？或（GL3）媽媽在房間存10000元，一年的利息是本金的13％，一年之後共得多少錢？

2.**除法【5~】：**茲以【5-1】大華在棒球比賽中，打擊10次，擊出3支安打，請問他的打擊率是多少？爲例分析。在該素材正確發展的25道問題（正確率76％）中，只有2道保留數字（10及3），其它均以「不同的主體與物件」配上「不同的數字」來發展問題，例如（BH3）小名在某足球賽中，射門20次，進了17球，請問他的入門率是多少?或（GH4）美國轟炸大陸，大炮開火20次，只有4次擊中市政府，請問美國的擊中率是多少？或（BH4）1件商品售價8520元，原價10000元，問打幾折出售？

綜合以上結果可知，無論乘法或除法，學童大多更改原佈題數字，再將他們經驗過的事物（如物件、主體），順著原來型式依樣畫葫蘆地反應到問題中。

(二)算式

1.**乘法【2~】：**學生對乘法算式正確發展問題之方式大致分三種類型，以【2-1】$15\times6=90$正確發展的24道問題爲例，分析如下：

(1)**比例因子型：**佔19/24（79％），又分兩類。

較前面的數（15）作爲「單位量」，此類最多，佔17/24（71％）；其中依算式裡數字先後出現的次序（先15再6）發展問題的較多，有15/24，如無主體的（GH3）一顆蘋果15元，買6顆要多少元？以及主體在問題開始的（BL4）爸爸買筆一盒15元，爸爸買6盒要多少元？與主體在問題之中的（BL3）一本筆記15元，王小名要買6本，請問要多少元？至於顛倒數字次序（先6再15）的只有主體在問題開始的2/24，且均是高學校能力者所爲，如（BH2）小明買筆記本6本，一本15

元，請問小明共花了多少元？

較前面的數（15）作爲「單位數」，僅佔2/24（8 %）。先15再6或先6再15的各佔一題，分別爲（BL2）小明買15包彈珠，一包6個，小明有多少彈珠？和（BM1）小明買糖果1包6塊糖果，請問15包幾塊糖果?

(2)**大小改變型：**佔 2/24（8 %），全是以數字先後出現的次序發展之倍數法問題，其中乘數（6）均爲常量，如（GM4）小明有 15元，他 6 倍是多少錢？或（GL3）妹妹手上有15個蘋果，她的6倍是多少？

(3)**交叉改變型：**佔3/24（13 %），全是依算式中數字先後出現次序發展之面積問題，如（GH2）教室的長 15 公尺，寬 6 公尺，問面積是多少平方公尺？

2.**除法【6~】：**學生一般對除法算式之正確發展之問題大概也只有三類，茲以【6-1】21/3=7正確發展的26道問題爲例，分析如下：

(1)**等分除：**即以欲求的商（7）當「單位量」，佔 18/26（69 %）。問題情境均依算式中數字先後出現的次序（先 21 再 3）安排，如（BM2）大崴的班級有 21 人一起去玩，叫 3台遊覽車，每台可作多少人？（句中「作」爲該生對「坐」的錯字）

(2)**包含除：**即以欲求的商（7）當「單位數」，佔4/26（15 %）。其中照式中數字出現次序（先21再3）的只有1/26，顛倒次序（先3再 21）發展的有 3/26，前者如（BM5）弟弟有21元，要買1顆3塊錢的糖果，共可買幾顆？後者如（GL2）糖果一個3元，21元可買幾個？

(3)**反求因子：**佔4/26（15 %），全是有關面積問題的逆運算；且其中依數字出現或顛倒次序發展的均各有 2/26，後者如（GL3）一個長方形，長是 3 公分，面積 21 平方公分，問寬是多少？

3.**含乘或除法之多步驟【9~】：**其中「比例因子」型佔了有關乘法情境之多數，但涉及除法情境的卻"完全"是「等分除」問題，如在整數素材【9-1】中正確的全是「比例因子型」及「等分除」，非整數之【9-2】與【9-4】就「大小改變型之倍數法」及「比例因子型」各佔42 %及58 %與36 % 及64 %。之中有關乘、除法的結構與上述單步驟差不多，如在【9-1】5×6=30，30/3=10，（GL1）妹妹有5包糖果，每包有6個分給3人，每人得幾個？或在【9-2】4×0.8=3.2，3.2/4=0.8，（BH4）1件物品4美元，因經濟不景氣而以80 %出售，後又因眞的賣不出去而以 25 %售出，問售出的價格幾元？或（BM4）小明有4公升的水，小晶是他的0.8倍，小晶要把他的水，分給4個人，請問一個人可以拿到多少公升的水？

綜合以上結果可知，乘法大多爲「比例因子」型，且問題中之「高階單位量」（甯自強, 1993）多出現在算式中較前面的數，其亦是「實體指示物」先確定的數，如【2-1】15×6=90中的「15」或【9-1】5×6=30，30/3=10中的「5」。除法則多爲「等分除」，「高階單位量」大多是欲解決的商數，如【6-1】21/3=7中的「7」或【9-1】中的「10」。額外無論學生發展那一類型問題，他們多數是按照數字先後出現的次序去發展問題情境，而且不管算式記錄已有答案（如15×6=90的90），他們仍視其爲算式填充題中未知數在等號右邊的「標準算式填充題」（如15×6=(　)），因此所發展之問題全是形如沒有答案的問句（如以上例子所示）。由於考量學生習慣的數學問題多爲沒有答案的問句，加上在模仿法中的問題亦是如此，故評量時這些擬題均屬正確。

(三)算式填充題

1.**乘法【3~】：**學生正確發展問題之方式除了【3-3】素材是比例因子與交叉運用（面積）兩種類型並駕齊驅之外，其它三個素材大致是「比例因子」一類型，茲以【3-2】12×(　)

= 300 爲例，說明學生正確發展 29 道問題之方式（之中只有 1/29 是交叉運用之面積型），其中按照「先 12，再 300，最後（ ）」順序發展之問題佔 20/29（69％）：

(1)**未知數（ ）作爲「單位數」：**即式子中較前面出現的數（12）當「單位量」，佔 23/29（79％）。以式中第一個出現的數字 12 開始發展問題的最多，有 21/29（72％）；其中先 12，再 300，最後（ ），佔 17/29（59％），如（BL1）巧克力 1 包 12 元，弟弟買巧克力共花了 300 元，請問他買幾包巧克力？而先 12，再（ ），最後 300，佔 4/29（14 ％），如（GH5）爸爸每天給我 12 元，請問要幾天我才有 300 元？至於先 300，再 12，最後（ ），只佔 2/29（7％），如（GH1）小英到書局買筆記本，花了 300 元，一本是 12 元，小英共買了幾本？

(2)**未知數（ ）作爲「單位量」：**佔 5/29（17％），全部以式中第一個出現的數字 12 開始發展問題。其中先 300，後（ ）的有 3/29，如（BL2）有十二個人要分三百隻筆，一人可的幾隻？或（GH2）小明買了 12 枝原子筆，他花了 300 元，問一枝筆要多少錢？而先（ ），後 300 的有 2/29，如（BH5）12 個人每人各繳多少錢才能湊齊 300 元？或（BM2）12 個人有同樣的筆但不知每人有幾支，只知合起來有 300 枝？1 人又有幾枝筆？（句中「支」爲該生對「枝」的錯字）

2.**除法【7~】：**所有四個素材正確發展問題之方式幾乎只分成「等分除（求異單位量間的比率）」與「包含除（除數爲異單位量間比率）」兩種類型。茲以【7-2】147 ÷（ ）= 21 爲例，說明學生正確發展 25 道問題之方式，而其中按照「先 147，再 21，最後（ ）」順序發展之問題佔 18/25（72％）：

(1)**未知數（ ）作爲「單位量」，即「等分除」：**佔了多數的 16/25（64 ％），且全部的問題是從式子的第一個數字 147 開始發展，其中有多數的 14/25（56％）是「先 147，再 21，最後（ ）」，如（GM3）小金用 147 元買了 21 顆蘋果，問蘋果一顆幾元？有 2/25（8 ％）是「先 147，再（ ），最後 21」，如（BM5）妹妹有 147 元，想買一本書不知道多少錢，只知可以買到 21 本，問一本書多少錢？

(2)**未知數（ ）作爲「單位數」，即「包含除」：**佔了少數的 9/25（36％），而學校能力高者佔了後者 5 題，其中 7/25（28％）亦從 147 開始發展，「先 147，再（ ），最後 21」，佔了 3/25，如（GH3）維尼有 147 顆蘋果，不知道分給幾人，每人都有 21 顆，請問維尼分給幾人？而 4/25 是「先 147，再 21，最後（ ）」，如（GH1）電腦資訊科徵考，有 147 人報名，每 21 人一班，共有多少教室？只有 2/25 不是從 147 開始發展的問題，其爲（BL2）同樂會一人可拿糖果 21 顆，老師買了 147 顆請問老師可請幾個人？和（GH4）慶生會，每一個小朋友可以拿 21 個蘋果，小明買了 147 個蘋果，請問他只能請幾個小朋友？

綜合以上結果可知，算式填充題之乘法幾乎是「比例因子」型，除法則多爲「等分除」，少爲「包含除」，且問題中之「高階單位量」在乘法中大多爲式子中較早出現的已知數，其亦是「實體指示物」先確定的數，如【3-2】12 ×（ ）= 300 中的「12」；在除法中卻多爲欲解決的未知數，如【7-2】147 ÷（ ）= 21 中的「（ ）」。除此之外問題幾乎是以式子的第一個數字開始，且無論未知數的位置在何處，大多將其安排在問題情境的最後。

(四)自由法

由於自由法是屬「未定義已知與未定義目標」的素材，故學生自由發展之問題結構除了「類型」變項之外，尚涉及到「數域與計算信念」。

1. **類型**

(1)**乘法【4】：**學生自由發展問題之正確

率爲 105/112（94 %），其類型是模仿法中的三類：

大小改變型：佔 13/105（13 %），只有 1/105 涉及「利息」，即（GH1）小明有 152000 元存在郵局裡，一年的利息是 50 %，請問三年後，郵局裡的存款是多少錢？其它全是「倍數」問題，如（GM1）一場籃球賽在台中市體育館比賽，剛開始有 510 人來看，到了中場又來了前面的人 4 倍，請問體育館裡共有多少人？

交叉運用型：佔 8/105（7 %），全是【1-2a】的面積問題，如（GM1）一個長方形的田地，長是 50 公尺，寬是 45 公尺，請問這個長方形面積是多少平方公尺？

比例因子型：佔 84/105（80 %）。其中「實體指示物」先提到「單位量」的佔 70/105（67 %），如（GH5）一枝鉛筆 6 元，小都買了 4 枝鉛筆，請問小都共花了多少元？或（GH3）一包餅干賣 12 元，有 5 個人，每人各買 3 包，請問共花多少元？「實體指示物」先提到「單位數」的佔 14/105（13 %），如（BM2）有一袋糖果，平均分給 500 個人，每個人各得 10 顆糖果，請問共有幾顆糖果?或（GH1）馬路一旁種 51 棵榕樹，每 2 棵樹間隔是 200 公尺，請問馬路一共是多少公尺？

(2)**除法【8】：**正確率爲 51/62（82 %），其類型是模仿法中的五類：

求同單位量間的比率：佔 1/51（2 %），即（BH2）哥哥有 10 顆糖，弟弟有 5 顆糖，請問哥哥是弟弟的幾倍。

求異單位量間的比率（等分除）：佔 36/51（71 %），如（GM2）幼稚園的老師自己做了 15 塊餅乾，平均分給 3 位小朋友，每人得幾塊餅乾？

除數爲異單位量間比率（包含除）：佔 9/51（17 %），如（BL5）xxx 有 3600 萬，每 1 次去銀行領 600 萬，xxx 總共可拿幾次？或（BH5）一條高速公路長 595 公里，請問一臺汽車時速 85 公里要多少小時才能跑完那條高速公路？

除數爲大小改變因子除法型：4/51（8 %），如（GH2）小櫻有 56 張庫洛牌，她是小可的 8 倍，請問小可有幾張庫洛牌

反求因子：佔 1/51（2 %），即（GH4）有一長方形，長 8 公尺，面積 56 平方公尺，問長方形的寬是多少公尺

(3)**含乘或除法之多步驟【10】：**正確率爲 40/82（49 %），其中涉及乘法情境之問題完全沒有「交叉運用型」，而「大小改變型之倍數法」及「比例因子型」則各佔 27/40（68 %）及 13/40（32 %）。而除法情境之問題完全是「等分除」。如（BM2）有一個人養了 8 隻小豬，被吃了 2 隻，又買了 2 倍的豬，賣了一半，請問現在剩下幾隻？

2.數域與計算信念

(1)使用較小整數

若加上研究前的【0】，學生在自由法【0】、【4】、【8】與【10】四個素材所發展之「全部」問題中，無論是一位數或多位數幾乎全是「整數」，除了【4】有 5/112 含有小數、【8】有 3/62 使用「一半」字眼與 1/62 帶有分數、以及【10】各有 5/82 與 1/82 含有小數與分數外。而且此四素材題目中使用到數字爲「2~5」及「6~9」的分別是 61 及 21 次、80 及 34 次、50 及 24 次與 90 及 50 次，而在【10】中使用到數字 6 的就有 20 次。因此問題中出現較小數字（2~5）之頻率是較大數字（6~9）的 2~3 倍左右。前者與馬秀蘭（2001）在探討發展加、減法問題中，學生自由擬題大概是「整數」之結果有相同的發現。而後者與 Dehaene 和 Mehler（1992）的有關數字出現在眞實世界環境中之頻率之研究結果「無論是一位數或多位數，較小數實際上是比較大數常見」不謀而合。事實上研究指出，美國一至六年級之小學算術教材在加法與乘法上有強烈使用較小數之偏見（small fact

bias），運算域（operand）大於 5 的較大數發生之頻率是 2~5 運算域的一半；而且孩童與成人均表示反應較大數答案是比較小數速度慢且易於犯錯（Ashcraft & Christy, 1995）。而從認知心理學觀點來看，著重在整數事實之算術成就模式（Ashcraft, 1992; Campbell & Oliphant, 1992; Siegler & Shipley, 1995）最後是以像網路的架構被儲存在長期記憶裡，而且重複被一些負責補救文字知識之相同過程所恢復。而記憶之強度是個人練習及經驗之函數，個人經歷一個事實愈頻繁，在記憶裡之儲存與互相關連則愈強（Ashcraft & Christy, 1995; Hamann & Ashcraf, 1986）。因而依此模式理論，學童對整數之記憶強度大，而其中較小數被存在記憶裡之強度是高於較大整數；此正可支持本研究上述之結論。

(2)符合計算信念

學生在【4】正確發展之 105 道乘法問題中，只有 1/105 是「乘數小於 1」之問題，即（BM4）1 件商品 852 元，打 1 折出售，售出時幾元。「乘數大於 1 之整數」有 100/105，「乘數大於 1 之非整數」有 4/105；後者如（BM2）丫仁的撲滿有 250 元，哥哥是他的 3.5 倍，哥哥有多少錢？或（BL5）小實每 1 小時走 10 公里，5.3 小時走幾公里？在【8】正確發展之 51 道除法問題，幾乎都是設計完美的，即「被除數大於除數且整除」的情境，除了有 1/51 是被除數「小於」除數之問題，即（BH1）冬冬有一罐兩公升的汽水，想分 5 天喝完，每天可喝多少汽水？以及 4 道「不整除」或「商非整數」之問題，如（GM4）大雄有 5 份銅鑼燒，分 2 人，1 人得多少？而 50 道整數型態中，僅有 1 道是「除數小於 1」，即（BH5）一個學校的男生總共有 8361 人，卻只佔女生所有人的三分之一，請問女生總共有多少人？在【10】正確發展之 40 道多步驟問題，涉及到乘法情境且「乘數大於 1」之問題有 36/40，至於牽涉到「除法」情境時，則全是「被除數大於除數且整除」之問題。如（BH1）小寶有 350 元，買了 70 元的鉛筆，媽媽又給小寶 0.5 倍的錢，小寶想把錢分成 3 份，每份有多少錢？此結果說明多數學生發展問題方式亦受「直覺模式」影響，大多未將乘除概念的基模擴大，仍侷限在當初由加減法導入之乘除概念（即乘是累加、除是連減）之範疇內；所以當自由擬題時，各種問題情境裡就會預先設計好一些吻合「乘變大、除變小並整除」前題的數字。

綜合以上兩種問題結構之變項可知，學生在自由法所發展之單一乘法問題中大多（八成）是「比例因子型」，但在多步驟中多數（近七成）是「倍數法」，其它是「比例因子型」，且問題情境中「實體指示物」先提到的以「單位量」爲多，除法大多（七成）是解決「單位量」未知的「等分除」問題；同時問題儘量使用較小整數（2~5）及符合計算信念的標準算式填充題（無答案）去發展。因此【4】與【8】之正確率 94 %與 82 %均高於「所有」乘法及除法素材之平均正確率 79 %與 68 %。此說明影響學童「逆向」思考數學之擬題（Booth, 1986）之乘除法的方式或結構變項與「正向」思考數學之解題相似，均與「直覺模式」（Fischbein *et al*., 1985）以及與數字性質與大小有關（Bell *et al*., 1984, 1989; Hart, 1981）。

三、影響學生發展問題的原因分析

(一)非整數範疇

【6-4】是有關分數除法的素材，其正確率爲 66 %；【6-2】、【6-3】、【9-2】與【9-4】是有關小數除法之素材，其正確率各爲 58 %、47 %、39 %與 44 %。它們分別比「整數」素材的除法【6-1】之 84 %以及多步驟【9-1】與【9-3】的 72 %與 74 %低許多。其中的迷失概念，例如符號「/」可表分割運算「除」，又可表分割後之結果「分數」，因而問題中有「一號兩用」的現象產生，如在【6-4】5/6 ÷ 3 = 5/18，（BL3）

有一個蘋果分成 6 分之 5，再平均分給 3 人，請問 1 人有多少蘋果？而分數符號「1/2」或小數符號「.5」，因又涉及到常用的分數語言「一半」，則學童更易迷失，比如在【6-2】4.3/2 = 2.15 有 3 道如此問題，如（GL1）4.3 元的糖果一半分給 2 個人，每個人可以得到幾顆糖果呢？【6-3】3.5/5 = 0.7 亦有 5 道問題，如（BM3）奶茶一半 3.5，分 5 個人是多少？

此結果透露，只要面臨「小數」或「分數」，學生擬題的成功率就降低，其與馬秀蘭（2000b, 2001）之國小高年級學生在發展數學「加減法」問題情境之發現相同，均顯示出學童對分數與小數的應用不清楚。亦和 Ball（1990）與 Simon（1993）在依算式寫或說出文字題之研究結果相似，即當「除法算式」包含分數時，大部份受試者無法正確地把算式與實際情境相連接。其實分數或混合數（mixed numbers）之運算以及小數除法是引起許多年級層學生最大困難之五大主題之二（Suydam, 1984）。「分數」的教與學不僅非常困難，且是一個令人沮喪的失敗（Davis, Hunting & Pearn, 1993），因它同時存在三階單位，例如：一盒梨子有 8 顆，1/4 盒（1 份）有 2 顆，則同時有「盒（8 顆）」、「份（2 顆）」及「顆」三階單位（除非 1 份恰有 1 顆，例如：一盒梨子有 4 顆，1/4 盒（1 份）有 1 顆）；而 1 盒（8 顆）與 1 份（2 顆）的「部分-全體」關係不易掌握（國立編譯館, 2001）；此或許可解釋學生對分數之困惑。至於學生對於「小數」之乘除法算式方面存在相當大之困難，此在簡茂發和劉湘川（1993）針對全國性國民教育階段學生基本學習成就評量中即曾表示過。

(二)不符合計算信念

「除法」受計算信念之影響較大，如「被除數小於除數」的【6-3】及【6-4】之正確率各只有 47 %及 66 %；而有餘數的素材【6-5】37/5 = 7…2，61 %之正確率也不高。此反映出學童對「餘數」的陳述性概念不清楚。而 Ball（1990）與 Simon（1993）在其研究中也發現，當受試者面臨不能整除之算式時，不能正確說明商數和餘數所代表之含意，也不清楚二者之計數單位。Silver（1986）將此歸咎到孩童早期是被用除法之「等分模式」與「商數之趨近」去學習除法算則，而此誤配（mismatch）促使概念知識與程序知識連結不足；而此連結之不足在學生沒有能力去詮釋餘數下特別被察覺。在【6-5】中，因慣於等分及趨近情況，而忽略餘數存在的佔了 4/31（13 %），如（BL1）小明有 37 顆糖果，分給 5 個人，每個人可以得到幾顆糖果？至於乘法中的「乘數小於 1」的【2-3】（82 %）與【2-4】（71 %）則不太受「計算信念」之影響。

(三)多步驟

【9-2】、【9-4】及【10】之正確率只有四、五成左右。其中有無法處理多種單位的「換單位」等問題（蔣治邦等人, 2000），如（BL4）在【9-4】60 × 0.8 = 48, 48-5 = 33, 33/3 = 11，汽水 1 箱 60 灌，小弟弟喝 0.8 公升，哥哥喝 48 公升，妹妹喝 15 公升，爸爸拿 1 灌 33 公升，媽媽 3 公升是多少？（句中「灌」爲該生對「罐」的錯字）。也有不能掌握多步驟問題之情境脈絡，只能分別擬出簡單的單步驟或二步驟問題，卻無法同時將加減乘除整合在一個題目裡，或問題中含有多步驟問題，但卻沒有涉及乘或除法情境的，後者如（BM1）在【10】小于有糖果 100 顆，小翔有糖果 50 顆，而小明有糖果 25 顆，請問他們三個人全部共有多少顆糖果呢？事實上，在自由題下，不少多步驟也僅出現涉及一個單位之乘法倍數問題，如（GL3）有一朵花，花瓣 15 個，長了 2 倍，掉了 1 倍，請問現在有幾個？這些均可透露學生對適當單位之辨別有障礙（Simon, 1993）或無法混用兩階單位（游麗卿, 1999）等。

(四)算式填充題未知數之位置

未知數在「運算符號」位置，如【3-4】12

（ ）25 = 300 與【7-4】147（ ）21 = 7，正確率各只有 37 %與 55 %。如（BL4）在【3-4】，水深 12 公尺現挖 25 公尺才有 300 公尺，在【7-4】，游泳池水深 147 又放 21 公尺是多少。此可與馬秀蘭（2000b, 2001）研究指出，數學應用題中的「動詞」是造成學生發展「加減法」問題失敗之原因相呼應。其或許是緣自學生沒有找到有意義於他們之指示物去表示相關之運算符號所致（Davis, 1984; Hieber, 1988）。

未知數在「被除數」位置，如【7-3】（ ）÷ 21 = 7 之正確率只有 7/32（22 %），其原因主要是有 18/32（56 %）之問題是將【7-3】轉換成乘法「21 × 7 = （ ）」或「7 × 21 = （ ）」的形式來發展，如（BH2）小華有 21 架眼鏡，oo 眼鏡行的眼鏡是小華的 7 倍多，請問 oo 眼鏡行有幾架眼鏡？或（GH1）每人 7 顆糖果，有 21 人，請問共有幾顆糖？但由於學生未按照數量操作活動的順序來發展問題，因此這些問題在評量時是被判斷「不正確」。這些寧願靠執行乘法來成就除法的學童，無論是否可能早期對長除法有不舒適的經驗（Zazkis & Campbell, 1996）或其他原因，他們對含有未知量操作活動記錄的算式填充題，如（ ）÷ 21 = 7，之擬題過程，則是將傳統計算題「列式」之方法，如 21 × 7 =（ ）或 7 × 21 =（ ）作爲他們將發展問題的列式結果；此即反應學生在列式過程中，已經藉用了乘法是除法的逆運算概念，重組了（ ）÷ 21 = 7 中，量與量間的關係。

(五)比例少之類型或學生生活經驗不符之教材

在模仿法中，乘法的「交叉運用型」【1-2b】之正確率只有 58 %，除法的「反求因子」【5-5】的正確率亦只有 63 %。其反應出此二型是學生不熟悉的類型，其中【1-2b】交叉運用之「排列題」較少出現在課本中，「反求因子」在六十四年版之國小數學科共十二册中約只佔 4 %（陳春杏, 1989），加上其爲乘法交叉運用（面積）型的逆運算，無怪乎學生表現不佳。此正可說明教室中之課程缺乏讓學童浸浴在不同的問題情境中，也是造成學生在發展數學問題時困難的原因之一（Fuson, 1992; Stigler, Fuson, Ham, & Kim, 1986）。

在模仿法中，學生發展之問題有與現實生活狀況不符的，如在【1-1】中，有利率高到離譜的 60 %，或一年的利息是本金的 26 倍等。在【1-3】中，將原佈題之連續量物件（糖）更改成離散量（銅鑼燒），但卻仍保留其中單位數（0.7），如（BL3）銅鑼燒每一個要賣 19 元，買 0.7 個要花多少元？或將【1-2a】原佈題之「教室」變更成「鉛筆盒」，而仍保留單位（公尺），如（BM1）鉛筆盒長 20 公尺，寬 10 公尺，它的面積是多少平方公尺？或只顧及故事情境卻不合乎數學之不可行問題，如將【1-2a】改成「正方形」，卻仍保留「長、寬」，如（BH3）有一正方形長 15 公尺，寬 10 公尺，他的面積是多少平方公尺？或將【5-5】的「長方體」改成「正方形」，（GM4）正方形杯子，長、寬、高各是 10、5、8 公分，在杯子裝 2 公升的水，水深幾公分？事實上該例尚涉及到體積與容積換算不清的問題，此類似情形佔了【5-5】的 6/33（18 %）。

因擬題是依賴學生之背景知識、價值及渴望產生的討論（Spanos, 1991），因此上述情況之發生或許要歸究到學校傳授的是和學生手邊工作不相關之知識，因而限制了他們數學概念之發展所致（Schliemann, *et al*., 1998）。因爲雖然「儲蓄」、「鉛筆盒、操場」與「形狀、水深」等是孩童生活情境之一部分，但由於欲解答之「利率」、「面積」與「體積、容積」等不是一般孩童平日須解決之工作，而這些非實際生活經驗之數學觀念對他們是沒有意義的知識。是故在數學概念教學上設計一個「情境學習」的環境，以解決日常生活工作是必須的，此即爲 Brown, Collins 和 Duguid（1989）之情

境認知觀點所強調的；他們主張知識、知識的學習與知識的運用是不可分的，因此學習歷程就包含活動、知識和文化。

四、學校能力不同學生所發展之問題分析

從表 3 可知，學校能力不同學生在乘法、除法、多步驟及全部34 個素材的正確率均依高、中、低程度遞減，其分別是在乘法的85％、77％、74％，在除法的78％、71％、59％，在多步驟的75％、56％、31％，以及在全部素材的81％、71％、61％。當進一步使用單因子變異數分析時，發現學校能力不同之高、中、低學生在除法、多步驟與全部素材三者均達顯著差異（$p < .05$、$p < .01$ 與 $p < .05$），如表 4 所示。以上結果反應不同程度學童在「乘法」問題發展能力上表現尚可，且差距不大，但在「除法」及「含有乘、除法多步驟」之能力上則漸

表 3：學校能力不同學生在各素材類型的正確率

	乘法【1-1】~【4】			除法【5-1】~【8】			多步驟【9-1】~【10】			全部【1-1】~【10】		
學校能力	發展題數	答對題數	正確率	發展題數	答對題數	正確率	發展題數	答對題數	正確率	發展題數	答對題數	正確率
高	179	152	85％	166	130	78％	67	50	75％	412	332	81％
中	192	148	77％	173	123	71％	71	40	56％	436	311	71％
低	175	130	74％	168	99	59％	70	22	31％	413	251	61％
全部	546	430	79％	507	352	69％	208	112	54％	1261	894	71％

表 4：學校能力不同學生在各素材類型之單因子變異數分析

	變源	平方和	自由度	均方	F 檢定	P-值
乘法	組間	0.056	2	0.028	1.219	0.311
	組內	0.620	27	0.023		
	總和	0.676	29			
除法	組間	0.278	2	0.139	4.195	0.026*
	組內	0.895	27	0.033		
	總和	1.173	29			
多步驟	組間	0.826	2	0.413	6.402	0.005**
	組內	1.742	27	0.065		
	總和	2.569	29			
全部	組間	0.187	2	0.094	4.228	0.025*
	組內	0.599	27	0.022		
	總和	0.786	29			

*$p < .05$、**$p < .01$

行漸遠，且有顯著之差異存在，其中低能力者之表現尤其不佳，他們之中有的乘法和除法概念分別只是「加法添加型」和「減法取走型」的延續，或有的是沒有能力處理「內涵量」（Schwartz, 1988）之問題，而只會處理單一向度之「外涵量」問題等。此或許是造成高年級學生的學校能力差距漸大之原因。

其次分析與問題發展技能有關的總產量（fluency）、類型之變化數（flexibility）及創意之多少（originality)(Silver, 1994)，發現低學校能力者與中、高學校能力者發展之問題總產量相差不多，各有 412 題、436 題、413 題。此與陳美芳（1995）藉分析學生之擬題去了解學生的乘除概念之研究結果"優秀組學生擬題數顯著多於中等組學生"不同。此顯示利用網路上的 BBS 能促進學生「長期」發展問題的意願，尤其網路的「隨時、隨地、任何人」的效益帶動「低學校能力者」投入數學的活動中，他們從一般數學課堂上沈默的邊緣人，變成參加者。至於不同學校能力學生發展問題類型之變化數亦相差不多，乘法多數偏向「比例因子型」或「倍數法」問題，除法則多爲「等分除」或「包含除」，但其中「包含除」多爲學校能力高者所爲。

而考量有創意問題時，發現大多爲高學校能力學生所發展，但能力高者卻不保證其發展之問題有創意。BH5、GH4、GH3 與 GH1 是全部 34 個素材擬題正確率的前四名，且其中 BH5 和 GH3 分別佔乘法和除法素材的第一名，BH5、GH1 和 GH4 則同時居多步驟素材的第一名；他們發展之問題不僅正確率高，且問題之長度較長、前後較有邏輯性、結構較完整、並較有創意，如（BH5）小倆有 43 包驚喜包，而一包驚喜包裡面有 23 隻玩偶，有一次他給同學 329 隻玩偶，他爸爸又給他三包驚喜包，最後他把全部的玩偶分給三位好朋友，請問一個好朋友可分到多隻玩偶？或一個班級全班 40 人，而每人各出 15 元來買 429 元鞋架，那班學生的父母又支出 1143 元來當班費，最後大家把所有錢平分給這次月考前三名的同學，請問前三名的一個同學可得到幾元？（GH3）麗雯有一顆西瓜切成 6 等份，吃了其中 1 等份，剩下的分給 3 人，每人得幾分之幾？由上結果可知，此四位高學校能力者亦擅於發展問題，即創造能力亦高，故是屬於 Krutetskii（1976）所謂眞正之「高數學能力」者。

然而另外兩位高學校能力的 BH2 及 BH4，不僅發展之問題平常（無創意）且有迷失概念，因而正確率低（居全部素材的第 21 名及 20 名），如（BH2）妹妹有 26 顆糖，姊姊給她 6 顆糖，妹妹給朋友 12 顆，妹妹又拿到 3 人給她的 10 顆糖，再分給 5 人每人得幾顆？或（BH4）100 顆糖果給弟弟 10 顆，給哥哥 8 顆，哥哥拿了 8 顆中的 2 顆，其餘分給 3 人，1 人幾顆？此反應出他們發展問題（創造）的能力不佳，因而數學能力是有待考驗。

綜合上述結果可知，當論及到學生的數學能力時，學校能力高者不一定有高的創造（問題發展）能力。因此本研究之結果對數學能力包含之兩種能力應該有關聯（Krutetskii, 1976）之詮釋爲「創造能力強者只是學校能力高的充分（但非必要）條件」。

伍、結論與建議

綜合上述發現，本文提出下列結論與建議，以作爲未來課程修定及教學之參考。

一、本研究是藉網路的 BBS 去促進學生「做數學」的樂趣，全體樣本願意在將近一學期的時間裡上網，持續去發展數學問題，尤其是「低能力」者產生問題之數量與其它能力者不差上下，故 BBS 的效益眞的帶動學校能力低的學生投入數學的活動中，他們從一般數學課堂上沈默的邊緣人，變成參加者。所以再一

次證明藉網路的 BBS 去促進學生「做數學」的意願是可行的，BBS 可被視爲一個支援、協助低學校能力學生發展數學問題的管道。

二、在學生正確發展「單步驟」之乘除法問題中，「比例因子」以及「等分除」之語意最頻繁（約七、八成），但在「多步驟」問題中，「倍數法」與「比例因子」以及「等分除」就主宰乘除法之情境脈絡；而「單價法」亦常被套用在問題情境中。在算式素材中，學童大部份是按照數字先後出現的次序去發展問題情境，在算式填充題中，也幾乎是以式子的第一個數字開始發展問題，但無論「未知數」所在位置爲何，多數（約六、七成）是將未知數安排在問題情境的最後。在乘法中「實體指示物」先確定的數大多是「高階單位量」，其大多出現在式子中較前面的數，而除法則是出現在欲解決的數（如商或未知數）。學生大多將生活經驗較多的「食物」（多爲離散量）或「貨幣」作爲欲發展問題之「實體指示物」。至於在自由法下，學生多以「整數且符合計算信念」的數字融入問題的情境脈絡中，其中使用較小數字（2~5）之頻率大約是較大數字（6~9）的 2~3 倍。由於以上之乘除問題情境是學童在近半年的時光下所發展出來的，加上研究前與中，學生發展的問題情境均差不多，因此研究結果當能反應出學童在日常生活應用乘除法之模式，以及他們的日常生活經驗與數學認知程度。尤其它源自學生用自己的語言或熟悉的事物所發展的數學問題，符合學童的先備經驗，因此建議可做爲教師在進行「補救教學」時的例子。

三、學生所發展之乘法、除法及多步驟乘除法問題之正確率依序降低（79％、68％及 54％），多數學生所發展的乘法問題之正確率均比除法高或差不多，但大部份學生沒有能力去掌握困難度較高之含有乘法或除法之「多步驟」的問題情境脈絡。至於影響學童「逆向」思考數學之乘除法的擬題方式或結構變項與「正向」思考數學之解題相似，均與「直覺模式（計算信念）」以及數字性質與大小有關，其中學生在「非整數且不符合計算信念」中涉及到「除法」運算的表現最差；額外未知數在前之除法與未知數在動詞位置之乘、除法，還有比例少之類型以及與學生生活經驗不符之教材亦是影響學生發展問題的原因。至於數學與現實生活（或故事情節）無法兼顧之問題也易發生。因此建議在非整數概念教學上應借用中介歷程或具體物學習，而爲了讓學生解決日常實際工作，設計一個「情境學習」環境亦是需要。除此之外，教材中應增添除法及「多步驟」之問題，以避免孩童早期乘除法侷限在整數領域與較簡單之情境問題之經驗，而影響數域的推廣與較複雜化情境問題之發展。

四、學校能力不同學生在乘法問題發展之能力上表現尚可，且差距不大，但在除法、多步驟乘除法以及全部素材上均達顯著差異，其中低能力者在除法及多步驟問題之表現上尤其不佳。而不同能力者在問題發展之總產量與類型之變化數上均相差不多，但「包含除」類型則多爲能力高者所擬；且能力高者發展之問題結構較爲完整，也較有邏輯性及創意。當考量到數學能力時，創造能力強者是學校能力高的充分（但非必要）條件。因此建議教學中加入與創造能力相當的問題發展（擬題）課程，如此才能讓學生的數學能力均衡成長。

五、本研究只是一個探測性計畫，僅使用傳統以文字爲主的 BBS 當橋樑，因此侷限了布題的內容及學生問題發展的表現。由於擬題素材對擬題者有一定的影響（梁淑坤, 1997b），因此後續研究建議使用 WWW 上功能較強並可貼圖的 BBS，以擴展布題的內容。額外並建議擴大樣本學生的範圍，以收集來自各地學生的問題，以發揮電腦網路「隨時、隨地、任何人」之功能。

附　　錄

【1-1】大小改變：某班級在銀行存了 10000 元，一年的利息是本金的 13 %，一年後他共可得多少元？

【1-2a】交叉運用：教室長 9 公尺，寬 7 公尺，它的面積是多少平方公尺？

【1-2b】7 個女孩和 6 個男孩分別配對跳土風舞，每對中分別有一女孩和一男孩，可有多少種不同的配對方式？

【1-3】比例因子：糖每公斤賣 19 元，買 0.7 公斤要花多少元?

【2-1】$15\times6=90$【2-2】$32\times1.6=51.2$

【2-3】$18\times0.7=12.6$【2-4】$2\times1/3=2/3$

【2-5】$2/5\times4=8/5$

【3-1】$12\times25=(\ )$【3-2】$12\times(\ )=300$

【3-3】$(\ )\times25=300$

【3-4】$12(\ ?\ )\times25=300$

【4】：乘法自由法

【5-1】求同單位量間的比率：大華在棒球比賽中，出場打擊 10 次，擊出 3 枝安打，問他的打擊率是多少？

【5-2】求異單位量間的比率：公園到海邊 7.5 公里，自強騎車花了 20 分鐘，問他的分速是幾公里？

【5-3】除數爲異單位量間比率的除法：每人分給 6 顆糖果，18 顆糖果可以分給幾人？

【5-4】除數爲大小改變因子的除法：買電風扇一台，加售價的 10 %作運費，共付 1400 元，電風扇每台多少錢？

【5-5】反求因子：長方體容器的長、寬、高各是 20、15、15 公分，在此容器內裝水 3 公升時，水深是幾公分？

【6-1】$21/3=7$　【6-2】$4.3/2=2.15$

【6-3】$3.5/5=0.7$【6-4】$5/6\div3=5/18$

【6-5】$37\div5=7\ldots..2$

【7-1】$147\div7=(\ )$【7-2】$147\div(\ )=21$

【7-3】$(\ )\div21=7$【7-4】$147(\ ?\ )21=7$

【8】：除法自由法。

【9-1】$5\times6=30$，$30/3=10$

【9-2】$4\times0.8=3.2$，$3.2/4=0.8$

【9-3】$15+6=21$，$21/3=7$

【9-4】$60\times0.8=48$，$48-15=33$，$33/3=11$

【10】：多步驟自由法。

誌　　謝

本研究承蒙國科會專題計畫經費補助（NSC 89-2511-S-275-002），主持人：馬秀蘭特此致謝。同時對審查與編輯委員們給予本文寶貴的意見與建設性的指正，獻上由衷的謝意。

參考文獻

1. 王文科（1886）：**教育研究法**。台北市：五南圖書出版公司。
2. 古藤伶（1986）：**兒童與創造思考**，邱石虎譯，板橋教師研習會。
3. 朱建正（1997）：**國小數學課程的數學理論基礎**。台北市：作者。
4. 周幸儀和梁淑坤（1994, 12 月）：**國小四年級乘除法文字題的擬題與解題的初步調查**。論文發表於中華民國第十屆科學教育學術研討會。台北市：國立台灣師範大學。
5. 坪田耕三（1987）：**生動的算術：讓小朋友自行擬題（1、2、3 年級）**（日本文）。日本：國土出版社。
6. 林碧珍（1991）：國小兒童對於乘除法應用問題之認知結構。**新竹師院學報**, 5, 221-288。
7. 馬秀蘭（1999a, 12 月）：**學童透過電子佈告欄系統進行數學解題之研究**。論文發表於中華民國第十五屆科學教育學術研討會。彰化市：國立彰化師範大學。

8. 馬秀蘭（1999b, 12 月）：**學童數學態度及解題策略延後評量的分析--以 BBS 爲溝通管道**。論文發表於數理教學及師資培育研討會。彰化市：國立彰化師範大學。
9. 馬秀蘭（2000a）：數學解題之研究--以 BBS 爲工具。論文載於**八十九學年度師範學院教育學術研討會論文集・資訊教育類（光碟片）**，1-32 頁。國立新竹師範學院。
10. 馬秀蘭（2000b, 12 月）：**數學問題情境發展之探討--以 BBS 爲管道**。論文發表於中華民國第十六屆科學教育學術研討會，台北市：國立台灣師範大學。
11. 馬秀蘭（2001）：透過電腦網路來發展數學加減法問題之研究。**科學教育學刊**, **9**(4), 375-399。
12. 國立編譯館（2001）：**國民小學數學教學指引-第九冊**。臺北市：國立編譯館。
13. 梁淑坤（1995）：**師範生擬題行爲之研究**。行政院國家科學委員會（NSC），NSC84-2511-S023-001。
14. 梁淑坤（1997a）：**擬題能力之評量：工具之製作**。行政院國家科學委員會（NSC），NSC84-2511-S023-006。
15. 梁淑坤（1997b）：**擬題與數學課程之融合**。行政院國家科學委員會（NSC），NSC85-2511-S023-003。
16. 陳春杏（1989）：國民小學數學科乘除法教材類型之分析與研究。**國教學報**, 2, 253-290.
17. 陳美芳（1995）：**「學生因素」與「題目因素」對國小高年級兒童乘除法應用問題解題影響之研究**。台北市：國立台灣師範大學博士論文（未出版）。
18. 游麗卿（1999）：**除法概念形成歷程中的錯誤分析對教學的啓示**。高雄市：復文圖書出版社。
19. 黃正文（1996）：**應用網際網路推行環境教育之研究—以電子佈告欄系統爲例**。台北市：國立臺灣師範大學碩士論文（未出版）。
20. 甯自強（1993）：單位量的變換。**教師之友**, **34**(1), 27-34。
21. 楊惠如（2000）：**擬題活動融入國小三年級數學科教學之行動研究**。嘉義市：國立嘉義大學碩士論文（未出版）。
22. 楊錦潭和林佳毅（1998, 12 月）：**互動式 Java 程式語言遠距課程設計**。論文發表於中華民國第十四屆科學教育學術研討會。高雄市：國立高雄師範大學。
23. 劉秋木（1996）：**國小數學教科教學研究**。台北市：五南圖書出版公司。
24. 蔣治邦、謝堅、陳竹村、吳淑娟和林昭珍（2000）：**國小數學教材分析 － 整數的乘除運算**。臺北縣：教育部臺灣省國民學校教師研習會。
25. 簡茂發和劉湘川（1993）：**八十一學年度國民教育階段學生基本學習成就評量國小組試題編製及抽測結果報告**。臺中市：國立臺中師範學院。
26. Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition*, *44*, 75-106.
27. Ashcraft, M. H., & Christy, K. S. (1995). The frequency of arithmetic facts in elementary texts: Addition and multiplication in grades 1-6. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(5), 396-421.
28. Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 132-144.
29. Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication (K-8): Helping children think mathematically*. New York: MacMillan.
30. Bell, A. W., Fischbein, E., & Greer, G. B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic

problems: the effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 129-147.

31. Bell, A. W., Greer, G. B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 434-449.
32. Booth, L. R. (1986). Child-method in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 301-316.
33. Brown, J. S. (1981). *Levels of understanding of number operation, place-value and decimals in secondary school children*. Unpublished Pro Thesis, University of London, Chelesea College.
34. Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning: A systems approach to educational testing. *Educational Researcher, 18*(10), 32-42.
35. Campbell, J. I. D., & Oliphant, M. (1992). Representation and retrieval of arithemetic facts: A network-interference model and simulation. In J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skills* (pp. 331-364). Amsterdam: Elsevier.
36. Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.
37. Connolly, P. (1989). Writing and the ecology of learning. In P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), *Writing to learning mathematics and science* (pp. 1-14). New York: Teacher College Press.
38. Davis, G. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, NJ: Ablex.
39. Davis, G., Hunting, R. P., & Pearn, C. (1993). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know? *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 63-76.
40. Davydov, V. V. (1991). A psychological analysis of multiplication. In L. P. Steff (Ed.), Psychological abilities of primary school children in learning mathematics. (pp. 9-85). *Soviet Studies in Mathematics Education Series, (6)*. (J. Teller Trans.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
41. Dehaene, S., & Mehler, J. (1992). Cross-linguistic regularities in the frequency of number words. *Cognition*, *43*, 1-29.
42. Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*. Holt, Rinehart and Winston for The Schools Council.
43. Ellerton, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems--a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 261-271.
44. Ellsworth, J. H. (1991). *Electronically mediated learning among adults*. Paper presented at the National Conference on the Adult Learner.
45. English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. J*ournal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 83-106.
46. Eslick, K. M. (1993). *Status of educational computer bulletin board systems available to Southern California*. Unpublished master theme, California State University, Long Beach.
47. Figueiredo, A. D., & Steele, R. (1992). *A Trans-European network for education and training*. Commission of the European Communities, Brussels, Belgium.
48. Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical

thinking. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-131). Antwerp, Belgium.

49. Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.
50. Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam & A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 53-187). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
51. Graeber, A. O. (1993). Research into practice: Misconceptions about multiplication and division. *Arithmetic, 40*, 408-411.
52. Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situation. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan publishing company.
53. Greer, G. B., & McCann, M. (1991). Children's word problems matching multiplication and division calculations. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteen International Conference for Psychology of Mathematics Vol.2*. (pp. 80-87). Assisi, Italy: Author.
54. Greer, G. B., & Mangan, C. (1984). Understanding multiplication and division. In J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of the sixth annual meeting of North American Chapter of the international group for the psychology of mathematics educational*. Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin, Madison, WI.
55. Hamann, M. S., & Ashcraft, M. H. (1986). Textbook presentations of the basic addition facts. *Cognition and Instruction, 3*, 173-192.
56. Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. John Murray, London.
57. Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 333-355.
58. Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades, 2nd*. (pp. 1-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
59. Hodgin, K. W. (1987, April). *Teaching mathematics through a writing experience approach*. Paper presented at the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Anaheim, CA.
60. Johanson, T. L. (1996). *The virtual of an online classroom: Participant interactions in a community college writing class delivered by computer-mediated communication (CMC)* Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University, Corvalis, Oregon.
61. Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: The University Chicago Press.
62. Leung, S. S. (1993). The relation of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content. Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh.
63. Leung, S. S., & Wu, R. X. (1999). Problem posing with middle grades mathematics: Two real classroom examples. *Mathematics teaching*

in the middle school, 5(2), 112-117.

64. Ma, H. L. (2000, January). *An exploration of aspect of Schoenfeld's mathematical problem solving*. Paper presented at Second International Conference on Science, Mathematics and Technology Education, National Taiwan Normal University, Taiwan.
65. Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 41-51.
66. Montana State Office of Public Instruction. (1991). *About METNET: Montana educational telecommunications network*. Laws of Montana, 52nd Legislature, Montana.
67. Muzio, J. A. (1992). *A comparison of mainframe and personal computer based bulletin board systems for computer-mediated communications in distance education courses*. Canada; British-Columbia.
68. National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Virginia: Author.
69. Reitman, W. (1965). *Cognition and thought*. New York: Wiley.
70. Rey, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. J*ournal for Research in Mathematics Education*, *29*(2) , 225-237.
71. Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, J. M., & Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. J*ournal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 467-486.
72. Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1992). Proportional reasoning in and out school. In P. Light & G. Butterworth (Eds.). *Context and Cognition*. Hemel Hempstead, UK: Harvester-Wheatscheaf.
73. Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassuné, M. A., Macedo, S., & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 422-435.
74. Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithemetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52).. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
75. Siegler, R. S., & Shipley, C. (1995). Variation, selction, and cognitive change. In T. Simon, & G. Halford (Eds.), *Developing cognitive competence: New approaches to process modeling* (pp. 31-76) Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
76. Silver, E. (1986). Using conceptual and procedural Knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-198). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
77. Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. In N. Nohda & F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the seventeenth annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education, Vol 1* (pp. 66-85). Tsukuba, Japan: Author.
78. Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.
79. Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problem in Mathematics Education: Mathe-

matical and pedagogical perspectives. *International Reviews on Mathematics Education, 2*, *67-72*.

80. Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 521-539.
81. Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 233-254.
82. Spanos, G. (1991). Cultural considerations in adult literacy education. *ERIC Digest*. U.S., District of Columbia.
83. Stigler, J. W., Fuson, K. C., Ham, M., & Kim, M. S. (1986). A analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction, 3*, 153-171.
84. Stovanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into student's problem posing in school mathematics. In R. B. Corwin, (Ed.), *Talking mathematics: Supporting children's voices*. Portsmouth, NH.
85. Suydam, M. N. (1984). A achievement in mathematics education. *ERIC/SMEAC*, *Mathematics Education Digest No. 1*. U.S., Ohio.
86. Tsubota, E. (1987). *On children's problem posing (grade 1 to 3)*. Japan.
87. Usiskin, Z. & Bell, M. (1983). *Applying arithmetic: A handbook of applications of arithmetic*. *Part II: Operation*. IL: Chicago University.
88. Wallerstein, N. (1983). *Language and culture in conflict: Problem-posing in the ESL classroom.* Reading, MA: Addison-Wesley.
89. Winograd, K. (1990). *Writing, solving and sharing original math story problems: Case studies of fifth grade children's cognitive behavior*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Northern Colorado, Greeley, Colorado.
90. Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(5*), 540-563.
91. Zoni, S. J. (1992). *Improving process writing skills of seventh grade at-risk students by increasing interest through the use of the microcomputer, word processing software, and telecommunications technology*. Unpublished doctoral dissertation, Nova University, Fort Lauderdale, Florida.

A Study of Developing Mathematical Problems of Multiplication and Division Using the BBS

Hsiu-Lan Ma
Ling Tung College

Abstract

The purpose of this research was to investigate the effect of using the BBS on student attention and motivation to solve multiplication and division problems. In addition it provides information about students' cognitive levels and their abilities to control various problem situations. The results show that student interest in using the web can be used to motivate students to develop mathematical problems during a semester. The developed problems can reflect the students' ideas of daily experiences and the cognitive levels required by multiplication and division. The students most frequently use the concepts of "multiple" and "rate factor" and "partitive division". The concepts of the "smaller integer" and "computational thoughts" are also included in developed problems. Because of the use of the web, lower ability students are motivated to stay involved. Therefore the BBS might be viewed as a venue to assist students with low school abilities to develop mathematical problems.

Key words: Multiplication and Division, Developing Problem Situations (Problem Posing), Bulletin Board System (BBS).