科學教育學刊
2004, 第十二卷第二期, 241-263

Chinese Journal of Science Education
2004, 12(2), 241-263

國小高年級學童分數概念量表之設計研究

詹婉華[1]　**呂玉琴**[2]

[1]台北縣新店市中正國民小學
[2]國立台北師範學院數學教育學系

（投稿日期：民國 91 年 12 月 10 日，修訂日期：92 年 9 月 8 日，接受日期：92 年 11 月 24 日）

摘要：在國小數學課程中，分數概念與小數、百分率、比、除法等概念關係密切，而這些概念也都是國小學童必須學習的重要概念。雖然國內有關國小學童分數概念的研究不少，然而，國內缺乏具有良好信效度的分數概念評量工具。本研究的研究目的在編製一份有良好信度與效度之「國小高年級學童分數概念量表」。本研究是以筆測試題爲研究工具，以多階段抽樣抽取全台灣的研究樣本，並以紙筆測驗方式進行資料的蒐集，樣本爲台灣地區國小高年級學童，共 2612 人。經共同因素分析檢驗「國小高年級分數概念量表」包含三個分數子概念：等分概念、單位量概念、等值分數概念。本研究在信度考驗方面，建立了各分量表及總量表的內部一致性信度；在效度考驗方面，建立了內容效度、構念效度。研究發現，「國小高年級分數概念量表」具有不錯之信、效度。

關鍵字：分數概念、分數概念量表、共同因素分析、高年級學童。

壹、研究動機和目的

在國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域（教育部, 2000）中提到，國民教育階段的課程設計應以學生爲主體，以生活經驗爲重心，培養現代國民所需的基本能力。在數學學習領域的實施要點中，強調教材的選取應依照教學目標，配合地方生活環境和兒童實際生活，選擇適當而有趣的題材。數學教學應協助學生體驗生活情境與數學的連結過程，著重學生概念的了解與能力的培養。由此可知，了解學童的數學概念是非常重要的。

在國小數學課程中，分數概念與小數、百分率、比、除法等概念關係密切，而這些概念也都是國小學童必須學習的重要概念（教育部, 1993）。在現行的國小數學課程中，分數概念的學習佔有重要地位，從二年級到六年級都有分數的主題出現。在國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域（教育部, 2000）的分

段能力指標中，N-1-7、N-2-5、N-2-6、N-2-19、N-3-3、N-3-4、N-3-6、N-3-7 皆是關於分數概念的能力指標，在數與計算四個階段的 21 個能力指標中，有關分數的主題占了 8 個，尤其是第三階段，在 8 個能力指標中，分數就佔了其中的一半，顯示在九年一貫課程暫行綱要數學學習領域之中，分數在國小數學教學上的重要性。

無論國內（如：楊壬孝, 1989; 林福來、黃敏晃、呂玉琴, 1996）、國外（如: Hart, 1981; Hunting, 1983; Van de Walle, 1990; Mack, 1998）都有研究報告指出，有關兒童學習分數是困難且成效不彰的。因爲分數概念有多種不同的使用情境及解釋，不同的解釋所使用的認知結構也有所不同，學生需要漫長的時間來發展這個概念，而整個過程是相當艱苦的（呂玉琴, 1991a）。研究者在國小教授高年級學童的數學有十年的時間，發現學童只會機械式的計算分數算則的問題，例如：學童會把以往學過的算則不適當的遷移到分數計算上，在加減法時，會出現以分母相加減，分子相加減來計算；在乘法時，會出現先通分再計算或分子、分母顛倒相乘來計算等情形。這樣計算錯誤的情形在經過研究者進一步了解後，發現是因學童不了解分數的意義，也就是說高年級學童是因爲缺乏完整且正確的分數概念，導致無法運用正確的方法來解決高年級課程中有關分數計算的問題。

在美國的教育進程全國性評量（The National Assessment of Educational Progress，簡稱 NAEP）、英國的中學數學及科學概念（Concepts in Secondary Mathematics and Science，簡稱 CSMS）皆有關於學生分數概念的調查與研究。NAEP（引自 Post, 1988）與 CSMS（Hart, 1981）研究結果顯示兒童分數概念不完備，例如：不了解分數的意義、對分數缺乏數感、不知分數是數等等。國內楊壬孝（1989）曾針對國小五年級到國中二年級學生，以 CSMS 的分數概念試題爲主發展一份試卷，來探究全國學生的分數概念，及學生對各類分數題目的錯誤類型。雖然國內有關國小學童分數概念的研究不少，然而，國內缺乏具有良好信效度的分數概念評量工具，我們若想要全面性的了解國小高年級學童的分數概念，編製一份具有良好信度與效度的量表是有其必要性。

基於上述的研究動機，本研究的主要目的是：編製一份具有良好信效度之「國小高年級學童分數概念量表」。

貳、文獻探討

一、分數的意義

分數一詞來自拉丁文「fangere」，它的意義是「分開」，通常用來敘述一個被分開的全體之各個部分（羅鴻翔譯, 民 1980）。在數學上是以有理數來定義分數，即「p/q，p、$q \in Z$，$q \neq 0$」，但在使用上又依情境的不同而有不同的用法及解釋（Corwin, Russel, & Tierney, 1990）。

Kieren（1976）認爲分數具有下列特性：整數系的擴展；一個具有稠密性、無窮可數的數系；可代表測量的量或數線上的一點，能被用來互相比較並加以運算；具有等值分數特徵；可用來代表比率、乘法的操作。Dickson, Brown, & Gibson（1984）提出對分數的五種解釋：整個區域的子區域（或部分－整體）；子集合與全體集合間的比較；位在數線上二個整數間等分好的一點；除法運算的結果；兩組集合或兩個度量的大小比較的結果。另外 Behr, & Post（1988）解釋分數爲：

1.「部分/全部」的概念。
2. 比率：強調兩個數量的關係。
3. 比值：用一個量值來代表兩個數量的關係。
4. 商：兩數相除的結果。

5. 操作：強調分數是一種轉換。
6. 線性座標：強調數線的距離長。
7. 數線上的一點：即實數系的子集合。

以上是專家學者對分數的闡釋，由此我們了解分數具有多重意義。

二、有關分數概念的文獻探討

在八十二年版數學課程標準與八十八年版九年一貫課程暫行綱要數學學習領域的分數主題中，包含了簡單分數概念（單位分數的內容物只有一個的眞分數）、等分概念、單位量概念、等值分數概念、分數大小比較、分數四則運算、不同的分數表示法及理解分數、小數、整數間的關係等。本研究著重於高年級學童的分數概念，而非分數的運算及呈現方式（例如：商、比值、數線上的一點）。因此，研究者將針對簡單分數概念、等分概念、單位量概念、等值分數概念等部分來探討相關文獻，以了解學童在分數概念學習上可能存在的困難，並以此爲編製量表的參考。

(一)簡單分數概念

Piaget, Inhelder, & Szeminska（1960）發現，孩童在處理和長度、面積等有關的分數問題時，先會處理 1/2，其次依序是 1/4、1/3、1/5、1/6。

Hiebert, & Tonnessen（1978）探討兒童在連續量及離散量的分數概念發展，是否都需 Piaget et al.（1960）所提的七個子概念，發現兒童在處理和面積有關的分數問題時，其能力與 Piaget et al.的研究結果相同。但在處理和長度有關的分數問題時，先會處理 1/2，其次卻是 1/3、1/4、1/5、……。

現行國小的分數教學，是由分東西的經驗帶入，由生活性“一半”的語言，連結對二分之一的概念，再帶入分數符號。

研究顯示學童的生活經驗無法與分數符號產生連結。例如：Mack（1990）的研究中，三位六年級學童的分數非正式知識，無法與分數符號及算則產生連結。這些學童在分東西時，能正確的比較東西的大小，但卻無法比較分數符號的大小。National Council of Teachers of Mathematics（NCTM, 1994）的研究顯示，如果沒有從學童的生活經驗出發及在學童本身基礎知識沒有發展完整時，學童是很難建立抽象符號的概念。Mack（1998）更發現五年級的學童雖能解決 1/2 塊甜餅的 1/4 是多少的問題，卻無法將此方法運用在分數乘法問題的操作上。

由文獻我們可以了解學童單位分數概念是較先發展的分數概念，而且其發展是有順序的。學童在生活上雖有分東西的經驗，也能藉由分東西的經驗逐步發展處理生活上分數問題的能力，然而對於簡單的分數卻無法從生活經驗中累積，無法將生活中的經驗與簡單的分數符號加以連結。

(二)等分概念

等分是指將物品（連續量或離散量）細分，而細分的每個部分的量皆相等。國內多項研究顯示學童對等分概念的認識有困難，呂玉琴（1993）指出學童等分概念常見的錯誤類型如下：

1. 連續量分成兩份，但兩份不一樣大小。
2. 將同樣大小的離散量分成兩份，但兩份個數不一樣多。
3. 將不同大小的離散量分成個數相同的兩份，但總量不一樣多。

從 Bergeron, & Herscovics（1987）的研究結果顯示，兒童的等分概念並不完備，例如：大部份國小三年級學童在處理分數板的問題時，只注意到分數板分割成幾塊，而沒有注意到分割的每一塊是否相等（如圖 1）。

兒童在判斷分割後的部分是否等分時，也會以視覺的約估及對摺或摺成三份、四份等直觀的方式來判斷是否等分（Freudenthal, 1983）。

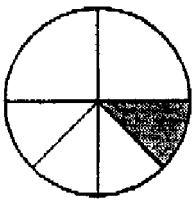


圖 1：分成不等的六塊



圖 2：因圖形不一樣而認爲不等分

林福來、黃敏晃及呂玉琴(1996)的研究顯示，學生處理分東西的策略，在視覺上會有：(1)約估視覺調整。例如：先用視覺約估每人分得的量，分完後，判斷其是否等分，若不等分，再調整，重新分配。(2)視覺調整。例如：分完每人分得的量後，判斷其是否等分，若不等分，再調整，重新分配。(3)視覺。例如：分給 5 人就分成 5 份，但不計較其是否等分。使用這種策略的學生，等分概念尚未建立。

分割後各部分的形狀與面積也會影響兒童的等分概念。例如：20 %到 25 %的國小五、六年級兒童認爲平面圖形的等分，就是分割的每一塊要求其面積、形狀都相等，因而認爲黑色部分並不是全部的 1/2（如圖 2）(林碧珍, 1990)，由此可見兒童等分概念是不完備的。

由文獻可以知道學童在處理分數問題時，不論在離散量或連續量的情境，都有只是將東西分割，卻忽略掉所分的東西必須是在等分的狀況，或者在東西非等分的狀況下卻認爲已經是等分。在視覺上，當圖形有所差異時，也會影響學童的等分概念。

(三)單位量概念

單位量概念又稱整體量概念（the concept of a whole)，也叫單位-整體量（unit-whole ）概念。呂玉琴（民 1991a ）指出學童無論在處理「部分/全部」、「子集/集合」或數線的分數問題時，都有指認單位量的困難。Figueras, Filloy, & Volderuoros（1987 ）將學童在處理「部分/全部」及「子集/集合」的分數問題時，對指認單位量的困難分成三種類型：

1. 忽略給定的單位量

Figueras（1989 ）將此種錯誤類型又細分成三種。第一種：忽略所有的個數才是單位量。第二種：學童忽略等值分數，故不認爲所有的個數是單位量，而只圈出和分母數字相同的個數來代表單位量，再由此單位量中找出答案。第三種：學童無法看出整個圖形是單位量，而將圖形分成二部分，並視分數爲這二部份的比較結果。

2. 受分子控制

學童只考慮到問題中的分子，解題過程深受分子的影響。例如：當著色葡萄有 5 個，占全部葡萄的$\frac{5}{30}$，學童受分子是 5 的影響而出現「五份」、「$\frac{1}{5}$」的答案。

3. 受分母控制

學童只考慮到問題中的分母，解題過程深受分母的影響。例如：請學童從八朵花中圈出全部的$\frac{3}{4}$，學童受到分母 4 的影響而圈了四朵花。

另外，有些學童把數線的分數問題看成是「部分/全部」的分數問題，而不注意其單位的標示。當數線爲一個單位長時，處理數線的分數問題與處理「部分/全部」的分數問題類似。但當數線不是一個單位長時，若將數線看成「部分/全部」的問題來處理就會產生錯誤。因此學童在「一個單位長」的數線問題與「不是一個單位長」的數線問題的成就有很大的差異（林碧珍, 1990)。

表 1：英國學生對「瑪莉和約翰使用零用錢」問題的回答（Hart, 1981）

學生的回答 \ 年齡	12	13	14	15
瑪莉的錢比約翰的多 2 倍。	1.6%	2.3%	1.9%	3.7%
瑪莉的錢比約翰的多。	32.1%	38.8%	36.9%	46.0%
不可能。1/2 比 1/4 大	41.5%	34.3%	27.6%	19.1%

表 2：台灣學生在「瑪莉和約翰使用零用錢」問題的答對率（楊壬孝, 1989）

年齡	11	12	13	14
答對率	3%	15%	24%	33%

Hart（1981）曾以「瑪莉花了她的零用錢的 1/4，約翰花了他的零用錢的 1/2。瑪莉可能比約翰花的錢多嗎？你爲何如此想？」的問題來了解英國十二到十五歲的中學生對於單位量指認的能力，學生回答的情形如表 1。

楊壬孝（1989）以同樣的題目在國內對國小五年級到國中二年級的學生做測驗，其結果如表 2。

由表 1、表 2 學生答對率偏低的情形，可以得知學生對單位量的指認有困難。

林福來等人（1996）研究發現兒童在單位量的錯誤如下：

1. 學生傾向於自我假設在同一情境中出現的各個分數具有相同的單位量。
2. 資訊量超過學生的處理能力時，學生會配合其處理能力，自行更改單位量，或分解單位量。

由文獻可知學童不論是在連續量或離散量的情境下，都有單位量指認的困難，學童有時會忽略給定的單位量，或因分子、分母的因素而改變單位量。在未給定單位量的分數問題上，學童也會只依據題目所呈現的其他分數符號來比較，而未思考到單位量的問題。

(四)等值分數概念

一個數（number）可以用無限的分數方式來表示，例如：2/5 = 4/10 = 6/15…等等，這些不同的表示，便叫作這個分數的等值分數（Vance, 1992）。等值分數的不同名稱，在符號上形成的規則是擴分或約分，例如：由任一個分數開始，分子、分母各兩倍、三倍、四倍…就可以構成一系列等值分數。等值分數的特性就是部分可以再細分，部分可以再合併，等值分數既需要部分/全部的保留概念，也需要乘、除法的倍數觀念，可是乘除法運作的結果，並不會造成「量」的改變（吳毓瑩、呂玉琴, 1997）。

1. 影響學童等值分數概念的因素

影響學童等值分數概念的因素很多，包括：單位形成能力（unitize ability）、組合能力（assembly ability）、彈性思考能力（flexible thinking ability）、運作思考能力（operative thinking ability）。當缺乏這些能力時，學童無法正確解決等值分數問題。

(1) 缺乏單位形成的能力：在 Saenz-Ludlow（1994, 1995）研究中，兒童如果不能在圖形中找到適當的單位，將指定的部分量分盡，再利用這個單位重組成全部或集合（這種能力即爲「單位形成能力」），則兒童無法正確解決等值分數問題。

(2) 缺乏組合能力：在呂玉琴（民 1991b）的研究中即發現兒童缺乏組合能力。在處理等值分數的過程中，兒童若能主動的呈現切割、拼湊的能力，將有助於兒童解決問題。



圖 3：同樣大小的圖形不同切割方式

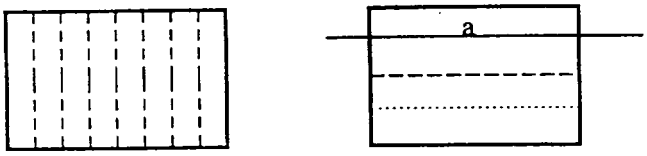


圖 4：同樣大小的長方形紙切割方法及切割份數不同

(3) 缺乏彈性思考能力：Larson（1980）利用數線上不同的等分割，來了解兒童的等值分數概念。研究結果顯示，當單位等分割段等於分母時，兒童很輕易就可以解題；但是當單位等分割段與分母不相等時，學童如果對等值分數缺乏彈性思考的能力，學童的表現就很差。

(4) 缺乏運作思考能力：Kamii, & Clark（1995）依 Piaget 的理論提出兒童等值分數的概念與思考的運作有關，例如：長方形的一半，因爲不同的分割法，結果可能是長方形，也可能是三角形（如圖 3）。兒童因長方形和三角形兩個形狀不同，看起來是不一樣大的，而認爲長方形和三角形是不一樣大；但兒童如果知覺整體相同而整體的一半也相同時，就不受視覺影響，而能推論出三角形和長方形是一樣大的，因爲兩者都是原長方形的 1/2。因三角形和長方形的形狀不同，便認爲二者的大小不一樣的兒童便是缺乏「運作思考能力」。

Kamii et al.（1995）提供兒童兩張一樣大的長方形紙，將一張摺成如圖 4 的左圖、一張摺成如圖 4 的右圖，然後，將左邊的 8 小條一一剪開，右邊的 4 小條剪掉一條，剩下$\frac{3}{4}$，再詢問兒童幾個$\frac{1}{8}$會等於$\frac{3}{4}$。

研究結果顯示部分兒童因爲他們推理的過程無法超越知覺的判斷，缺乏運作思考的能力，所以得不到肯定的答案。

彭海燕（1998）的研究發現，影響兒童等值分數概念的因素還包括：(1)分數概念的殘缺不全。例如：無法將分數的圖形表徵以部分/全部兩量並置的方式呈現；無法依指定分數值取出適量的花片等。(2)兒童的思考過於僵化，表徵之間不會轉換；兒童習於機械式的運算而不解其意、亦不以爲意。學童因分數概念殘缺不全或思考過於僵化時，皆無法正確解決等值分數問題。

另有研究發現學童在學過等值分數後並未具有等值分數的概念，Mack（1998）請五年級的學童表示 3/4，學童表示是四塊中的三塊，當他問學童 3/4 是否可以想成是 6/8 或 9/12？學童表示不可以，因爲那樣是比四塊要多。

2. 分數大小比較與等值分數概念的關係

如果學童未把分數視爲一個數，便無法對

分數產生量感。當學童欠缺等值分數概念，在做分數的大小比較時，便無法針對兩個分數的量來做比較，學童會把分數的分子、分母看成獨立的兩個自然數，而產生了下列四種策略(呂玉琴, 民 1991a)：

(1) 根據分母的大小來比較。
(2) 根據分子的大小來比較。
(3) 將分子、分母同加一數來比較。
(4) 分別比較二個分數的分子、分母。

另外楊壬孝（1989）指出，在分數比較大小的排序中，分子相同而以分母做比較的題目較以分母相同而用分子做比較的題目，使學生感到困難，不易接受。

由文獻得知，學童在發展等值分數概念是需要相當的能力，如：單位形成的能力、組合能力、彈性思考能力、運作思考能力等。當欠缺這些能力時，學童在處理等值分數的問題，會出現許多困難。在比較分數大小時，因等值分數概念的不完備容易將分數視爲分子、分母兩個數，於是，學童不會將兩個分數視爲兩個分數量的比較，而出現以分子或分母比較的策略。

三、共同因素分析的方法

共同因素分析是常被用來萃取一個量表所表現的共同因素有哪些，並作爲量表構念效度的驗證（郭生玉, 1987）。

本研究的共同因素分析的基本假設是：國小高年級學童對此量表的每一題表現爲所有共同因素（common factor）的線性組合與獨特因素（unique factor）的和。而每一題的獨特因素又包含了該題的特殊因素（specific factor）與誤差因素（error factor）。共同因素分析的方法有很多，常用的如主軸分析法（Principal Axis Factoring）、最大概似法（Maximum Likeli-hood）、無加權最小平方法（Unweighted Least Squ-ares）、一般化最小平方法（Generalized Least Squares）等。此外也有許多研究者常使用主成份分析法（Principal Component Analysis）來求取共同因素。然而，誠如許多學者指出（Dunteman, 1994; Preacher, & MacCallum, 2002），以主成份分析法來求取共同因素並不恰當。原因是共同因素分析與主成份分析形式雖然相似，可是不論在觀念上，或在數學上，二者皆頗爲不同。其差異可摘要如下：

(一)共同因素分析假設每一題表現爲所有共同因素的線性組合與獨特因素的和。主成份分析法假設每個主成份（相對於共同因素）爲所有題目的線性組合。

(二)共同因素分析將變異量分爲共同變異量與獨特變異量。二者分開估計。其中獨特變異量包含來自特殊因素與誤差因素的變異量。亦即，共同因素分析從模型上即明白的考量各種誤差的存在。相對的，主成份分析法並不嘗試分辨共同變異量與獨特變異量，遑論考量各種誤差的存在。

(三)共同因素分析分解的是共同變異量。亦即，每一個共同因素所解釋的是共同變異量的一部份。主成份分析法分解的是整體變異量。亦即，每一個主成份所解釋的變異量包含共同變異量與獨特變異量。

當獨特變異量確定可以忽略時，主成份分析法是個不錯的選擇，因爲它有唯一的解，且容易計算。但是當獨特變異量顯著時，以主成份分析法所解釋的變異量則有高估的傾向，因其包含了來自每一個題目的特殊因素與誤差因素的獨特變異量。

叁、研究方法、工具及過程

一、研究方法

本研究之研究方法以紙筆測驗方式進行資

料的蒐集，再將蒐集的資料經量表因素分析及信、效度考驗，建立良好信效度之「國小高年級學童分數概念量表」。

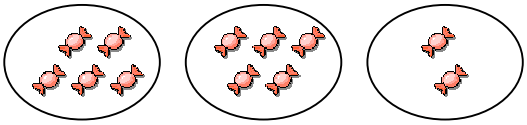
二、研究工具

本研究的研究工具，參考劉世能（2002）及呂玉琴、鄧寶生（2001, 2002）所發展之國小高年級學童分數概念的筆測試題，加以修改而成。該試題是依據以往有關分數概念的研究、現行國小分數教材、參考國外文獻中的試題進行分析，及參照楊壬孝（1989）所發展之國中小分數概念的測驗試題而發展的。然而研究者從劉世能及呂玉琴、鄧寶生試題的概念歸屬、試題內容與信效度分析，認爲該份試題仍然有修改的空間。上述三位研究者分析該測驗的試題包含了：簡單分數、等分、單位量、等值分數、等量概念等五個子概念，然而細究其等量概念的題目，乃是比較分數大小的題目，對照研究者的文獻探討，學童要能比較分數大小必須具有等值分數的概念，故有關等量概念的題目應納入等值分數概念題目之中。另外，他們將每個題目僅歸類於某一種分數子概念，在研究者仔細分析學童的解題表現後，認爲部分題目同時具備了數種分數子概念，故研究者重新確認每個題目會呈現的分數子概念。舉例說明如下：

原題目第 6 題

姊姊買了一些糖果，她把全部的糖果分成 3 堆（像下圖的樣子），請問其中 1 堆是不是全部糖果的$\frac{1}{3}$？＿＿＿＿＿＿＿＿。

爲什麼？＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。



此題原本被歸於等分概念，然而在預測時發現部分學童的回答：「不是，總共十二個所以一堆要四個」。由學童的回答可以了解，當學童具備了單位量概念時，亦能正確解答此題，因此推論解此題也需具備單位量概念。故將此題同時納入等分及單位量兩個分數子概念。

本研究之研究工具，將劉世能及呂玉琴、鄧寶生在台灣北部地區區域施測所得結果，依下列方向來修改、刪除及增加。

(一)試題解釋整體變異量過低的題目

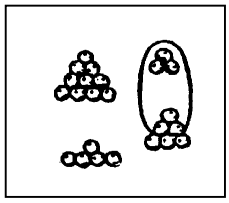
一般評量試題發展的初期，常以項目分析，如鑑別力分析等，挑選出無法區分學生能力的題目加以刪改。然而，由於本研究的重點在於了解學生是否具有某些分數概念，而非比較其能力高低，是以項目分析並不符合本研究之所需。另一方面，構念效度是一份量表優良與否的重要指標。經以共同因素分析法初步分析劉世能及呂玉琴、鄧寶生區域施測的結果，發現其共同因素與其題目設計時所隱含的五大子概念間，並沒有明顯的關係。爲了強化新量表的構念效度，本研究將該試題重新做概念歸屬，使得每一題含有一個以上的子概念的事實表現出來。其次，本研究期望新發展的量表，可以達到每一個子概念至少可以對應一個共同因素，以獲得合理的構念效度。因此本研究針對學生在各分數子概念的表現，分別對各子概念進行共同因素分析。估計出每一題在各歸屬子概念的第一個共同因素的表現（負荷的平方）的平均值。將此平均值由小排到大。其平均值愈小者代表著其對新評量的整體變異量的貢獻可能愈小，而優先予以考慮修改或刪除。由分析結果，第 1 題、第 10-2 題、第 19 題爲優先考慮刪除之題目。其中第 19 題，因學童的回答呈現出受到情意的影響，故仍予以保留。

(二)修改題目內容以避免學生雖想法錯誤卻能得到正確答案的題目

例如：原題目之第 8 題

桌面上有 4 堆橘子，請問圈起來的橘子占桌面

橘子的幾分之幾？答：＿＿＿＿＿＿。



部分學生回答$\frac{1}{4}$，並不是因爲$\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$，而是認爲桌面上有 4 堆橘子而圈起來的是其中 1 堆，所以回答$\frac{1}{4}$，故此題的題目必須修改。

(三)刪除只有呈現分數符號或圖形等缺乏情境的題目

例如：原題目之第 10 題

在下列三組分數中的 □ 內，比較之後填入適當的 >、< 或 =。

(1)$\frac{1}{2}$ □ $\frac{1}{3}$　(2)$\frac{1}{5}$ □ $\frac{3}{10}$　(3)$\frac{1}{3}$ □ $\frac{2}{7}$

此題爲分數的大小比較，然而試題缺乏情境敘述，與我國現今的數學教學方向不符合，故此題予以刪除。

(四)缺乏較難的試題，增加文獻中的試題及相關試題

例如：小英將他零用錢的$\frac{1}{4}$買糖果，建國將他零用錢的$\frac{1}{2}$買糖果。

(1) 小英可能比建國花的錢多嗎？＿＿＿＿

(2) 請說明理由：＿＿＿＿＿＿＿＿

由於原試題在台灣北部區域施測的結果，除第 20、22 題外，其餘各題答對率皆超過 50 %，其中有 13 題答對率超過 80 %，發現該份試題缺乏較難的題目，參考國外（Hart, 1981）及國內（楊壬孝, 1989）有關分數概念的研究後，增加此題。

量表試題依照劉世能及呂玉琴、鄧寶生研究結果的答對率高低將題目重新排序，並在預試確認各題的主要錯誤類型後，依下面方法由問答題轉爲選擇題：

1. 選取錯誤率較高的答案爲選項。
2. 各題的所有選項依數字大小排序。
3. 原本學童僅需回答「是、不是」、「一樣、不一樣」再寫出爲什麼的題目，爲了能了解學生解題的歷程，在選項中呈現原因。
4. 原本由學童依問題要求進行分割圖形或畫出區域面積的作圖題部份，因改爲選擇題，故敘述方式必須稍加修改。
5. 經專家建議，學童會受直觀影響回答問題的部分試題，仍需學童填寫選答的原因。

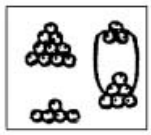
舉列說明如下：

問答題轉爲選擇題的題目：

【　】桌面上有 4 堆橘子，請問圈起來的橘子佔桌面橘子的幾分之幾？

①$\frac{2}{4}$　②$\frac{5}{9}$　③$\frac{5}{19}$　④$\frac{5}{24}$

⑤其他＿＿＿



選項中呈現原因的題目：

【　】哥哥買了 1 個圓形蛋糕、姊姊買了 1 個長方形蛋糕。哥哥把他的蛋糕分一半給你，姊姊把她的蛋糕分一半給弟弟，你和弟弟吃的一樣多嗎？

①一樣多。因爲都是分到一半

②一樣多。因爲都是分到$\frac{1}{2}$

③不一樣多。因爲弟弟吃的蛋糕比較多

④不一樣多。因爲我吃的蛋糕比較多

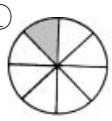
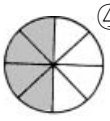
⑤無法比較誰吃的比較多。

作圖題改爲選擇題的題目：

【　】媽媽買了 1 個蔥油餅（如右圖），哥哥吃掉了其中的$\frac{1}{4}$。



下面哪一個圖的著色部分代表了哥哥所吃掉的蔥油餅？

①　②　③　④

⑤其他_____

仍需填寫原因的題目：

【 】爸爸將年終獎金全部的$\frac{2}{7}$繳所得稅，全部的$\frac{1}{4}$發壓歲錢，請問繳所得稅和發壓歲錢哪一項的花費比較多？

①所得稅 ②壓歲錢 ③無法比較

爲什麼？_____

在試題由問答題轉爲選擇題後，試題的編排方式依據試題難易程度編排。因爲容易的題目在前，可以增進學童作量表的自信心及動機。

本量表試題的設計，主要建構於三個分數子概念，分別爲等分概念、單位量概念與等值分數概念。其中，等分概念爲國小學童較早接觸的分數子概念，而本量表的對象爲國小高年級學童，故在等分概念的試題僅設計四題。部分的試題具備了多重的分數子概念。除了這三個主要的分數子概念，量表中許多題目也隱含有簡單分數概念。量表試題共爲 23 題，分析每一題的分數子概念歸屬如表 3 所列。

進一步分析各分數子概念的題目內容，等分概念、單位量概念、等值分數概念的題目又可分爲數個項目。等分概念可分爲兩個項目，包括：判斷是否等分及自行等分；單位量概念可分爲四個項目，包括：總量等於單位量並確認單位量、單位量未知、單位需加以轉換及總量不等於單位量；等值分數概念可分爲七個項目，包括：部分不等值、分子分母同時擴大兩倍、必須細分割、必須細分割並組合、部分及子集的分數大小比較、分母爲二倍關係的分數大小比較、分母不是二倍關係的分數大小比較，如表 4。每個項目包含了二至三個題目。

簡單分數概念是學童在學校中學習分數一開始便需具備的概念，是分數概念中很基礎的概念。又，本研究的量表試題是針對國小高年級學童而設計的，當試題中同時包含了簡單分數概念與其他分數子概念時，研究者認爲，可能會因其他分數子概念的因素較重，較具決定性，而使題目無法顯現簡單分數概念。量表中的第 4 題爲僅具單純簡單分數概念的題目，研究者將以第 4 題與同時具有簡單分數概念和其他子概念的題目相對照比較，以檢驗研究者的想法。

三、研究過程

(一)研究對象

本研究以台灣地區國民小學高年級學童爲對象，爲求樣本能具有代表性，以多階段抽樣（multistage sampling）爲原則。詳細說明本研究之研究對象如下：

1.預試量表研究對象

預試量表的研究對象，以台北縣二所大型學校及桃園縣一所中型學校之高年級學童爲樣本。各校抽取五、六年級各兩班，五年級 192 人，六年級 191 人，共計 383 人。由預測所得結果與劉世能（2002）及呂玉琴等人（2001, 2002）等研究的施測結果，選取各題較具代表性的錯誤及正確答案爲試題修改爲選擇題之選項，使選擇題的各選項具有代表性。

2.正式量表研究對象

正式量表研究對象，以台灣地區國民小學高年級學童爲樣本，取樣學校的資料來自於教育部統計處 2000 年公佈的國小各年級班級數。爲求樣本能具代表性及普遍性，抽取樣的考量如下：

(1) 第一階段的抽樣

據地理位置的特性及人口密度，將台灣地區劃分爲以下六區域：第一區域：台北市；第二區域：高雄市；第三區域：台中以北（不包括台中縣市）省縣轄市及工商、新興鄉鎮市；第四區域：台中以南省縣轄市及工商、新興鄉鎮市；第五區域：東部縣轄市及工商、新興鄉

表3：國小高年級學童分數概念量表之試題分數子概念歸屬表

分數子概念	試題編號	題數
簡單分數概念	4, 5, 7, 13, 15	5
等分概念	1, 2, 3, 10	4
單位量概念	1, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23	10
等值分數概念	2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 17, 18, 19, 20, 21	15

表4：分數子概念各項目的試題之內容分析

分數子概念	題號	題目內容分析	說明
等分概念	1, 2	判斷是否等分	題目的圖形呈現不等分，學童必須能判斷題目圖形爲不等分
	3, 10	自行等分	學童必須就題目中呈現的圖形，自己將圖形加以等分
單位量概念	1, 10, 16	總量等於單位量並確認單位量	題目中呈現的總量等於單位量，學童必須能夠確認題目的單位量
	7, 23	單位量未知	學童必須知道題目中的單位量並不確定
	12, 14, 22	單位需加以轉換	題目中呈現兩種單位，學童必須能將不同的單位加以轉換
	13, 15	總量不等於單位量	題目中呈現的總量不等於單位量，學童必須將部份轉換爲單位量
等值分數概念	2, 10	部分不等值確認	題目的圖形不是每一塊都相等，學童必須確認其不相等
	3, 9, 11	分子分母同時擴大兩倍	題目的圖形分割爲分母數字的兩倍，學童必須將題目中的分數等值擴大二倍
	5, 14	必須細分割	學童必須將題目中的圖形加以二倍數的細分割
	6, 8	必須細分割並組合	學童必須細分題目中的圖形，並需將細分的部分再加以組合
	12, 17	部分及子集的分數大小比較	學童必須能確認題目中，全部的部份或集合的子集，再進行大小比較
	18, 19	分母爲二倍關係的分數大小比較	題目中的分母爲二倍關係，學童必須先將分數通分，再比較分數大小
	20, 21	分母不是二倍關係的分數大小比較	題目中的分母不是二倍關係，學童必須先將分數通分，再比較分數大小

鎮市山地；第六區域：偏遠地區。各區域獨立抽樣，採抽取率與大小成比例（Probabilities Proportional to Size, PPS）方式，依各區域內國小五、六年級班級總數占台灣地區國小五、六年級班級總數百分比，來分配各區域應抽出之班數（程毅豪, 2000），各區域依比例應抽取的班級數如表5。

第三區域依比例五年級應抽樣 12 班，六年級應抽樣11班，爲使五、六年級抽取相同的班級數，第三區域五、六年級各抽樣12班；第五區域依比例應抽取 1 班，然而第五區域包括東部三縣（宜蘭縣、花蓮縣、台東縣），爲使樣本具普遍性，故增加抽樣 1 班。總計五、六年級各抽樣42班，各區域抽樣班級數，如表6。

表5：台灣地區各區域高年級班級數及應抽取的樣本班級數

區域別	鄉鎮市區數	五年級總班級數	六年級總班級數	五年級樣本班級數	六年級班級樣本數
1	12	1141	1143	5	5
2	11	639	625	3	3
3	52	2893	2765	12	11
4	95	3207	3136	13	13
5	13	332	334	1	1
6	173	1812	1801	7	7
合計	356	10024	9804	41	40

表6：研究樣本各區域施測班級數

區域別	1	2	3	4	5	6	總計
班級數	5	3	12	13	2	7	42

(2) 第二階段的抽樣

依據學校總班級數的規模，將學校分爲大（36 班以上）、中（13 班至 36 班）、小（12 班以下）三種類型。考量若以各區域之各類型學校數比率抽取，則因小型學校所佔比率較高，造成抽取小型學校數較多，而小型學校的班級人數往往較少，將造成樣本人數不足；若以各區域之學校學生人數比率抽取，則樣本將缺少小型學校。爲使各區域之抽樣能有各類型學校，故在各區域中除第五區域外，抽取的學校皆包括大中小三種類型的學校。第五區域依據抽樣比例各年級應抽取 1 班，在樣本能具普遍性的考量下增加 1 班。另外，爲能使該區域有較多的樣本個數，學校類型的抽樣爲大型及中型學校各一所。

研究樣本包括：台北市、高雄市、台北縣、基隆市、桃園縣、新竹縣市、苗栗縣、台中縣、嘉義市、彰化縣、雲林縣、南投縣、台南市、高雄縣、屏東縣、花蓮縣及宜蘭縣十八個縣市。收回樣本資料數爲五年級 1301 人，六年級 1340 人，合計 2641 人。扣除作答不完整的資料，五年級 18 人，六年級 11 人，共 29 人。研究樣本人數：五年級 1283 人，六年級 1329 人，合計 2612 人。各區域及各類型學校研究樣本分布情形如表 7。

(二)筆測

筆測以班級爲單位的團體施測方式進行，由研究者事先聯絡各校，施測當日由研究者及熟悉此份量表的相關人員進行監考，因顧及學童所習慣的作息時間，答題的時間原則上爲一節課 40 分鐘，對於作答速度較慢的學童則予以延長時間，以求得收集資料的完整性。

(三)資料分析

在完成所有的施測後，研究者將作答不完整的資料刪除後，將學生原始選項輸入電腦，以 Matlab 6.0 程式批改原始選項而確定學生的答案正確與否。此時學生的作答資料成爲 0 與 1 的二值資料，1 爲對，0 爲錯。再以 MicroFact 2.0（Waller, 2001）求得學生作答資料的四分相關矩陣，並以 SPSS 10.0 視窗版統計套裝軟體進行共同因素分析與資料分析。本文並根據郭生玉（1987）的建議，將共同因素分析用來萃取一個量表的共同因素，並作爲量表構念效度的驗證。

由於學生作答的結果，只有“對”與“錯”兩種情況，表示爲 1 與 0，屬於二值資料（binary data），並不符合共同因素分析法的假設。而共同因素分析法假設資料爲連續性，甚或是常態分佈（有些方法，如最大概似法，假設常態分佈），因此本研究樣本的作答資料不能直接用以進行共同因素分析，否則所估計

表7：國小高年級學童分數概念量表研究樣本分布表

區域別	一			二			三			四			五		六			總計
類型	大	中	小	大	中	小	大	中	小	大	中	小	大	中	大	中	小	
五年級	48	52	7	35	35	31	268	63	70	228	175	16	40	30	64	57	64	1283
六年級	53	57	8	35	34	24	275	78	63	232	201	14	37	33	71	52	62	1329
總人數	101	109	15	70	69	55	543	141	133	460	376	30	77	63	135	109	126	2612

出來的相關矩陣會產生很大的偏差（bias），也容易產生難度因子（difficulty factors）（McDonald, & Ahlawat, 1974）。爲了修正這個問題，許多研究提出了多種解決之道，知名的如：四分相關（Tetrachoric Correlation）的一般化最小平方因素分析（Generalized Least Square Factor Analysis）（Muthen, 1978）、全資訊項目因素分析（Full-Information Item Factor Analysis）（Bock, & Aitkin, 1981）等。而 Knol & Berger 在 1991 年進行大規模的研究中發現，以較簡單的主軸分析法來解析四分相關可以獲得優於上述方法的結果。

因此，本研究將蒐集到的資料，採用下列方法分析：

1. 以內部一致性α係數來考驗「國小高年級學童分數概念量表」之信度。
2. 以分數領域之學者專家及國小高年級數學科教師來檢驗「國小高年級學童分數概念量表」之內容效度。
3. 以四分相關共同因素分析法、內部一致性考驗「國小高年級學童分數概念量表」之構念效度。

肆、研究結果與討論

一、量表共同因素分析

「國小高年級學童分數概念量表」的設計基本上是建構於三個分數子概念：等分、單位量和等值分數概念。共同因素分析（common factor analysis）主要的目的是要探究學生在實際作答的過程中，是否呈現數個有意義的共同因素，而足以說明國小高年級學童針對此量表之分數子概念的表現。更進一步的，這些共同因素是否能夠呈現量表所設計的三個主要分數子概念。

爲了降低特殊因素與誤差因素對於共同因素的影響，本研究採取主軸分析法進行共同因素分析。而在獲得初始共同因素後，爲了能得到較爲簡單且有意義的共同因素結構，本研究採取直交最大變異法（VARIMAX），在共同性（communalities）總和不變的條件下，旋轉初始共同因素。

本研究乃採取主軸分析法來解析學生作答資料的四分相關矩陣。更確切的說，本研究先將學生作答的二值資料，轉換爲四分相關矩陣，再以主軸分析法針對四分相關矩陣進行共同因素分析。

計算四分相關矩陣的基本假設是：學生作答時的潛在答案爲一常態分佈變數。在確定答案時，存在一無形的閾值（threshold），將此一連續的常態分佈變數轉換爲二值變數。以兩題爲例，計算四分相關矩陣的方法即是藉由兩題的 2 × 2 列聯表推算出各題的閾值與兩題之間原始常態分佈變數的相關，謂之四分相關。

本研究首先以 MicroFact 2.0（Waller, 2001）的四分相關係數計算程式來建立 23 題的四分相關矩陣，再以 SPSS 的語法檔（syntax）讀取四分相關矩陣，以主軸分析法進行因素分析。首先，本研究以 KMO 取樣適當性檢定及 Bartlett 球面性考驗來檢定以四分相關係數矩陣

表 8：KMO 取樣適當性檢定及 Bartlett 球面性考驗

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		.925
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	31187.856
	Df	253
	Sig.	.000

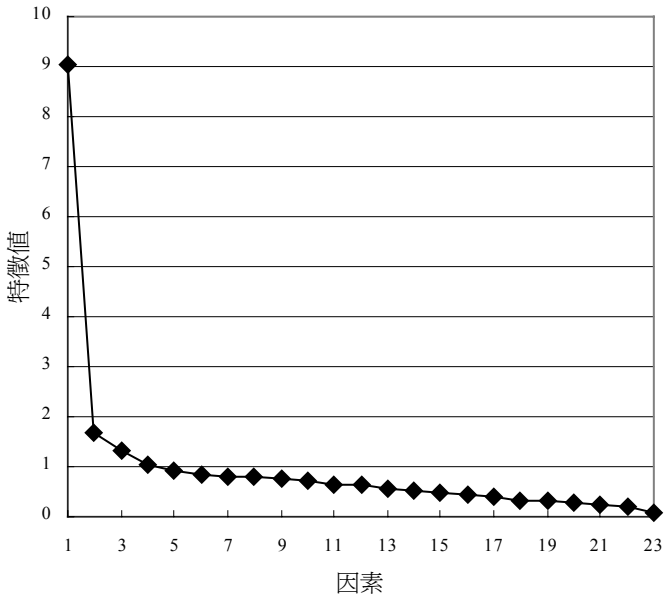


圖 5：國小高年級學童分數概念量表之 Scree Plot

進行共同因素分析的適當性，如表 8。

而表 8 的檢定結果顯示，KMO 取樣適當性統計量爲 0.925，十分接近 1，且 Bartlett 球面性考驗的 *p*-value = .000 已達顯著水準。因此，本研究的四分相關矩陣適合進行共同因素分析。

決定抽取幾個共同因素是共同因素分析中的重要步驟。雖然有一些方法常被使用，例如抽取特徵值大於 1 的因素、Scree Test、卡方顯著檢定、因素結構的可解釋性等方法（Kim, & Mueller, 1994），卻沒有一個方法是普遍有效的。爲了較合理的決定應抽取的共同因素數目，本研究從三方面加以考量。

首先我們採用 Guttman（1954）的“weaker lower bound”，亦即所須抽取的共同因素的數目至少應爲大於等於 1 的特徵值數目。圖 5 所繪爲 Scree Plot。

圖內標示出由大排至小之 23 個特徵值。從圖中我們可以看出大於等於 1 的特徵值有 4 個，也就是所須抽取的共同因素的數目至少爲 4。其次我們使用 Cattell（1966）所建議的 Scree test：在 Scree Plot 的曲線開始近乎水平的起始點處，即爲共同因素的抽取該停止的地方。從圖 5 我們可以看出，Scree Plot 大約可以用三條線段近似之。第一條爲因素 1 到因素 2，第 2 條爲因素 2 到因素 5，第 3 條近乎水

表 9：國小高年級學童分數概念量表中五個共同因素所能解釋的共同變異量與所對應的特徵值與整體變異量

因素	轉軸後共同因素解釋之共同變異量		
	各因素之共同變異量	共同變異量百分比	共同變異量累積百分比
1	5.675	24.676	24.676
2	2.292	9.966	34.642
3	1.354	5.887	40.529
4	1.173	5.102	45.631
5	1.123	4.885	50.515

平的線段爲因素 5 到因素 23。是以本研究考慮 5 個因素。第三個考量是因素結構的可解釋性。在觀察了具有 3 到 7 個共同因素的不同因素結構後，我們發現具有 5 個共同因素的因素結構最能被賦予合理的意義。是以本研究乃決定從四分相關矩陣中抽取 5 個共同因素。表 9 所列即爲 5 個共同因素所能解釋的共同變異量與所對應的特徵值與整體變異量。此 5 個共同因素經直交最大變異法轉軸後，得到的因素矩陣如表 10。

表 9 顯示本研究所發展之「國小高年級學童分數概念量表」的 5 個共同因素所能解釋的共同變異量爲 50.5％。

表 10 係以各試題在前 5 個共同因素上之因素負荷量爲 0.3 以上(因素負荷量 <0.3 則從簡) 之因素矩陣。從表 10 可知，共有 V2、V3、V5、V6、V7、V8、V9、V10、V11、V12、V14、V17、V18、V19、V21 等 15 個題目在因素 1 出現大於 0.3 的負荷量，V1、V7、V10、V12、V14、V16、V22、V23 等 8 個題目在因素 2 出現大於 0.3 的負荷量，V1、V2、V3、V10 等 4 個題目在因素 3 出現大於 0.3 的負荷量，V20、V21 等 2 個題目在因素 4 呈現大於 0.3 的負荷量，V13、V15 等 2 個題目在因素 5 呈現大於 0.3 的負荷量。

分析 5 個因素的題目性質與內容，可發現在因素 1 中，除 V7 與本研究所分析的等值分數概念題目不相符外，其餘 14 題皆符合等值分數概念，V7 的題目如下：

V7【　】哥哥買了 1 個圓形蛋糕、姊姊買了 1 個長方形蛋糕。哥哥把他的蛋糕分一半給你，姊姊把她的蛋糕分一半給弟弟，你和弟弟吃的一樣多嗎？

①一樣多。因爲都是分到一半

②一樣多。因爲都是分到$\frac{1}{2}$

③不一樣多。因爲弟弟吃的蛋糕比較多

④不一樣多。因爲我吃的蛋糕比較多

⑤無法比較誰吃的比較多。

第 7 題 (V7) 的設計，是要量測學生是否了解單位量不同時無法進行比較。然而，在共同因素分析中，V7 在因素 1 (等值分數概念) 的負荷亦高於 0.3。根據研究者多年教導高年級分數概念的經驗，可能的原因是學生在解題的過程中，思維了這樣的問題：

“$\frac{1}{2}$ 的圓形蛋糕是大於、等於、還是小於$\frac{1}{2}$ 的長方形蛋糕？”

其後才發現圓形蛋糕與長方形蛋糕爲不同單位量，無法比較。但此一思維已隱含了分數大小比較，因而導致了 V7 在因素 1 (等值分數概念) 的負荷高於 0.3。雖然如此，研究者認爲分數大小比較並非 V7 的主要概念，所以 V7 雖然在因素 1 有 0.335 的負荷量，仍然將 V7 於因素 1 中刪除。而 V21 在因素 1 與因素 4 同時呈現大於 0.3 的負荷量，V20 僅

表 10：國小高年級學童分數概念量表經直交最大變異法轉軸後之因素矩陣

試題編號	因素					共同性
	1	2	3	4	5	
V1		0.422	0.367			0.393
V2	0.372		0.781			0.822
V3	0.702		0.304			0.695
V4						0.243
V5	0.408					0.341
V6	0.748					0.661
V7	0.335	0.447				0.432
V8	0.367					0.243
V9	0.89					0.894
V10	0.52	0.377	0.315			0.542
V11	0.825					0.747
V12	0.67	0.39				0.643
V13					0.801	0.680
V14	0.39	0.491				0.447
V15					0.482	0.310
V16		0.373				0.190
V17	0.599					0.482
V18	0.543					0.489
V19	0.809					0.755
V20				0.527		0.339
V21	0.385			0.574		0.566
V22		0.311				0.175
V23		0.686				0.530

在因素 4 出現大於 0.3 的負荷量，對照研究者的題目概念分析，V20、V21 皆屬於等值分數概念的題目，V20 與 V21 的題目如下：

V20.【　】爸爸將年終獎金全部的$\frac{2}{7}$繳所得稅，全部的$\frac{1}{4}$發壓歲錢，請問繳所得稅和發壓歲錢哪一項的花費比較多？

①所得稅　②壓歲錢　③無法比較

爲什麼？＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

V21.【　】下列 2 個相同的長方形，哪一個的黑色部分面積比較多？

（甲）　　（乙）



①（甲）較多。

②一樣多。

③（乙）較多。

爲什麼？＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

探究 V20、V21 的題目性質與內容，可知此二題乃是分母不是二倍關係的分數大小比較，也就是說因素 1 爲等值分數概念，因素 4 爲分母不是二倍關係的分數大小比較，然而就研究者的題目內容分析，分母不是二倍關係的分數大小比較是屬於等值分數概念，所以，因素 1 與因素 4 皆爲等值分數概念。

根據研究者的題目內容分析，因素 5 與因素 2 這兩個因素都是單位量概念，而因素 5 爲總量不等於單位量的單位量概念。因素 3 相當於研究者所分析的等分概念。

從表 10 可以發現，V4 在任何因素皆無大於 0.3 的負荷量，而研究者在試題概念分析時，便說明簡單分數概念乃是分數概念中很基礎的概念，雖然試題中包含了簡單分數概念，然而可能會因其他概念的因素較重，而使題目無法顯現簡單分數概念。V4 的情形正驗證了研究者的假設，故以簡單分數概念爲主要概念的題目應只有 V4 一題。

經量表共同因素分析後，「國小高年級學童分數概念量表」的試題概念歸屬如表 11。

由表 11 可發現，量表共同因素分析的結果，與研究者的試題概念的設計相符合。在確認量表各題的概念後，將進行量表的信、效度分析。

二、量表信度分析

在量表信度的建立方面，本研究使用 Cronbach α係數進行考驗，經 SPSS Reliability 副程式分析，整份量表之α值爲 0.8452，顯示量表具備了良好的信度。

國小高年級學童分數概念量表含有三個主要的分數子概念，經過共同因素分析後，確認主要的子概念爲三個，亦即等分概念、單位量概念與等值分數概念，與設計相符合。故內部一致性信度分別就此三個子概念以α係數進行考驗，經 SPSS Reliability 副程式分析，結果如表 12 所示，各分數子概念的試題分量表信度分別爲 0.6466、0.6626、0.8480，雖然等分概念與單位量概念的信度並不高，然而因爲部份題目同時具有兩個以上的概念，影響了分量表中的同質性。另外分量表的結果也顯示，等值分數概念的題目，可以單獨作爲了解學童等值分數概念的工具。

三、量表效度分析

(一)內容效度

試題內容是否具代表性以代表潛在母群試題，通常是以邏輯判斷的方式決定，試題內容若具代表性，可幫助量表的編製者判斷編製的量表是否適切（吳毓瑩, 2001）。「國小高年級學童分數概念量表」的題目，經兩位教授國小高年級數學多年的數學老師及呂玉琴教授，確認量表試題內容如研究者所歸類的分數子概念中的各個項目，並確認試題內容是具有代表性，這顯示研究者所改編的「國小高年級學童分數概念量表」在試題內容方面具內容效度。

(二)構念效度

1. 因素分析

因素分析是研究構念效度適當方法之一。根據共同的因素，我們可以知道量表能有效量測的因素是哪些，據此可以檢驗量表在實際施測時，確能顯現設計時的建構概念。在以共同

表 11：經共同因素分析確認之本量表之試題分數子概念歸屬表

分數子概念	試題編號	題數
簡單分數概念	4	1
等分概念	1, 2, 3, 10	4
單位量概念	1, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23	10
等值分數概念	2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 17, 18, 19, 20, 21	15

表 12：「國小高年級學童分數概念量表」內部一致性之信度分析表

子概念	等分概念	單位量概念	等值分數概念
α 係數	0.6466	0.6626	0.8480
題數	4	10	15
樣本人數	2612	2612	2612

因素的特徵值至少大於等於 1、Scree Plot 及因素結構的可解釋性爲考量依據下，本研究的分數概念量表有 5 個共同因素是合理的，5 個共同因素所能解釋的共同變異量爲 50.5 %，若計入獨特變異量，其所對應的整體變異量爲 60.8 %。

接著本研究以四分相關因素分析檢測「國小高年級學童分數概念量表」，5 個因素正如預期的未呈現量表所隱含的簡單分數概念。研究者在分析量表試題所具有的子概念時，便表示簡單分數概念可能因爲其他分數概念因素較強而無法顯現，由 5 個因素在 V4 皆無大於 0.3 的負荷量的結果，與研究者的假設相符。因素分析結果與量表設計時所具備的主要子概念相符合，顯示「國小高年級學童分數概念量表」有不錯的構念效度。

2. 內部一致性分析

共同因素分析是檢驗量表設計的理念是否能適當的呈現，而試題的內部一致性是了解試題是否具備同質性的重要量數。因此，研究者認爲應就量表的內部一致性進行檢測。本研究擬以對照團體方法（郭生玉, 1987）進行內部一致性分析。

團體對照方法是將受試者在量表 23 題的得分，以總分的高低取其上下各 27 %的樣本人數，總分高的前 27 %的受試者稱爲高分組，總分低的後 27 %的受試者稱爲低分組，然後比較兩組在各題目上的答對比例。如果某題高分組答對比例不能顯著高於低分組，則題目應該刪除或加以修改。因其是比較兩群二值資料中資料爲 1 的比例，本研究乃以二項式考驗（binominal test）進行內部一致性檢定。檢定的虛無假設爲 $H_0：P_H \leq P_L$，對立假設 $H_1：P_H > P_L$，其中 P_H 和 P_L 分別代表高分組與低分組答對的比例，顯著水準（significance level）$\alpha = 0.001$。檢定結果如表 13。結果顯示各題都達到顯著標準，顯示各題內部一致性良好。

伍、結論與建議

一、結論

(一)研究將以往有關分數概念的試題修改重新編製使試題更趨完備

本研究的量表試題是以劉世能（2002）及呂玉琴等人（2001, 2002）所發展的試題爲參考，再依 1.試題解釋整體變異量是否過低；2.試題是否出現學生因錯誤想法而回答出正確答案；3.試題是否僅呈現分數符號或圖形而缺乏情境爲參考依據來刪除或修改試題。另因試題

表 13：「國小高年級學童分數概念量表」各題目的內部一致性

題號	P_H	P_L	$P_H - P_L$	Z	*p*-value
V1	0.8622	0.2399	0.6223	23.2450	<0.000*
V2	0.9691	0.4348	0.5343	21.8370	<0.000*
V3	0.9789	0.2924	0.6865	26.6241	<0.000*
V4	0.9902	0.8546	0.1356	9.5150	<0.000*
V5	0.9916	0.7766	0.2149	12.6114	<0.000*
V6	0.9916	0.4093	0.5823	23.7809	<0.000*
V7	0.9001	0.2234	0.6768	25.3595	<0.000*
V8	0.8776	0.3448	0.5328	20.3462	<0.000*
V9	0.9803	0.1184	0.8619	32.2120	<0.000*
V10	0.9803	0.3133	0.6670	26.0540	<0.000*
V11	0.9353	0.1484	0.7869	29.3482	<0.000*
V12	0.8959	0.0690	0.8270	30.6610	<0.000*
V13	0.4304	0.2564	0.1740	6.7804	<0.000*
V14	0.8397	0.1469	0.6927	25.6845	<0.000*
V15	0.8073	0.3853	0.4220	15.9894	<0.000*
V16	0.4613	0.1184	0.3429	13.9330	<0.000*
V17	0.9719	0.3538	0.6180	24.4174	<0.000*
V18	0.9845	0.5877	0.3968	18.1388	<0.000*
V19	0.9887	0.3193	0.6694	26.2862	<0.000*
V20	0.8523	0.4468	0.4055	15.8260	<0.000*
V21	0.7300	0.0930	0.6370	23.9129	<0.000*
V22	0.7342	0.2669	0.4673	17.3280	<0.000*
V23	0.3938	0.0495	0.3443	15.2350	<0.000*

P_H = 高分組答對率 P_L = 低分組答對率 Z= 二項式考驗

缺乏較難的題目而從文獻中選取適合的試題，再加以重新排序，使得量表試題更趨完備。

(二)研究所發展之「國小高年級學童分數概念量表」，具良好的信度

量表編製應重視信、效度的檢驗。本研究在信度考驗方面，等分概念、單位量概念、等值分數概念這三個分數子概念量表的內部一致性 α 值爲 0.6466、0.6626、0.8480，總量表α值爲 0.8452，顯示量表具有良好的信度。分量表的結果也顯示，等值分數概念的題目，可以單獨作爲了解學童等值分數概念的工具。

(三)研究所發展之「國小高年級學童分數概念量表」，具良好的效度

在量表的效度檢驗，本研究建立了內容效度及構念效度。內容效度是請分數概念的專家檢視量表題目的內容，確認了量表的內容效度；構念效度是以四分相關因素分析法及內部一致性分析法進行量表檢驗。由四分相關因素分析法來檢驗國小高年級學童分數概念量表的試題架構，而因素分析的結果與量表所設計的

主要概念相當吻合。進一步的，內部一致性的分析驗證了量表試題具備了同質性。此二項檢驗結果，顯示本研究所發展之量表具有良好的效度。

二、建議

(一)運用「國小高年級學童分數概念量表」來了解高年級學童的分數概念

了解學童的分數概念，有助於教師在分數概念上的教學。國小教師可運用「國小高年級學童分數概念量表」，作爲了解學童分數概念的工具，並將學生的表現作爲診斷教學與補救教學的參考。

(二)進一步編製「國小中年級學童分數概念量表」與「國小低年級學童分數概念量表」並建立常模

本研究已爲國小高年級學童分數概念量表的編製跨出第一步，如果能繼續編製「國小中年級學童分數概念量表」與「國小低年級學童分數概念量表」，則了解國小學童分數概念的工具將更爲完善。並可以此爲基礎再進一步的建立全國性的常模，則可更明確的全面性了解國小學童的分數概念。

銘　　謝

感謝國科會對本文相關研究的經費補助（計畫編號：NSC－90－2521－S－152－004）。但本文論點爲作者所有，不代表國科會。

參考文獻

1. 吳毓瑩（2001）。效度。載於王文中、呂金燮、吳毓瑩、張郁雯、張淑慧合著：**教育測驗與評量－教室學習觀點**，（47-76）。台北市：五南圖書出版公司。
2. 吳毓瑩、呂玉琴（1997）。**潛在類別分析對兒童等值分數概念結構之解析**。行政院國家科學委員會專題研究計畫精簡報告。(編號：NSC 85-2511-S-152-007)
3. 呂玉琴(民1991a)。分數概念：文獻探討。**台北師院學報**, **4**, 573-606。
4. 呂玉琴(民1991b)。國小學生的分數概念：1/2 vs. 2/4。**國民教育**, **31**(11, 12), 10-15。
5. 呂玉琴（1993）。影響分數二分之一概念的因素。**國民教育**, **33**(5, 6), 2-11。
6. 呂玉琴、鄧寶生（2001）。兒童數、量、形概念調查及診斷教學之研究---應用直觀規律理論—子計畫一：兒童分數概念調查及診斷教學之研究（Ⅰ），國科會專題研究報告。（編號：NSC 89-2511-S-152-024）
7. 呂玉琴、鄧寶生（2002）。兒童數、量、 形概念調查及診斷教學之研究---應用直觀規律理論—子計畫一：兒童分數概念調查及診斷教學之研究（Ⅱ），國科會專題研究報告。（編號：NSC 90-2519-S-003-006）
8. 林碧珍（1990）。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。**省立新竹師範學院學報**, **4**, 295-347。
9. 林福來、黃敏晃、呂玉琴(1996)。分數啓蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊**, **4**(2), 161-169。
10. 教育部（1993）。**國民小學課程標準**。台北市：教育部。
11. 教育部（2000）。**國民中小學九年一貫課程暫行綱要數學學習領域**。台北市：教育部。
12. 郭生玉(1987)。**心理與教育測驗**。台北市：精華書局。
13. 程毅豪（2000）。**數學學習資料庫抽樣計畫**（未發表）。
14. 彭海燕（1998）。**國小兒童等值分數概念了解之研究**。台北市：國立台北師範學院國民教育研究所碩士論文（未出版）。
15. 楊壬孝（1989）。**國中小學生分數概念的發**

展。國科會專題研究計畫報告。（編號：NSC78-0111-S-003-06A）

16. 劉世能（2002）。**臺灣北部地區國小高年級學生分數概念之研究**。台北市：國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文（未出版）。
17. 羅鴻翔（譯）（1980）。分數的數之發展。**國教之友**, **454-455**, 36-41。
18. Behr, M. J., & Post, T. R. (1988). Teaching rational number and decimal concepts. In T. R. Post (Eds.), *Teaching mathematics in grades K-8,* 190-229. Boston, MA: Allyn and Bacon.
19. Bergeron, M, J., & Herscovics, H. (1987). *Unit Fractions of a Continuous Whole*. Paper presented at the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
20. Bock, R. D., & Aitkin, M. (1981). Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: An application of an EM algorithm. *Psychometrika, 46,* 443-459.
21. Cattell, R. B. (1966). The scree test for the number of factors. *Multivariate behavioral research. 1,* 245-276.
22. Corwin, R. B., Russell, S. J., & Tierney, C. C. (1990). *Seeing Fractions*: *A unit for the upper elementary grades*. Developed by TERC (Technical Education Research Centers, Inc.) for the California Department of Education.
23. Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics*: *A teacher's guide to recent research*. Oxford, Great Britain, England: School Council Publications.
24. Dunteman, G. H. (1994). Principal Component Analysis. In M. S. Lewis-Beck (Ed.), *Factor Analysis and Related Techniques*. Sage Publication, Ltd., London, United Kingdom.
25. Figueras, O., Filloy, E., & Volderuoros, M. (1987). *Some difficulties which obscure the Appropriation of the Fraction concept*. Paper presented at the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
26. Figueras, O. (1989). *Two Different Views of Fractions*: *Fractionating and Operating*. Paper presented at the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
27. Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.
28. Guttman, L. (1954). Some necessary conditions for common-factor analysis. *Psychometrika, 19*, 149-161.
29. Hart, K. M. (1981). Fractions. In K. M. Hart, D. Kerslake, M. L. Brown, G. Ruddock, D. E. Kuchemann & M. McCartney (Eds.), *Children Understanding of Mathematics*: *11-16*. Oxford London/Northampton.
30. Hiebert, J., & Tonnessen, L. H. (1978). Development of the fraction concept in Two physical contexts: An Exploratory Investigation. *Journal for Research in Mathematics Education, 9,* 374-378.
31. Hunting, R. P. (1983). Alan: A case study of knowledge of units and performance With fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 14(3),* 182-197.
32. Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 365-378.
33. Kieren, T. E. (1976). Rational number on the number line. *Mathematics for the Elementary School*. Grade 5: Teacher's Commentary, part Π, Yale University.
34. Kim, J. O., & Mueller, C. W. (1994). Factor analysis: Statistical methods and practical issues. In

M. S. Lewis-Beck (Ed.), *Factor Analysis and Related Techniques*. Sage Publication, Ltd., London, United Kingdom.

35. Knol, D. L., & Berger, M. P. F. (1991). Empirical comparison between factor analysis and multidimensional item response models. *Multivariate Behavioral Research, 26,* 457-477.
36. Larson, C. N. (1980). Locating Proper Fractions on Number Lines: Effect of Length and Equivalence. *School Science and Mathematics,*423-428.
37. Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21(1)*, 16-32.
38. Mack, N. K. (1998). Building a Foundation for Understanding the Multiplication of Fraction. *Teaching Children Mathematic, 5(1),* 34-38.
39. McDonald, R. P., & Ahlawat, K. S. (1974). Difficulty factors in binary data. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *27*, 82-99.
40. Muthen, B. (1978). Contributions to factor analysis of dichotomous variables. *Psychometrika, 43*, 551-560.
41. NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1994). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Addenda Series, Grades 5-8*, Va.: NCTM.
42. Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The Child's Concept of Geometry*. New York: Basic Book.
43. Post, T. R. (1988). Some notes on the nature of mathematics learning. In T. R. Post (Eds.), *Teaching mathematics in grades K-8,*1-19. Boston, MA: Allyn and Bacon.
44. Preacher, K. J., & MacCallum, R. C. (2002). *Repairing Tom Swift's electric factor analysis machine*. Understanding Statistics (in press).
45. Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25(1)*, 50-85.
46. Saenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics, 28*, 101-132.
47. Van de Walle, J. A. (1990). *Elementary School Mathematics*: *Teaching Developmentally*. New York: Longman.
48. Vance, J. H. (1992). Understanding equivalence: A number by any other name. *School Science and Mathematics, 92*, 263-266.
49. Waller, N. G. (2001). *MicroFact 2.0: A microcomputer factor analysis program for ordered polytomous data and mainframe size problems.* Assessment Systems Corporation, U.S.A.

The Design of "The Rating Scale of Fraction for 5th and 6th Graders"

Wan-Hua Chan and Yuh-Chyn Leu
Chung-Cheng Elementary School, National Taipei Teachers College,
Hsin-Tien, Taipei Department of Mathematics Education

Abstract

Within the elementary math curriculum, fraction is closely related to decimal, percentage, ratio, and division. And these concepts are among the important concepts that elementary students must learn. There is much domestic research on the concept of fraction for elementary students. There is, however, a lack of assessment tools with decent reliability and validity for the concept of fraction. The purpose of this research is to design an assessment to measure the understanding of the concept of fraction for 5th and 6th graders, namely ***"The rating scale of fraction for 5th and 6th graders"***. The sample for this study was drawn from Taiwan through multistage sampling. The sample contained a total of 2612 students from 5th and 6th grade. The rating scale of fraction for 5th and 6th graders was analyzed using common factor analysis and it includes three sub-concepts of fraction: the concept of equal dividing, the concept of unit, and equivalent fraction. The internal coherence reliability was determined for each sub rating scale and the overall rating scale. Content validity and constructive validity were also established.

The results show that "the rating scale of fraction for 5th and 6th graders" has satisfactory reliability and validity.

Key words: Fraction, 5th and 6th Graders, Common Factor Analysis, The Rating Scale of Fraction.