科學教育學刊
2006, 第十四卷第二期, 121-147

Chinese Journal of Science Education
2006, 14(2), 121-147

整數數感融入國小四年級數學科教學之研究

劉曼麗 [1]　**侯淑芬** [2]

[1]屏東教育大學 數理教育研究所

[2]高雄市十全國民小學

（投稿日期：民國 92 年 11 月 17 日，修訂日期：94 年 1 月 5 日，接受日期：94 年 4 月 19 日）

摘要：本研究旨在探討四年級數感教學之實踐情形及其成效。根據數感相關文獻與研究報告，以數感成分中的四個元素「了解整數的位值概念與比大小」、「了解運算性質與運算對數的影響」、「分解或合成數以便於運算」和「使用參考值以便於解題」融入國小四年級數學科教學有關整數教材的單元中。研究採準實驗設計，以台灣南部某國民小學一班四年級 34 名學生為實驗組，另一班 33 名學生為對照組，分別由該班導師進行數感教學與一般教學。資料收集的方式包括筆試前後測、教學原案轉錄、學習單和訪談。而資料分析的方式包括質性和量性的分析。前後測學習成效的評量工具為自編的「數感能力測驗」和「數學成就測驗」。研究結果顯示藉由生活布題、估測估算活動、遊戲和數學日記等方式能幫助學生發展數感能力。t-考驗結果顯示實驗組數感後測成績顯著高於前測，單因子共變數分析結果也顯示實驗組的數感成績不但顯著高於對照組，在數學成就測驗上亦是。接受訪談的 7 名不同數感程度學生在教學後其數感均有不錯的發展，尤其是在使用參考值解決心算和估算等問題上。

關鍵詞：參考值、國小四年級數、感數學科教學

壹、研究動機與目的

近年來，許多國家的數學改革均將數感（number sense）列為重要的議題（National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1989, 2000; Astralian Education Council, [AEC], 1991; National Research Council, [NRC], 1989），足見數感在數學教育上的重要地位。美國數學教師協會主張「本標準之重心旨在發展兒童的數感」（NCTM, 2000）。Gagne, Yekovich 和 Yekovich 也提及數感已成為數學學門裡的重要一角（1993/1998）。同時，國外亦有不少學者針對數感教學進行研究或發表相關的論點（Bobis, 1991; Hope, 1989; Howden, 1989; Markovits & Sowder, 1994; Thornton & Tucker, 1989）。相較之下，我國較為缺乏這方面的研究，而目前的研究仍以探究學生數感能力

者居多（許清陽、楊德清和李茂能, 2001; 楊德清, 2000a; 楊德清、黃芳玉和林美如, 2002）。因此，有關數感教學的研究實有進行之必要性與重要性。另一方面，整數是國小數學課程的核心之一，而教育部公佈的九年一貫課程綱要指出，國小在第二階段（四至五年級）的目標為能熟練非負整數的四則和混合計算，培養流暢的數字感（教育部, 2003），由此顯見整數數感能力的培養是我國數學教育改革的重點。然而一些研究（楊德清, 1998; Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, & Yang, 1999）指出學生在數感測驗的表現並不如筆算測驗，其中涉及整數部分的大多屬於四年級的範圍。而我國整數教材的發展到四年級時，不論在數概念或四則運算上均已完成。因此在教學中如何提升四年級學生的整數數感應是相當值得研究的議題。基於上述研究動機，本研究擬以接受九年一貫課程的四年級學生為研究對象，探究在既有的整數課程中，融入數感教學的實施情形和成效。而在成效方面，本研究擬從學生數感能力的表現和其發展情形兩方面來探討。

貳、文獻探討

一、數感的意義

近年來許多學者亟欲從不同角度來分析與探討數感（楊德清, 1997, 2002; Behr, 1989; Howden, 1989; McIntosh, Reys, & Reys, 1992; McIntosh, Reys, Reys, Bana, & Farrel, 1997; NCTM, 1989, 2000; Resnick, 1989; Sowder, 1992）。其中，McIntosh 等人（1992）提出的數感組織架構扮演著承先啟後的角色。此數感組織架構不僅囊括了多位學者對數感的詮釋，更將數感的內涵以有系統的方式作了詳細的分類與說明。McIntosh 等人（1992）從數、運算及兩者交互作用產生的情境來探討數感，並從這三個範疇分別定義出數感的組成成分，且將各個成分做更細部的分類，形成一個有組織的架構圖，下圖 1 說明數、運算與情境的連結情形。其中，數的部分是指用數的知識和能力，包括能知覺數的排序（含位值）、數的多重表徵、數的大小與參考點等；運算方面是指用運算的知識和能力，包括了解運算對數的影響、運算的性質與運算間的關係等；在情境方面是指應用數與運算的知識和能力在計算情境上，包括善於利用有效的表徵或方法（含心算、分解或合成數以進行計算）等。

本研究亦以此三範疇界定所欲探討的數感元素，並根據學者們對各成份的定義、整數本身的數學性質以及研究期間所牽涉的教材範圍，分析出有關的數感元素。在數方面，即為了解整數的位值概念與比大小；在運算方面，則為了解運算性質與運算對數的影響；在情境方面，則包括分解或合成數以便於運算和使用參考值以便於解題。各數感元素之內涵如下：

(一)了解整數的位值概念與比大小

Sowder（1992）指出對位值有良好的了解是數感的根本基礎；而 McIntosh 等人（1992）也認為位值概念與數大小的比較是數感的重要成分。然而由於整數是極為抽象的，我們無法直接由數的本身來知覺它的大小，因此必須透過數量情境或與另一個數相

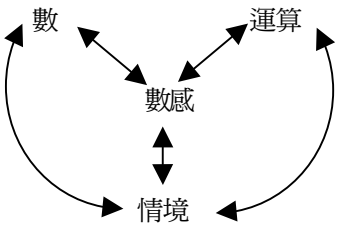


圖 1：數感主要範疇的連結情形
（McIntosh et al.,1992）

比較來感覺，故在本研究中除強調純粹數大小的比較外，也強調數量多少的感覺與比較。

(二)了解運算的性質與運算對數的影響

McIntosh 等人（1992）指出一個具有良好數感的學生應能在不同情境中，彈性地應用運算的性質來解題；或能連結不同運算間的關係發展出多樣化的思考與解題方法。本研究探討的運算性質即聚焦在教材範圍內的乘法交換律與乘除互逆性。此外，Behr（1989）將「了解運算對數的影響」細分為二：在計算問題時，知道當一個（或多個）自變量改變時要如何補償，以及知道在改變了運算的數後，何時結果仍然不變。本研究在運算對數的影響方面即針對整數乘除法運算時，被乘（除）數或乘（除）數改變時結果的變化來探討。

(三)分解或合成數以便於運算

McIntosh 等人（1992）認為數感是指知道數有多重的等價型式（包括將數分解成他數、將數以他數合成、將數轉換成不同型式的數或將數以圖像表徵之等），且能在不同情境中，彈性地選擇有助於解題的型式來表徵數。Sowder（1992）也提到，數感是指能夠分解或合成數、能流暢地在不同表徵間轉換並知道何時哪一種表徵是較有用的。因本研究聚焦在整數的數感上，因此強調在運算時，學生能將數分解或以眾數合成一數以便於解題的數感能力。

(四)使用參考值以便於解題

Resnick（1989）認為使用參考點是指使用已知的數值資料去說明不確定的事實，包括數值的參考點（例如二位數的和一定比 200 小）、以及數量的參照標準（例如一個孩子參加了有 50000 名觀眾的球賽，之後將此經驗用來作為判斷人群數量多少的參照標準）。McIntosh 等人（1992）也指出數值的參考點則常被用來判斷答案的大小或用它來替代某數以便於在心中進行運作。本研究強調的是學生應用數值參考點來解決運算問題的能力，為有別於數量的參照標準，因此直接以參考值稱之。至於數量的參照標準，是用來感覺數量的多少，故將之劃分在了解整數位值概念與比大小之數感元素內。

二、數感教學的相關研究

在國外的研究方面，Reys（1991）主張，教師若能營造一個良好的學習情境來鼓勵學生探索、討論和思考數與運算的意義和關係，並能進一步做推理，便可幫助學生發展數感。Hope（1989）則認為，教師必需先在班級中營造適當的學習氣氛，再藉著計算、測量與估算三項有意義與有目的活動，來發展學生的數感。Thornton 和 Tucker（1989）則提出，教師應隨時隨地在數學課中培養學生的數感，也應設計與真實生活經驗相結合的課程並以合作學習的方式來進行教學。Markovits 和 Sowder（1994）則認為在教學中應提供學生機會去探索數、數與數的關係和計算方法，並透過估算和心算來培養學生的數感。Kamii（1994/2001）認為可透過解題、遊戲與合作學習等方式來進行數感教學。Hopkins（1995）則是透過符合實際生活經驗的具體物，讓學生實際操作來培養學生對大數的數感。在國內的研究方面，支毅君（1997）建議教師應提醒學生去注意及反思數的大小與合理性等觀念，使數感融入有關數的教學活動中，則學生才較有機會發展出個人化的數學知識及概念。楊德清（2002）指出，在鼓勵學生熱衷於探索、溝通、討論、思考與勇於分享解題經驗的課室互動學習情境之下，學生的數字常識能力較能夠被孕育和成長。

參考上述學者對培養學生數感所提出的論點，研究者認為教師若欲將數感融入教學中以幫助學生發展數感能力，可依循下述方

式進行：教師可在正規課程中，以與學生真實生活情境相連結的問題來進行教學，亦可讓學生透過具體物與實際操作來進行估測活動，以助其有意義地了解數與運算。再者，在教學過程中，教師亦可適時地提出心算和估算的問題，以培養學生靈活應用數與運算的能力。此外，教師也可透過遊戲的競賽方式來激發學生主動探索數與運算的意義和關係，並藉由數學日記來提供學生每天探索數和數與計算關係的機會。

叁、研究方法

一、研究樣本

本研究是以便利取樣的方式選取高雄市某國小四年級兩班學生，一班作為實驗組（34 人），另一班作為對照組（33 人）。該校位於高雄市市區，共 54 班，家長以經商、工人居多，普遍具有國、高中以上的程度。由於高雄市國小均由教育局統一進行電腦常態編班，因此每班學生程度應屬相當。而擔任實驗組與對照組教學的二位教師皆畢業於屏東師範學院，前者（第二作者）擔任教職七年，而後者為十年。兩人為教學夥伴，時常觀摩和討論彼此的教學，班級經營與上課方式相近，均以強調師生互動討論的方式進行教學。筆試樣本即為此兩班學生，訪談樣本則依據筆試前測結果，從實驗組中篩選而得（詳見第五節）。

二、數感教學設計

本研究之數感教學是將數感元素融入在正規數學科教學中，並非再找額外的時間進行教學。經過數次的聚會與討論，經研究者與實驗組教師共同分析四年級與整數有關的教材後，決定以康軒版本第七冊第十單元「統計圖表」、第八冊第一單元「整數四則運算」與第四單元「整數乘法」作為數感融入教學之單元。其中，統計圖表單元雖屬統計與機率主題，但由於統計表、長條圖和圓形圖所呈現的數值資料是生活化的，恰可提供學生探索「量」的機會。而「量感」的建立，可做為使學生對抽象的數產生感覺的基礎。以此單元做為數感教學的第一單元應是可行的。另兩單元屬數與運算主題，且均偏重在整數運算方面，以此兩單元加強學生對運算性質的理解，提昇其彈性運用整數和運算來解題的能力，應是最恰當的。接著，研究者與實驗組教師共同閱讀有關數感的文獻，分析單元教材內容，找出可將數感融入教學的切入點與方式，再以此設計出數感教學活動。將數感融入的方式可透過生活布題、估測估算活動、遊戲以及數學日記進行。前兩方式是改編原教科書中的布題和情境；而後兩方式則是額外增加的教學內容，其中，遊戲仍是利用正常課程來進行，數學日記則是做為回家作業，並在隔日利用數學課進行討論。以下針對這四種方式加以說明：

(一)生活布題

由於本研究之數感教學是要融入在現行課程中，在不偏離原教學設計的布題架構下，可適當地將題目加以修改或延伸來引導學生思索數和運算。修改的方式可將原題目情境換成真實生活的情境以凸顯分解或合成數的需求性，並將原題目中的數改為接近整十的數（如 199、38、11 等）以培養學生使用參考值解題的能力。例如，將原課本布題：「領巾一條 45 元，領圈一個 36 元，蔡老師買了 7 組送給幼童軍當禮物，共花了多少錢？」改為真實生活情境（搭配文具店的廣告單）布題：「書架一個 39 元，雜誌架一個要 38 元，老師要各買六個，需要多少錢？」。另外再藉由討論與分享，讓未能使用的學生也能察覺使用參考值的便利性，進而能主動使用以簡化解題過程。如遇教學中與運算有

關的問題可再加以延伸，改變被運算數的大小，讓學生思考運算結果有何影響。

(二)估測和估算活動

在國外與數感教學有關的文獻中，估測與估算活動均佔有一席之地（McIntosh, et al., 1991），估測活動能幫助學生掌握對數量多少的感覺，進而培養學生對整數大小的感覺；估算活動能讓學生擺脫紙筆計算或算則的束縛，重新思考數與運算的意義，進而能應用分解或合成數與使用參考值等方法以簡化解題過程。在估測活動方面，只要利用教學時用到的具體物，隨時要求學生估測其數量。估算活動可加在整數四則運算與整數乘法兩單元中，要求學生在紙筆計算前先進行估算。例如，在統計圖表單元，可利用繪製統計圖表前所進行的調查和分類活動，讓學生估測這些活動所用到的具體物數量等。

(三)遊戲

在數與運算的教材中，我國學生極度依賴紙筆計算解題。如要求學生不用紙筆計算進行心算或直接應用運算性質以了解運算對數的影響並不容易，而遊戲的方式可提供學生不用紙筆計算的學習氣氛，例如，在玩撲克牌撿紅點遊戲中，心算在湊十或計總分上很自然被學生表現出來。在玩空格填數字比運算後的結果大小時，學生較易感受運算對數的影響。另外，遊戲有競賽的味道，較易激起學生努力嘗試的意願，也能促使學生將其對位值概念與比大小的了解應用出來。

(四)數學日記

在數學日記上，加入「每日一數」或「數字樹」以期提供學生分解或合成數的經驗，或加強學生對位值的了解與數量的感覺。每日一數是每日提供與學生生活相關的一個數（如班級人數、節慶日期或當月午餐費等），請學生將該數自由分解成幾個數，或將該數與他數合成整十（百）的數，以作為日後簡化計算的基礎，該數可由教師或全班討論決定。數字樹除了延續每日一數的部分外，還加入了兩個部分，先要求學生用錢幣圖像表徵該數（可由不同單位感受位值），並為該數加上量詞單位後再描述該數量的多少。

將數感元素融入各單元的教學活動設計構想摘要如圖 2。

另外，為增進教學可行性，在正式教學前，委請三位數理教育專長教授針對教案提供意見，並請實驗組教師先進行試教。

三、研究設計

本研究採準實驗研究設計，實驗處理之自變項、控制變項與依變項如表 1。

在自變項方面，實驗組採數感融入現行課程之教學；對照組則依照教學指引的內容與程序實施教學活動。為能掌握控制變項，研究者與實驗組和對照組教師在每一單元教學前針對教學內容、上課時數以及進度進行討論。其中，實驗組是針對原教學目標與數感教學部分進行討論；對照組則是針對原教材之教學設計進行討論。另外，在進行成效分析時，以共變數分析的方式排除兩組學生起點行為的差異。教學共進行三個單元，進行時間分別為 4 節課、6 節課和 6 節課，共 16 節。為了解不同教學處理對學生數感能力與數學學習的影響，本研究針對兩組學生分別進行數感能力測驗與數學成就測驗之前後測。此外，為了解學生數感能力的發展情形，本研究針對篩選出的不同程度學生進行訪談。除了在前、後測結束後立即進行訪談（教學前訪談、教學訪談）外，原擬在各單元教學後也進行訪談，以確實掌握學生不同數感能力的發展脈絡，但考慮多次訪談會增加學生練習的機會，且學生也容易感到厭倦而胡亂回答，故只安排一次教學中的訪談。為將三次訪談間隔的時間儘量拉長，故於第二單

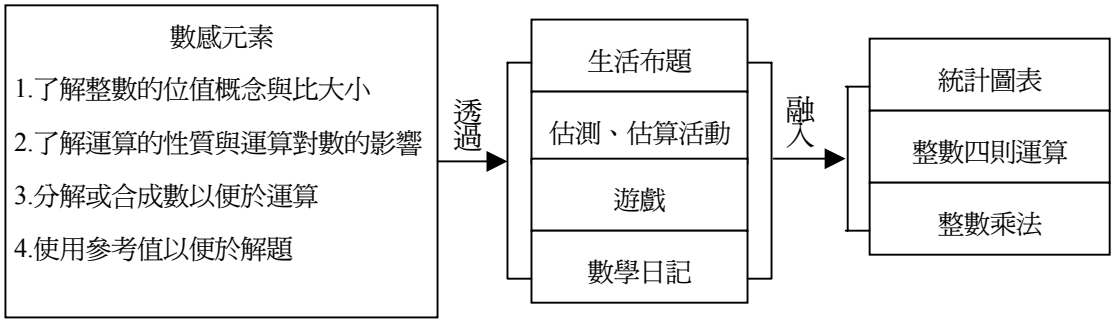


圖 2：數感融入教學活動設計構想圖

表 1：教學實驗之處理一覽表

自變項（教學處理）	控制變項	依變項
對照組（一般教學）	1.起點行為 2.授課時數 3.教學進度	1.數感能力表現 2.數學學習表現
實驗組（數感教學）	1.起點行為 2.授課時數 3.教學進度	1.數感能力表現 2.數學學習表現

元教學後進行訪談。為能對應比較學生在各個問題的答題策略與想法，三次訪談內容均以學生在筆測時的填答情形為主。整個實驗處理之實施程序與進行時間如圖 3。

四、研究工具

(一)數感能力測驗

本研究之數感能力測驗為研究者和實驗教師共同編製而成，作為學生數感能力前、後測之用。測驗內容是以本研究所探討的四個數感元素為架構，配合四年級整數教材內容並參考國內外相關研究編製而成（劉琪玲, 2002; McIntosh, et al., 1997; Reys, 1991）。測驗初稿中，每一元素對應之試題均為 10 題左右。為避免學生的學習成效是來自於練習之嫌，故試題與教學內容所涉及的問題雖屬相同數感架構，但呈現方式和使用的數字並不相同。測驗初稿編製依據數學教育專家提供之意見與學生答題反應進行多次修改，再以高雄市某國小四上學生 212 人進行預試，並將預試結果以 SPSS 統計軟體進行分析，在刪除難度和鑑別力不佳之試題後，最後所得測驗試題中，前兩元素對應之試題為 7 題，後兩元素則為 10 題。然而訪談時發現，學生在解後兩元素對應之試題時，會彈性地選擇其中一個數感元素來解題，故將兩元素試題合併，共為 20 題。整份測驗之 Cronbach's α 值為 0.8400，顯示本測驗已具有不錯之信度。本測驗的主要內容與對應的數感元素摘要如表 2。

除了第一個與第四個數感元素中的多位數乘除法計算題外，為避免學生在其他試題直接使用紙筆計算出精確答案，特以 Powerpoint 方式呈現，且停留時間不超過 60 秒。

(二)數學成就測驗

本研究之數學成就測驗也為研究者和實驗組教師共同編製而成，共有兩份，一份作為學生數學成就前測之用，另一份則為後測之用。由於本研究探討焦點在於整數數感，故此測驗之內容也只考量與整數相關的問題為主。前測試題以四年級上學期學生已學過

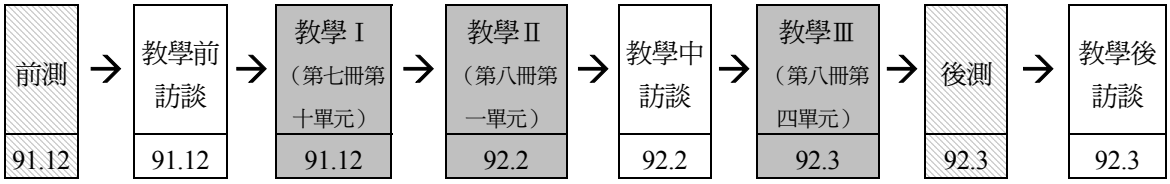


圖 3：實驗處理實施程序

表 2：數感能力測驗內容及所對應之數感元素一覽表

數感元素	測驗內容（題數）	總題數
1.了解整數的位值概念與比大小	■ 位值（2） ■ 數量多少的比較（1） ■ 數的比較（2） ■ 數量多少的感覺（2）	7
2.了解運算的性質與運算對數的影響	■ 多個乘式結果的比較（乘法交換律的應用）（2） ■ 被乘數不變和乘數改變時結果的變化（1） ■ 乘式與連加算式結果的比較（1） ■ 被除數或除數改變時結果的變化（2） ■ 除式結果與某數的比較（乘除互逆性的應用）(1)	7
3.分解或合成數以便於運算 4.使用參考值以便於解題	■ 加減法心算、估算（5） ■ 乘除法心算、估算（11） ■ 多位數乘法計算（2） ■ 多位數除法計算（2）	20

的整數教材內容為主，後測試題則以下學期教學實驗期間涉及的整數教材為主。其中，前測之十萬以內的數概念中，位值與比大小乍看之下與數感能力測驗重複，實際上，數學成就測驗試題較屬例行性問題（如比較 45926 和 51221 的大小），而數感測驗試題則較屬非例行性問題（如用 2、6、5、0 排出最大和最小的四位數）。此外，數學成就測驗的多位數乘法問題均為學生已學過的，而數感測驗試題則為學生尚未學過的。前、後測初稿編製後，交由兩名數學教育碩士與兩位國小數學科教師依細目表檢核內容，並針對測驗之用詞與題意檢核是否完善，有無超過教材範圍。最後依專家提供之意見進行修改，並以高雄市某國小四上學生 212 人和五上學生 198 人進行預試，並將預試結果以 SPSS 統計軟體進行分析，Cronbach's α 值前測為 0.946，而後測為 0.912。兩份測驗的主要內容摘要如表 3。

五、資料收集與分析

本研究透過教學錄影、筆試、以及訪談來收集研究所需資料，資料分析的方式包括質性和量性的分析。茲將資料分析方式說明如下：

(一)教學錄影

將數感融入三個單元的教學進行全程錄影，並將錄影資料轉錄成文字資料，再針對將數感元素融入的教學片段進行分析與探討。

表 3：數學成就測驗前後測之內容細目表

測驗	測 驗 內 容	細 項 說 明（題數）		總題數
前測	十萬以內的數概念	■ 讀寫法（2）	■ 序數（1）	7
		■ 圖像表徵（2）	■ 位值（1）	
		■ 比大小（1）		
	加減法	■ 三位數 + 三位數（2）		4
		■ 三位數 – 三位數（2）		
	乘法	■ 二位數 × 一位數（3）		6
		■ 三位數 × 一位數（3）		
	除法	■ 二位數 ÷ 一位數（4）		8
		■ 三位數 ÷ 一位數（4）		
後測	整數四則運算	■ 加減混合（4）	■ 乘除混合（4）	16
		■ 加減與乘混合（4）	■ 加減與除混合（4）	
	整數乘法	■ 二位數 × 二位數（4）		8
		■ 三位數 × 二位數（4）		

(二)筆試

針對兩組學生進行數感能力測驗與成就測驗前、後測，並將筆試結果以 SPSS 統計軟體進行相依樣本 t 檢定與單因子共變數分析。

(三)訪談

由於過去有關學生數感能力表現的研究顯示，學生有良好的紙筆計算能力卻未必有較佳的數感（楊德清, 1998, 2000b; Kamii, 1994/2001; Reys & Yang, 1998），故以數感能力測驗與數學成就測驗前測成績篩選出七名分屬高高、高中、中高、中中、中低、低中、低低程度的訪談樣本：Hh、Hm、Mh、Mm、Ml、Lm 和 Ll（前代碼表學生的數感能力，後則表數學成就；高低和低高從缺）。高、中、低程度的區分標準是以全班測驗成績排名的前 27%、中 46%、後 27% 為依據。訪談共進行三次，內容以筆測時的填答情形為主。訪談進行中除隨手記錄外，並採全程錄音，結束後立即將訪談內容轉錄成文字資料，統整彙編每位學生在各個題目的三次訪談情形並進行分析。

肆、研究結果與討論

一、數感教學之實踐歷程

將各單元融入之數感元素與使用的融入方式整理如表 4。

以下舉例說明各個數感元素在某一單元的實踐歷程（見表 4 註明*處）：

(一)在整數乘法單元中，藉由遊戲幫助學生了解整數的位值概念與比較大小

內容說明：進行填數字比大小的遊戲，將學生分成兩隊，輪流抽數字卡（0~9）4 張，擺在如下的空格使得積數最大。

實踐歷程：（以下使用代碼以 T 表實驗組教師、Sn 表個別學生、SS 則表全班或部份學生）

遊戲一開始甲隊代表 S26 抽到 9，經過思考後，S26 將 9 放在第二列第一個空

表 4：各單元融入之數感元素與融入方式

教學單元	融入方式	數感元素			
		了解整數的位值概念與比較大小	了解運算的性質與運算對數的影響	分解或合成數以便於運算	使用參考值以便於解題
統計圖表	生活布題	✓			
	估測估算活動	✓		✓	✓
	遊戲				
	數學日記			✓*	
整數四則運算	生活布題	✓	✓		✓*
	估測估算活動	✓		✓	✓*
	遊戲	✓	✓	✓	✓
	數學日記			✓	
整數乘法	生活布題		✓	✓*	✓
	估測估算活動	✓		✓	✓
	遊戲	✓*	✓*	✓	✓
	數學日記	✓		✓	

格內：

□□

× 9□

此時，實驗組教師請 S26 說明原由，藉由 S26 的發表，其他學生也察覺數字的擺放位置對數大小的影響：

T：好，S26，為什麼 9 要放那裡？

S26：因為 9 放那裡的話，就可以變成乘以九十幾。結果就會很大。

T：為什麼不放在這裡（指乘數的個位）？

S26：其他的數都比 9 小這樣最多也只有 89，還是會比九十幾小啊！

T：那如果乙隊抽到 1 呢？要放哪好？S2 你說！

S2：要放在個位，這樣如果又抽到大的數就可以放在十位了，那排出來的數才會比較大！

當兩隊將抽到的數字卡擺放好後，再用計算機算出答案（8324 與 2088）寫在黑板上，此時教師趁機引導學生比較積數大小，其中 S17 雖知道要先比較左邊數字，卻無法說明原因：

T：那這兩個數誰比較大呢？S28，你說說看！

S28：8324！因為 8（指 8324 的 8）比 2（指 2088 的 2）大。

T：為什麼只比這個 8 和這個 2？

S17：因為那是千位。

T：為什麼要比千位？誰規定的？

S17：都是這樣比的啊！

T：那為什麼要這樣比呢？如果數學家規定先比個位，那 2088 就比 8324 大囉？

S17：（搖頭）。

最後 S20 從千位所表示的數值大小說明先比左邊數字的原因：

T：一定有原因的嘛！誰可以說說看呢？好，S20。

S20：千位就是幾千的，它是 8000，它是 2000，8000 就已經比較大了，後面就不用比

了。

T：S17，你聽得懂 S20 的解釋嗎？

S17：懂（點頭）。

為能檢驗 S17 是否真正了解 S20 的解說，在下一輪遊戲中，教師再請 S17 比較兩隊所得積數（3276 與 4374）的大小，並說明先比左邊數字的原因，而 S17 也已能清楚地說明：

S17：4 比 3 大，所以 4374 比較大。

T：你還是先比千位，那為什麼比千位就好了呢

S17：因為這個 4（指千位的 4）是 4000，3 就是指 3000，它已經比它多 1000 了，後面都是幾百的，再怎麼多都不會比 1000 多，所以比千位就好了。

整數的位值概念對學生而言，應不陌生，但因位值概念為數感的基礎，仍有加強的必要。從實踐歷程來看，遊戲的競賽氣氛無形中會促使學生去思考數字的擺放位置對數大小的影響，經由教師針對此點不斷地提問，強化了學生對位值與數大小關係的了解。此外，針對兩隊所得積數大小進行比較與討論，也能幫助學生了解比大小時，先比左邊數字大小的原因。

(二)在整數乘法單元中，藉由遊戲幫助學生了解運算性質與運算對數的影響

內容說明：進行填數字比大小的遊戲，將學生分成兩隊，輪流抽數字卡（0~9）5 張，隨意擺在如下的空格內，再要求學生不經計算，直接比較兩隊的答案。

甲隊：□□)□□□　　乙隊：□□)□□□

實踐歷程：進行第一回合比賽時，兩隊排出的算式為「854 ÷ 12」和「853 ÷ 21」，實驗組教師先以舉手的方式了解學生的想法，結果發現大部分學生認為「853 ÷ 21」的答案比較大：

T：都排好了！誰贏呢？覺得「854 ÷ 12」的答案比較大的舉手！覺得「853 ÷ 21」的答案比較大的舉手！

（大部分學生認為「853 ÷ 21」的答案比較大）

從 S15 的發表想法中，發現其具有「被除數和除數越大，答案就會比較大」的迷思概念：

T：S15，你覺得呢？

S15：我們的比較大（指 853 ÷ 21）。因為雖然它（指 853 ÷ 21）裡面的數（指 853）比較小，可是也只小 1 而已。但是它（指）外面的（指 21）比它（指 854 ÷ 12）的大，嗯，大 9，所以它（指 853 ÷ 21）還是比較大。

T：為什麼外面比較大的，算出來的答案就大呢？

S15：我就是覺得外面跟裡面的數都比較大，答案就會比較大。

T：你怎麼知道？

S15：（沉默）

教師特請 S4 就除法算式擬題，透過情境幫助學生感受被除數和除數改變後商的變化。

T：我們要從除法的意義去看喔！「854 除以 12」可以想成什麼？S4，你想一個題目，要用 854 除以 12 來算的。

S4：嗯～就是比如說有 854 個糖果，要分給 12 個人，一個人可分到幾顆？

T：很好。那我們可以把「853 除以 21」想成有 853 個糖果，要分給幾個人？

SS：21 個人。

T：那你們說，哪一種分到的糖果會比較多？

SS：854 除以 12。

T：S15 你覺得呢？

最後，由 S15 的再回答中，顯示其已能感受數與運算的交互作用：

S15：應該是 854 除以 12 比較大。因為如果被除數差不多，但是除數比較大，表示

要分給比較多人，那分到的就會變少了。

從此單元的實踐歷程中發現，遊戲的競賽氣氛和不能使用紙筆計算的限制會促使學生去思考運算對象大小與結果的關係。針對學生發表的想法，教師了解到學生存有的迷思概念，接著再以情境或具體物輔助說明，發現學生能很快地察覺到運算對象改變時結果的變化。從後測結果中也可發現學生在此方面的數感能力有相當的進步。這樣的結果儘管已令人相當雀躍，然而研究者認為可將遊戲規則改為：各隊先抽出五張數字卡後，透過討論決定產生商數最大（小）的排法，再與他組比較。這樣的遊戲規則能讓學生從既定的數字中思索究竟怎樣的排法能產生最大（小）的商數，應更有助於學生了解除法運算對象大小與結果的關係。而此遊戲所使用的空格數以及遊戲規則也可隨學生程度做調整。

(三)在統計圖表單元，藉由數學日記幫助學生能多元地分解或合成數

內容說明：進行數學日記中的「每日一數」活動，以學生熟悉且較小的數開始。

實踐歷程：實驗組教師說明怎樣進行每日一數活動，並請學生發表分解或合成「34」的方法：

T：好，你們知道數學日記裡的這個「每日一數」要作什麼用嗎？

SS：就每天寫一個數字嗎？

T：好，從今天開始，老師每天會丟給你們一個數，然後，看看你們誰比較厲害，可以想出最多種把數拆成其他數的方法喔！

T：比如說，有沒有人要說說看，我們班有34人，你看到34會想到什麼？

在討論的過程中，發現班上學生一開始的想法都是以兩個數來與34連結：

S7：想到30和4。

T：好，還有沒有？

S11：就是34再加上66就會變成100。

T：哦！不錯喔！還有沒有？

S14：35扣掉1會變成34。

T：還有沒有？

（SS沉默）

經過教師再三引導後，學生便能想出以多個數來與34連結：

T：你們剛剛都是用兩個數來表示34，有沒有可以用更多的數，比如說3個啦！4個啦！把他們變成34的？

S20：可以想成3個10合起來，再加4。

S1：3個11合起來就變成33，然後再加1就變成34了。

從此單元的實踐歷程中發現，透過每日一數活動能引導學生更彈性地、多元地去思考數，而這正是學生日後能彈性地分解或合成數以便於運算的基礎。不過由於學生每日都要做這項作業，久而久之部分學生便流於形式化地分解或合成數。因此，研究者與實驗組教師討論後，實驗組教師在後續教學便改由直接展示數學日記或讓學生交換閱讀，藉由彼此的觀摩，使其欣賞並學習到同儕思考數的不同方式；或改為進行分組比賽，藉由競賽氣氛讓學生激盪出更多分解數或合成數的方式。經過這樣的培養，到了整數乘法單元，學生分解或合成數的方式不但愈來愈多樣化，甚至已能視實際需要將數分解成不同的方式以利解題（見下一段）。

(四)在整數乘法單元，藉由生活布題幫助學生能分解或合成數以便於運算

內容說明：進行二位數乘以二位數的教學時，以真實生活情境布題：「一盒牛奶要12元，這個月喝了 22 盒，算算看這個月的牛奶錢應該要多少錢？」。

實踐歷程：在學生列出算式後，實驗組教師不直接教導計算方法，而是鼓勵學生用自己的方法解題：

T：先告訴我要怎麼算？

SS：用 12 乘以 22。

T：那你們算算看答案是多少？寫在白板上。

S7：老師！二位（數）乘以二位（數）的還沒學過！

T：但是乘法學過了啊！你想想看什麼是乘法？以前二位乘以一位怎麼乘？盡量用你的方法試試看囉！如果老師沒教，但你會用自己的方法算出來，這樣就很厲害了喔！

從行間巡視發現，有的學生試著套用算則，但最後只算了「12 × 2」便進行不下去。有的則將被乘數與乘數先分解成整十的和整一的，卻只算整十的乘以整十的、整一的乘以整一的，然後再相加。其中 S10 是將加法過度類推到乘法而產生錯誤：

T：好，誰要講講看，你是怎麼算的？S10。

S10：我先把 12 分成 10 和 2，把 22 分成 20 和 2。10 乘以 20 是 200，2 乘以 2 是 4，再加起來就是 204。

T：你們覺得 S10 的做法對不對？跟他一樣的舉手。

（部分學生舉手）

S26：可是老師我們好像沒有交過 204 這樣的牛奶錢呢！

T：喔！S26 說牛奶錢好像不是這個價錢喔！S10，你解釋一下，為什麼要算 20 乘以 10 是 200，2 乘以 2 是 4，再加起來呢？

S10：嗯……我就覺得好像是這樣算，加法就是像這樣算的啊！

T：什麼叫做「加法就是像這樣算的」？你舉例說說看！

S10：就像 12 加 22 也是先加 10 和 20，2 加 2，然後再加起來。

不過也有學生將乘數分解成整十的和整一的，再分別乘以被乘數而成功解題：

T：好！那有沒有人有不同的算法？好，S27！

S27：我是把 12 分成 10 和 2，然後 22 乘以 10 是 220，22 乘以 2 是 44，加起來是 264。

T：好，兩個人不一樣喔！你是跟 S27 一樣的舉手！

（部分學生舉手）

在學生發表完做法後，教師不馬上說明對錯，而是藉由錢幣表徵來澄清乘法意義，讓學生察覺 S10 做法的錯誤，並了解應該要如何正確分解數以進行運算：

T：好，我們來看看一天要 12 元，22 天，表示有 22 個什麼合起來？

SS：12！

T：就是有 22 組的 12 元，對吧？（在黑板上畫出 22 組的 ①①⑩）

SS：對！

T：那我要算這麼多錢，怎麼算？我們看 S10 怎麼算喔！S10 是先算 10 乘以 20，那他是算了這裡的哪些？

S8：算每個圈圈裡的 10 元，合起來是多少。

T：是每個圈圈嗎？這裡有幾組 12 元，也就是有幾個圈圈？

SS：22 個。

T：那 S10 算 10 乘以 20，是要算幾個圈圈？

SS：20 個。

T：對！只算了 20 個圈圈裡面的 10 元合起來喔！後面兩個還沒算喔！那 2 乘以 2 是算哪？

S8：是後面那兩個圈圈裡面的 2 元合起來。

T：那 S10 有算完這全部圈圈裡的錢嗎？

SS：沒有！

T：有這麼多沒算到，對不對？

T：那 S27 說先算 22 乘以 10，就是先算了哪裡？

SS：22 個圈圈裡面的 10 元。

T：那 22 乘以 2 呢？

SS：圈圈裡面的兩元合起來。

T：這樣都算到了嗎？

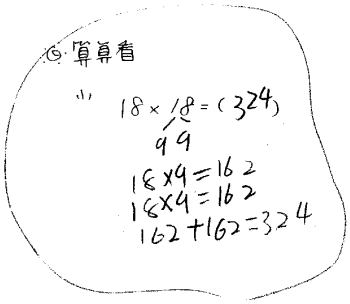
SS：有！

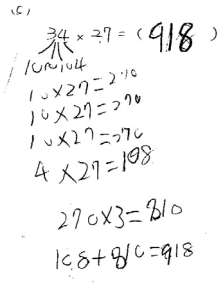
最後從學生對原算式解法的反思可知，學生已能擁有此部份的能力。

T：所以，再回來看 12 乘以 22 這個算式，應該要怎麼算呢？

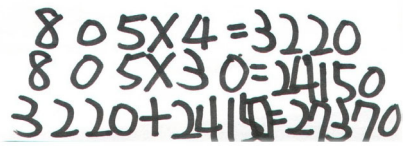
S2：先算 22 乘以 10，再算 22 乘以 2，再合起來。

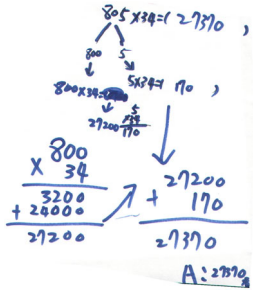
在先前進行整數四則運算單元，便發現即使要求學生心算，學生仍習慣在心裡使用算則。雖然常因運思不流暢而出錯，但學生依然十分依賴算則。研究者與實驗組教師討論後，我們認為如要加強學生使用此數感元素的需求性，應在學生學習算則前，就先給予學生自行解題的機會。從此單元的實踐歷程來看，學生果然感受到過去所學算則的拘限性，而試著以分解數的方式來解題。從當日的數學日記中可發現大部分學生已能彈性地利用分解或合成數的方式來解題，例如在計算「18 × 18」時有學生能將 18 分解成兩個 9 來計算；在計算「34 × 27」時，則將 34 分解成 3 個 10 和 4 來計算：



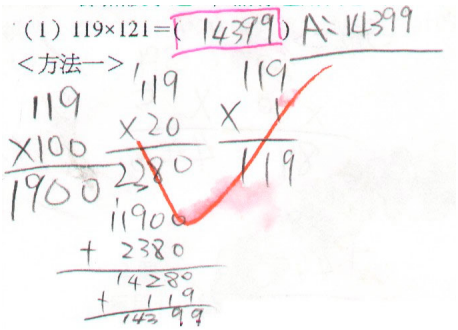


而從後續學生的上課表現也可看出，部分學生甚至能解決非例行性的問題。例如在未學過三位數乘以二位數乘法的情況之下，學生在解決生活布題：「每個學生交 805 元，班上有 34 名學生，老師會收到多少錢？」時，已有不少學生能將乘數 34 分解成 30 和 4，或將被乘數 805 分解成 800 和 5 來進行運算：





另外，從後測中，發現部分學生更能自行發展出將乘數分解，再將被乘數分別與分解後的各數相乘後再相加來解決「三位數 × 三位數」的問題，並能說明為何如此做的理由，例如，學生在計算「119 × 121」時，先將 121 分解成 100、20 和 1 三個數，再將 119 分別乘以這三個數後再相加後的數做為答案，並能說明理由如下：



R：為什麼這樣算？

S：因為 119 × 121 是 119 的 121 倍，所以先

算 119 的 100 倍，20 倍，再算 1 倍，最後合起來就是答案。

由上述種種證據顯示，學生對於尚未學過的三位數乘法問題，已不再胡亂套用算則，也不再錯誤地將加法算則類推到乘法，而是能應用乘以整百和整十的倍數經驗，將乘數或被乘數分解成較小而容易相乘的數來進行運算，由此看來學生在此部分的數感能力應有所提升。

(五)在整數四則運算單元中，藉由估測估算活動與生活布題幫助學生能使用參考值以便於解題

內容說明：進行加乘混合的四則運算時，以真實生活情境布題：「書架一個 39 元，雜誌架一個要 38 元，老師要各買六個，需要多少錢？」，並進行估算活動。

實踐歷程：在學生列出併式算式填充題「$39\times6+38\times6=(\ \ )$」或「$(39+38)\times6=(\ \ )$」後，實驗組教師要求學生在計算準確答案前，先估算答案：

T：這問題要怎麼算呢？你想先算什麼？再算什麼？先把算式填充題寫出來！

T：先不要計算，想想看，你列的算式，它的答案大概是多少？

在教學過程中發現 S32 和 S15 均很依賴算則，即使已強調只要算出大概的答案，S15 仍習慣將答案算出。此點與楊德清（2000a）的研究結果相同，學生較能接受「精確的答案」，對於「求大概的答案」反而猶疑不前：

T：S32，你先不要計算喔，你看一下這算式，它的答案大概是多少？

S32：嗯……。我要真的去算才知道。

T：老師是問大概，大概就好了。

S32：嗯……。

T：沒關係。S15 你覺得呢？

S15：就是六九五十四，寫四進五，六三十八加五就是……二百……二百三十五。然後，另一個，六八四十八，寫八進四，然後，六三十八加四就是……嗯……忘了！

在教師再三提問下，S7 發表了使用參考值「40」來進行估算的想法後，S25 感受到了參考值的便利性，而立即地應用在另一個算式填充題上：

T：老師是說大概就好了，剛剛 S15 是要把準確的答案算出來，可是這樣會亂掉，對不對？好難想喔！有沒有人有方便好想的方法可以知道大概多少？「大概」就好了。什麼樣的數會比較好算，不用想什麼寫幾進幾，就可以知道了？

S7：如果把 39 看成是 40，40 乘以 6 就二百多了，另外那個也是二百多，加起來應該是四百多。

T：喔！把 39 當做 40，40 乘以 6 就二百多了，後面的 38 也可以當多少？

SS：40。

T：所以乘以 6 以後是多少？

SS：二百多。

T：所以合起來是？

SS：四百多。

T：S15，這樣有沒有比較容易想？

S15：有。

T：好，S25，你說說看。

S25：我是寫右邊這個算式的（指 $(39+38)\times6$）。然後，因為 39 加 38，那剛剛 S7 說，把 39 和 38 看成 40，所以合起來大概是 80，那乘以 6 以後大概就會是四百八十。

T：很好！有時候直接算不好算，我們就可以像這樣找一個比較容易算的數字來判斷看看大概是多少喔！

在先前進行統計圖表單元時，實驗組教師雖要求學生不用紙筆計算，但學生仍會在心裡使用算則，或者就放棄解題；甚少有學

生想到使用參考值來解題。在與研究者討論並深思後，教師在往後的估算活動中，刻意營造不易心算的情境，如提高運算的困難度，但都以接近整十的數來布題，企圖讓學生察覺使用參考值解題的便利性。而從此單元的實踐歷程可看出，這樣的安排確能讓學生跳脫已僵化的算則思考，流暢地從不同的面向來思考數與運算。從後續進行的教學中更可發現學生使用參考值的次數漸多，有些學生甚至能同時取兩個參考值來解決加減運算問題。如學生在解決問題：「註冊需交 1596 元和 780 元，小翰準備 1500 元、小璋 2000 元、小孟 3000 元、小維 4000 元，誰準備的錢是夠的？」時，S22 能取 1600、700 作為 1596、780 的參考值進行估算：

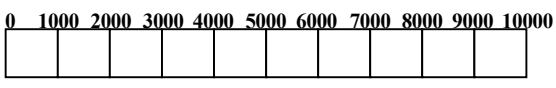
S22：我覺得 1500 元和 2000 元都不夠，其他人準備的都夠。

T：你怎麼判斷的？

S22：1596 再加 4 就變 1600 了。780 先想成 700 就好了，6（指 600）加 7（指 700）不就 1300 了，所以加起來就已經 2300。2000 跟 1500 都不夠。

到了整數乘法單元，由於多位數乘法心算不易，使用參考值的需求更為大增，如要求學生估算時，學生已大多能自動地運用參考值來解題，例如在估算「47 × 38」答案的合理範圍時，有學生能取 50 做為 47 的參考值進行估算，也有學生能同時取 50、40 作為 47、38 的參考值進行估算：

T:「47 × 38」的答案應該要落在哪個格子裡？S2 你說說看。



S2：1000 到 2000 之間。

T：你怎麼知道？

S2：我把 47 看做 50，50 乘以 38 就是…先算 5 乘以 38，就是五八四十，寫零進四，五三十五加四等於 190，1900，答案應該在 1000~2000 之間。

T：有沒有不同的想法？好，S8。

S8：我是把 47 看成 50，把 38 看成 40。50 乘以 40 就是…2000，所以在 1000 到 2000 中間。

T：這樣為什麼不選 2000 到 3000 這裡？

S8：因為我剛剛都有把它多算了，真正的答案應該沒有那麼多，所以應該不到 2000。

二、數感教學成效之探討

(一)學生數感能力之比較

表 5 呈現兩組學生數感能力測驗之平均數、標準差及相依樣本 t 檢定結果；表 6 呈現兩組學生數感能力後測之共變數分析結果。結果顯示教學後，只有實驗組學生的數感能力有顯著進步（實驗組：t = -8.199，p < .05；對照組：t = -0.523，p > .05）。將數感前測成績排除後（經組內迴歸係數同質性考驗後發現 F = 1.484，p = .228 > .05），結果也顯示教學後，實驗組的數感能力顯著地高於對照組（F = 33.362，p < .01）。由於對照組並無接受數感教學，有此結果正如意料之中；而相對地，此點也顯示了本研究所融入的數感教學對學生的數感能力確有提昇之效。

另外，由於數感是融入在正規的數學課程中，是否會影響學生的數學學習，因此我們也特別比較兩組學生在數學成就測驗的表現，但不比較實驗組學生在前後測的表現差異（因前後測試題內容涉及的整數教材並不同）。表 7 呈現兩組學生數學成就測驗前後測之平均數與標準差；表 8 呈現兩組後測成績之共變數分析結果。結果顯示前測時，實驗組的表現略遜於對照組，但教學後反高於對照組。將數學成就測驗前測成績排除後（經組內迴歸係數同質性考驗結果後發現 F =

表 5：兩組在數感能力前後測之相依樣本 t 檢定摘要表

項目	平均數	平均數的差	標準差	平均數的標準誤	t 值	顯著性（雙尾）
對照組前-對照組後	15.27-15.70	-0.42	4.66	.81	-0.523	.604
實驗組前-實驗組後	14.94-22.06	-7.12	5.06	.87	-8.199	.000*

表 6：兩組在數感能力測驗後測共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F 值	顯著性
組間（不同教學處理）	728.130	1	728.130	33.362	.000
組內（誤差）	1396.822	64	21.825		

表 7：兩次數學成就測驗成績之平均數和標準差

		數學成就測驗前測		數學成就測驗後測	
	人數	平均數	標準差	平均數	標準差
對照組	33	87.74	15.44	79.01	17.21
實驗組	34	84.94	16.17	83.43	15.27

表 8：兩組在數學成就測驗後測共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和	自由度	均方	F 值	顯著性
組間（不同教學法）	744.839	1	744.839	7.388	.008
組內（誤差）	6452.277	64	100.817		

0.766，$p = .385 > .05$），實驗組的後測成績顯著高於對照組（$F = 7.388$，$p = .008 < .01$）。由此結果可知，實驗組的教學中，原課程部分雖因融入數感教學而有所壓縮，卻並未因此影響學生數學學習之成效，甚至實驗組學生的表現比對照組還好。

(二)實驗組學生數感能力發展之探討

本研究分析實驗組學生在四個數感元素的發展情形。學生在前、後測的作答結果呈現於表 9。

由表 9 可知，前測時，學生在各數感元素的平均答對題數均不理想，在「分解或合成數以進行運算」與「使用參考值以便於解題」部分最差，只有三成。教學後，學生在四個數感元素的平均答對題數均有進步，且顯著高於前測（$t = -2.719$，$p = 0.01$；$t = -4.270$，$p = .000^*$；$t = -9.160$，$p = .000^*$），顯示數感教學有助於提升學生的數感能力。

為更進一步細究學生數感能力的發展情形，在教學前、中、後針對數感能力測驗筆試結果訪談不同程度的七名學生。將訪談樣本在各數感元素題的答題結果整理如表 10。

整體而言，每個程度訪談學生的數感在教學中和教學後都有所發展，尤以中程度的 Mh 和低程度的 Lm 進步最多。對數感高程度的學生而言，教學前其已相當了解位值概念、比大小、運算性質和運算對數的影響，

表 9：教學前後實驗組學生於各個數感元素的答題結果統計表

數感元素	平均答對題數（%）		平均數的差	標準差	t 值	顯著性（雙尾）
	前測	後測				
1.了解整數的位值概念與比較大小	4.65（66.4）	5.32（76.0）	-0.68	1.45	-2.719	.01*
2.了解運算性質與運算對數的影響	3.71（53.0）	5.00（71.4）	-1.29	1.77	-4.270	.000*
3.分解或合成數以進行運算 4.使用參考值以便於解題	6.59（32.9）	11.74（58.7）	-5.15	3.28	-9.160	.000*

表 10：訪談樣本在各個數感元素題的答題結果表

答對題數 / 數感元素	數感高程度						數感中程度									數感低程度					
	Hh			Hm			Mh			Mm			Ml			Lm			Ll		
	前	中	後	前	中	後	前	中	後	前	中	後	前	中	後	前	中	後	前	中	後
1.了解整數的位值概念與比大小（7）	5	6	6	6	7	7	5	7	7	5	5	6	4	5	3	4	6	7	2	4	5
2.了解運算性質與運算對數的影響（7）	6	6	7	6	6	6	3	4	6	4	6	7	5	6	6	1	5	7	0	1	3
3.分解或合成數以進行運算 4.使用參考值以便於解題（20）	13	15	15	10	13	17	8	13	18	7	10	16	8	11	17	5	10	17	3	4	6
總答對題數	24	27	28	22	26	30	16	24	31	16	21	29	17	22	26	10	21	31	5	9	14

在彈性使用數與運算來解題的能力上較弱，教學中已有不錯的提昇。對數感中程度的學生而言，Mh 與 Mm 的表現較為一致，兩人在教學前均已相當了解位值概念和比大小，其他表現則較差，但在教學中、後各方面能力均已逐漸提升。至於 Ml，教學前各方面表現均不佳，教學後也只有在應用數與運算來解題的能力上有較佳的表現。對數感低程度的學生而言，教學前各方面表現均很差，不過在教學中、後也已逐漸進步。基於篇幅，本文僅以三名不同數感程度的學生（Hm, Mm, Lm）為例，說明其在教學前、中、後數感能力的發展情形。

1.數感高程度學生 Hm 數感能力的發展

在了解整數位值概念與比大小方面，教學前，Hm 在數量多少的感覺上表現不理想。Hm 雖能感覺教室可容納的小朋友數量、書包可容納的書本數量以及嘴巴可塞進的巧克力數量，但較無法掌握手可抓起的米數量，只直覺地認為 150 很大，所以一隻手沒有辦法抓起 150 顆米，顯見其可能較無法感覺體積較小的物體數量：

Hm：我覺得一隻手應該沒有辦法抓起 150 顆米；一間普通的教室大概只能裝 80 個小朋友。一個普通的書包，我們的數學課本大概這麼厚，大概只可以裝 15 本

而已。然後，我們的嘴巴大概 50 顆 MM 巧克力就塞不下了。

R：為什麼一隻手沒有辦法抓 150 顆米？

Hm：因為 150 看起來很大，我就感覺應該不行。

但在教學中，Hm 已會想到以另外一物—湯匙做為參照標準來感覺數量多少，姑且不輪 Hm 是否真能掌握一湯匙的量，但至少 Hm 已能企圖找出一個參照標準來進行判斷：

Hm：因為社會老師上課講過，她要求他兒子一天要吃一百粒米，老師說一百粒米大概一湯匙，所以我就覺得手應該可以抓起 150 顆米沒問題。

在了解運算性質與運算對數的影響方面，一直到教學中，Hm 仍無法掌握除法運算對數的影響。Hm 以為被除數或除數較大者，商就會比較大，因而覺得 2688 ÷ 560 和 26880 ÷ 560 的答案都會比 2688 ÷ 56 的大：

Hm：因為 2688 ÷ 56 = 48，然後要找比 48 大的。因為第一個 560 比 56 多一個 0，所以我覺得會比較大，第二個的 51（指選項②2688 ÷ 51）比 56 小，所以我覺得會比較小。然後第三個是 2000（指選項③2000÷ 56），它是 2688，所以也會比較小。但是第四個是 26880 ÷ 560，比 2688 多一個 0，也比 56 多一個 0，所以答案應該也會比 48 大。

但在教學後，Hm 已能自行透過「分東西」的情境來思考被除數和除數改變後商的變化，原先認為除數變大，商也會變大的想法已破除。但對於被除數、除數同時等倍增加後商的變化仍無法掌握：

Hm：2688 如果除以 560 的話，答案會變小。因為同樣多的東西要分給比較多的人，每個人拿到的就會變少。所以第二個答案就會變大，因為它只有除以 51 而已。

R：那你為什麼為選④呢？

Hm：因為 4 的這個，兩個（指被除數、除數）都變大了，然後它的東西（指 26880）很多，所以分起來應該還是會比較多一點，也是會比 48 大。

在分解或合成數以便於運算方面，Hm 在教學前便常將數分解成幾百，幾十來進行心算，可說是已具備了此數感能力。在使用參考值以解題方面，Hm 在教學前並沒有使用此策略的情形，對於估算問題，多憑直覺猜測答案或認為一定要用紙筆計算才能解題。例如，在比較兩家店誰賣的巧克力比較便宜時（家家福商店 4 包賣 299 元，樂樂商店 12 包巧克力賣 799 元），Hm 起初嘗試在心裡計算，因不易操作思考而失敗：

Hm：要用紙筆算家家福一包要多少錢，和樂樂的一包多少錢，這樣才能知道誰比較便宜。

R：如果不要用紙筆算，你不能在心裡算出來嗎？

Hm：我有在心裡想過，可是會亂掉，算出前面，後面就會忘記了。

R：你怎麼想的？可不可以把你想的說出來？

Hm：就是 299 在裡面，4 在外面，然後四六二十四，29 減 24 會剩 5，然後…就是…啊，就會亂了。

R：什麼叫做「299 在裡面，4 在外面」？

Hm：就是像在寫直式那樣。

教學中，Hm 使用參考值解題的能力仍沒有明顯的進步。不過教學後，Hm 使用參考值來解題的次數增多，顯見 Hm 已能彈性地使用參考值來解題，例如：

Hm：我把 299 當作 300，300 × 3 就 900 了，也就是家家福 12 包要 900 元，所以當然是樂樂商店比較便宜。

2.數感中程度學生 Mm 數感能力的發展

在了解整數位值概念與比大小方面，教學前，Mm 較無法掌握數量多少的比較。在

比較兩校近視情形誰較嚴重時（十美國小共有 896 人，近視的有 512 人；愛仁國小全校有 2212 人，近視的也是 512 人），Mm 直覺地認為學校人數多，近視的一定比較多，他完全忽視題目所透露的近視人數訊息，只憑個人的觀感來選擇答案：

Mm：因為我覺得比較多人，近視人數就會比較多，一般都是這樣。

R：喔！你是用你的常識來判斷的，對嗎？

Mm：對啊。

教學中，Mm 已跳脫個人觀感，掌握題目提供的訊息來解題，不過仍無法掌握情境中數量多少的比較，而以近視的人數來比較近視情形的嚴重性：

Mm：近視就是這邊的啊！（指表中的近視人數）近視就是 512，這邊也是 512，因為近視人數一樣，所以我覺得兩個學校都一樣，沒有誰比較嚴重。

R：那表裡面這一列（指全校人數一列），全校人數要不要管它？

Mm：（看了一下）不用！因為它問近視的，所以只要看近視的就好了。

不過，教學後，Mm 已能察覺全校人數與近視人數的關係，進而比較出近視的嚴重性，顯見教學後 Mm 已較能感覺出數大小比較的意義，數感可說是有所提升：

Mm：愛仁國小有二千多人近視的才 512 人，不到一半；十美國小才八百多人，近視的就 512 人，就超過一半了，所以十美國小的比較嚴重。

在了解運算性質與運算對數的影響方面，一直到教學中，Mm 仍無法掌握被乘數不變，乘數改變後積的變化，他認為乘數增加 1 後，積也會增加 1：

Mm：題目說 $85 \times 35 = 2975$，因為 36 比 35 多 1，所以 85×36 答案也會多 1。

R：為什麼 36 比 35 多 1，所以答案會多 1？

Mm：（沈默）我不會說。

教學後，Mm 已能利用其對乘法意義的理解，察覺乘數多 1 時，積的變化：

Mm：85×35 就是有 35 個 85，85×36 就是有 36 個 85，差了一個 85，所以答案會是 2975 加 85。

在分解或合成數以便於運算與使用參考值以解題方面，教學前，Mm 對於心算和估算的題目，多憑直覺猜測，例如心算 389 和 199 的和最接近何數時，會覺得這兩個數字都很大，所以選擇最大的答案，顯見 Mm 不善於應用其對整數的了解來做有效的估算或運算：

Mm：我覺得這些數字都很大，加起來應該很多，所以我就選擇最大的。

R：那你有沒有真正去心算，真正去加起來？

Mm：沒有。我就覺得這些數字都很大，所以我就選擇最大的答案。

教學中，Mm 分解或合成數以解題的次數增多，例如在上述題目中，能分解 389 和 199 為整百的和整十的，再進行合成，不過，仍沒有使用參考值解題的跡象。顯見對 Mm 而言，在分解合成數以便於運算上的發展似乎較使用參考值上來的快：

Mm：因為 $300 + 100$ 等於 400，第一個就不可能了。$80 + 90$ 等於一百多，400 加一百多就五百多，第二個也不可能。$9 + 9$ 只有十幾，三個加起來大概只有五百多，所以我覺得是 600。

教學後，Mm 仍常使用分解或合成數的策略，不過也已有多次使用到參考值來解題，顯見其在後者也有不錯的發展。例如，在找出 11、19、289 和 241 中相除最接近 12 的兩數時，Mm 會將這四個數各取參考值後再進行心算：

Mm：因為我把 241 想成 240，把 19 想成 20，$240 \div 20$，先用 $20 \times 10 = 200$，還有剩

下的，那 20 × 2 = 40，200 + 40 = 240，這樣就是 12 了。

3.數感低程度學生 Lm 數感能力的發展

在了解整數位值概念與比大小方面，教學前，Lm 無法掌握情境中數量的多少，對整數位值概念的了解也不夠清楚。例如，他雖知道越左邊的數字所在的位值會越大，卻忽略了「0」所在的位值會變成零，所排成的數就不是四位數：

Lm：最小的 0 要放前面，最大的放後面，這樣（指 0256）是最小的數。

R：這樣（指 0256）是四位數嗎？

Lm：對！

R：你覺得什麼是四位數？

Lm：像這樣有四個數字（指 0256）就是。

但在教學中，Lm 已能察覺「0」的影響，進而排出正確的四位數：

Lm：最小的 0 本來要放前面，但放最前面以後，就沒有了，就沒有千位了。所以要把第二小的 2，寫在最前面。接著寫 0、5、6，這樣（指 2056）是最小的數了。

R：這樣（指 2056）是四位數嗎？

Lm：對！

R：你覺得什麼是四位數？

Lm：像這樣有四個數字（指 2056）就是。

R：那 0256 是四位數嗎？

Lm：不是，那就是 256 了，是三位數才對。

在了解運算性質與運算對數的影響方面，教學前，不經計算，Lm 無法直接比較多個乘式的結果；也無法直接比較乘式和連加算式結果的大小。對於被乘（除）數、乘（除）數改變後結果的變化也不清楚。Lm 多採直覺猜測的方式選擇答案，顯見其在此方面數感能力的貧乏。例如，在比較「73 × 5」和「72 + 73 + 74 + 75 + 76」答案大小時，會直覺地認定乘法算出來的答案應該會比加法大：

Lm：乘的算出來通常好像會比加的還要大，所以我覺得 73 乘以 5 會比較大。

又如在比較「18 × 17」、「16 × 18」、「17 × 19」答案大小時，會認為 19 是其中最大的數，所以「17 × 19」的答案會最大：

Lm：我覺得最大的是「17 × 19」。因為它有 19，19 是這些數字（指所有選項）裡面最大的。

教學中，Lm 在這方面的數感已略有進步，例如，能透過將乘式「73 × 5」轉換成等價的連加算式「73 + 73 + 73 + 73 + 73」，以便於直接和「72 + 73 + 74 + 75 + 76」比大小：

Lm：因為 73 乘以 5，那這邊是 72 加 73 加 74 加 75 加 76，我覺得這邊（指 72 + 73 + 74 + 75 + 76）比較大。

R：為什麼？

Lm：我把這些（指 72 + 73 + 74 + 75 + 76）都先看做 70。那就有 5 個 70。但我們都把它變小了，所以還要再加回來 2、3、4、5、6。這邊（指 73 × 5）的 73 也看成 70，那也是 70 乘以 5，但少加了 5 個 3。那剛才只有 2 比 3 小，其它都比 3 大，所以加起來的就比較大。

R：你是說誰比誰大？

Lm：就是 2 加 3 加 4 加 5 加 6 比 3 乘以 5 大。

R：喔！所以整個來看是……

Lm：是這個（指 72 + 73 + 74 + 75 + 76）比較大。

至於了解運算對數的影響方面，直至教學後，Lm 才堪稱具備。例如原本在教學中還認為被除數和除數都大，商數就較大，教學後已能察覺被除數不變，除數越小，商數就會越大：

Lm：因為 2688 去除以 51，然後東西指 2000 ÷ 56 的 2000，雖然比 2688 少，但分給比較少的人所以答案會比 48 大。

R：那這一個也是比 48 大嗎？

Lm：小。

R：為什麼覺得小？

Lm：因為有這麼多的東西，分給 51 個人，每個人的東西會比較多。

R：那③呢？

Lm：少。

R：為什麼呢？

Lm：因為東西比較少，分給這些 56，所以答案會比 48 小。

在分解或合成數以便於運算與使用參考值以解題方面，教學前，Lm 對於心算和估算題，多採猜測的方式填答，顯見學生無法解決心算、估算這類需將數做靈活運用的問題，例如在估算 45 × 105 的值時，會直覺地認為多位數乘法的答案應該很大，所以選擇最大的答案：

Lm：乘起來很大，所以我選 6500。

R：為什麼你會覺得乘起來會很大？

Lm：因為想這種很多數字（指 105 和 45）的乘起來應該都很大。

不過，在教學中，Lm 已能使用參考值、分解或合成數的方式來解題。如上述題目，學生會將 105 先看做 100，45 先看做 50，相乘後再取較接近的值：

Lm：我想要把這個（105）想成 100，45 想成 50，然後 50 去乘以 100，就……5000，所以我覺得比較接近②4600。

R：為什麼不選 5200？

Lm：因為這樣就又比 5000 多，我剛已經把 45 想做 50，就已經變多了，所以 5200 太多了。

伍、結論與建議

一、結論

本研究以準實驗研究法來探討數感融入現行四年級數學科課程之實踐情形與成效。以下就教學實踐歷程與教學成效兩部分提出結論：

(一)數感融入數學科教學之實踐歷程

本研究在既有的數學課程中，透過「生活布題」、「估測估算活動」、「遊戲」與「數學日記」的方式將數感融入。經過教學實踐後發現，這些教學方式皆能提供學生一個有利於探索數與運算的情境，以幫助學生發展數感。透過生活布題的方式，學生對解題產生高度興趣，進而能主動地去探索數的大小和數與運算間的關係。由於是來自真實生活的問題，對學生而言，所進行的學習與所得的答案是有意義，學生也較易察覺答案的合理性。這樣的結果正呼應了 Thornton 和 Tucker（1989）所述，設計與真實生活經驗相結合的課程可發展學生的數感。而這樣的布題同時能提醒學生去反思數的大小與合理性，也呼應了支毅君（1997）所強調的論點。透過估測估算活動，學生必需思索如何不用紙筆計算以求出大概的答案，在教師刻意以接近整十的數來布題的情況下，學生也較易察覺到以參考值解題的便利性，並能逐漸擺脫紙筆計算，以參考值解決估算問題。在一些研究中都可見到類似的結果（楊德清，2002; Hope, 1989; Markovits & Sowder, 1994）。透過遊戲的方式，學生有強烈的解題意願，且自然而然地拋開紙筆計算的束縛，進而從數與數的關係來了解運算對數的影響，並發展出彈性的解題策略。這樣的結果正可支持 Kamii（1994/2001）的論點，藉由遊戲可進行數感教學。透過數學日記，學生被鼓勵每天去思考如何將一數分解或如何將該數與他數合成整十（百）的數，點滴養成的結果，學生使用的方式不但愈來愈多樣化，甚至能視實際需要將數分解成不同的方式以利解題。誠如 Markovits 和 Sowder（1994）所指，

教師要多提供學生探索數的機會，學生的數感才能有不錯的發展，本研究以數學日記的方式提供學生探索數的機會，的確也獲致了不錯的結果。

此外，在實踐的歷程中，研究者與實驗組教師也發現，學生相當依賴算則，在不用紙筆計算的情況下，即使常因運思不流暢而出錯，學生仍會在心裡使用算則，甚至放棄解題，楊德清（2000a）和楊德清等人（2002）的研究中也有類似的發現。本研究利用一些特別設計的估測估算活動、生活布題和遊戲方式，促使數感能力較佳的學生利用數感解題，再透過師生間溝通和討論，讓數感能力較差的學生受到影響也能自行發展出彈性解題的策略。經過三個教學單元的教學，學生較能擺脫算則的束縛，而能從數與數，數與運算之關係等層面來思考計算，不論是估算或心算能力都大有進步。

(二)數感教學之成效

本研究從學生數感能力的表現和其發展情形來探討數感教學的成效。結果發現，教學後實驗組學生的數感能力不但有顯著進步，且顯著優於對照組學生，而在數學學習表現上也顯著優於對照組學生，顯見數感教學能提升學生的數感，且這樣的教學設計也未因壓縮了原課程而對學生的學習有不良的影響表現，甚至實驗組學生的表現比對照組還好。教學前、中、後的訪談結果顯示，不同程度的學生之數感能力在教學中均有發展。其中，兩名高程度學生原本在教學前較缺乏使用參考值以便於解題的數感能力，但在教學中期已大有提升。三名中程度學生教學前只有在分解或合成數以進行運算的數感能力略佳，其他均不理想，但教學後，只有其中的低數學成就學生在了解整數的位值概念與比大小方面的能力仍未提昇。值得一提的是，教學中，三名學生使用參考值以便於解題的能力仍十分不理想，直到教學後才有較佳的表現，顯見此方面數感能力對數感中程度的學生而言，可能需較長時間的培養。至於兩名低程度學生，教學前在各方面數感能力均十分地差，但教學後，其中的中數學成就學生在各方面的數感能力都已提升，由此可知，數感教學對於數感低程度的學生而言，也是有所幫助。

二、建議

本研究提出的數感融入現行課程之教學設計，並未利用額外的時間單就數感元素進行教學，本研究結果顯示這樣的教學對學生數感的提升是有幫助的。在此建議教師亦可在既有的數學課程中依循以下方式將數感融入：

1. 藉由課本或真實生活問題適時地強調數概念與運算的意義。
2. 藉由簡單且略具挑戰性的活動或遊戲激發學生將所學的數概念應用出來。
3. 藉由不利於算則計算的情境促使學生應用對數與運算的了解來解題。
4. 藉由討論與分享讓學生從同儕中學習多元的解題策略。
5. 藉由數學課與學校生活有關的事件隨時隨地培養學生的數感。

此外，雖然九年一貫課程綱要中（教育部, 2003），培養學生流暢的數字感已被列為國小階段的課程目標之一，但在綱要中並未見有明確的能力指標和具體的教學說明與其對應。本研究所進行的數感教學，是在與數和運算有關的單元中融入數感，讓學生在學習數概念與計算的同時，也發展出不錯的數感。本研究結果或許可以拋磚引玉，為培養學生流暢的數字感提供一些參考，也可以為教科書編輯者與其他數學課程設計者提供一些未來的建議：在數與量主題下的課程中，

明確點出培養學生數感能力的教學目標，並設計一些可培養學生數感能力的活動，使數感教學能被落實與重視。最後，由於本研究是以四年級學生為對象進行整數數感教學，未來研究可以不同年級為對象進行研究或進一步探討有理數數感教學之可行性與效益。

參考文獻

1. 支毅君（1997）：我國國小三年級數感教學研究。**台東師院學報**, **8**, 83-116。
2. 教育部（2003）：**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北市：教育部。
3. 許清陽、楊德清和李茂能（2001）：國小高年級學童數字常識評定量表編製之研究。**科學教育學刊**, **9**(4), 351-374。
4. 楊德清（1997）：數學教育中目前大眾所關切之一個主題－數字常識。**科學教育月刊**, **200**, 12-18。
5. 楊德清（1998）：筆算能力與數字常識表現之差異性的探討。**科學教育月刊**, **212**, 3-10。
6. 楊德清（2000a）：國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法。**科學教育學刊**, **8**(4), 379-394。
7. 楊德清（2000b）：數字常識與筆算能力。**教師之友**, **41**(2), 30-35。
8. 楊德清（2002）：從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識之研究。**科學教育學刊**, **10**(3), 233-259。
9. 楊德清、黃芳玉和林美如（2002）：國小五年級學生數字常識能力之個案研究。**國教天地**, **150**, 16-23。
10. 劉琪玲（2002）：**數感動態評量融入數學科教學之行動研究**。國立台南師範學院碩士論文（未出版）。
11. Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
12. Behr, M. (1989). Reflections on the conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 85-88). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
13. Bobis, J. F. (1991). Using calculator to develop number sense. *Arithmetic Teacher*, *38*, 42-45.
14. Gagne, E. D., Yekovich, C. W., & Yekovich, F. R. (1998). **教學心理學 — 學習的認知基礎**。（岳修平譯）。台北：遠流。（英文版出版於 1993）。
15. Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 12-16.
16. Hopkins, L. (1995). Popping up number sense. *Teaching Children Mathematics*, *2*(2), 82-86.
17. Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 6-11.
18. Kamii, C. (2001). **重新建構孩子的數學能力**。（陳燕珍譯）。台北縣：光佑。（英文版出版於 1994）。
19. Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4-29.
20. McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examing basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*, 2-8.
21. McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J., & Farrel, B. (1997). Number sense in school mathematics: Student performance in four countries. Perth, WA: Mathematics, Science, & Technology Education Centre, Edith Cowan University.

22. Nation Research Council (1989). Everybody Counts: A report to the nation on the future of mathematics education. Washington, DC: National Academy Press.
23. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
24. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
25. Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder & Schappelle, B. P. (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
26. Reys, B. J (Eds.) (1991). Developing number sense in the middle grades. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.
27. Reys, R. E., Reys, B. J., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., & Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan and the United States. *School Science and Mathematics*, *99*(2), 61-70.
28. Reys, R. E., & Yang, D. Y. (1998). Relationship Between Computational Performance and Number Sense Among Sixth- and Eight-Grade Students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 225-237.
29. Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
30. Thornton, C. A., & Tucker, S. C. (1989). Lesson planning: The key to developing number sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 18-21.

附錄　數感教學設計舉隅

(一)「生活布題」方式

整數乘法單元		
教學內容及佈題	數感教學過程	對應數感元素
解決「一、二位數 × 整十倍」的問題 ■牛奶一盒 12 元，訂購一期 20 天，要繳多少錢？ ■羊奶一盒 22 元，訂購一期 20 天，要繳多少錢？	（以下代碼「T」表教師之提問） *T：先不要計算，想想看，12 × 20，和 22 × 20 的答案有什麼關係？可不可以由 12 × 20 求得 22 × 20 的答案？ *學生發表想法，並說明理由。 *教師透過矩陣說明乘法運算中，被乘數改變後，結果的變化。	了解運算性質與運算對數的影響

(二)「估測估算活動」方式

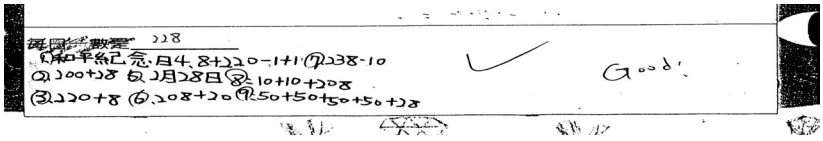
整數四則運算單元		
教學內容及佈題	數感教學過程	對應數感元素
解決「乘除混合型」的二步驟問題 ■一包中性筆有 10 枝，特價 68 元，200 元可以買幾包？ （由於在統計圖表單元發現，學生相當缺乏估算的能力，因此在此單元特以較簡單的數來布題。）	*T：不要計算，想想看 200 元可以買幾包？ *學生發表想法並說明理由。學生可能想法如下： 1.兩包。心算 68 × 2 = 136，68 × 3 = 204，3 包就超過 200 了。 *T：但有些同學在心裡算很容易會亂掉，有沒有其他方法？ 2.三包。把 68 元看做 65 元，65 × 2 = 130，65 × 3 = 195。 3.兩包。把 68 元看做 70 元，70 × 3 = 210，就超過 200 了。 *T：把 68 元看做 65 元還是 70 元比較適當呢？實際算算看，再想想為什麼把 68 元看做 65 元不適當。 *討論使用參考值以進行估算的便利性以及如何選擇適當的參考值。	使用參考值以便於解題

(三)「遊戲」方式

<table>
<tr><td colspan="3">整數四則運算單元</td></tr>
<tr><td>教學內容及佈題</td><td>數感教學過程</td><td>對應數感元素</td></tr>
<tr><td>進行「乘法空格填數字比大小」的遊戲
■兩隊依序抽取數字卡（0~9），並自行決定擺放在如下空格內：
□□
× □□
■配合「落葉歸根」掛圖，估算算式乘積並寫在遊戲紀錄單上。
落葉歸根掛圖：
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000
代表答案的葉子：</td><td>*T：不要用紙筆計算，想想看，你們那一隊的答案大約是多少，應該落在哪一個盒子裡呢？</td><td>分解或合成數以便於運算
使用參考值以便於解題</td></tr>
</table>

(四)「數學日記」方式

每日一數



數字樹



A Study of Integrating Number Sense into Mathematical Instruction in the Fourth Grade

Man-Li Liu[1] and Sue-Fen Hou[2]

[1]Graduate Institute of Mathematics and Science Education,
National Pingtung University of Education
[2]Shih Chuan Elementary School in Kaohsiung

Abstract

The purpose of this study was to investigate the practice and the effect of integrating number sense into mathematical instruction in the fourth grade. Four components of number sense were included (1)ability to understand the place value and magnitude of numbers, (2)ability to understand mathematical properties and effects of operations, (3)ability to operate numbers by decomposing or recomposing, and (4)ability to operate with benchmarks were applied during solving mathematical problems. The study was a quasi-experimental design with 68 students from 2 classes, one as the experimental group and one as the control group. Data were collected from videotapes, students' work sheets, written tests and interviews. The results revealed that the experimental group students' performance was significantly better not only in number sense ability but also mathematics achievement than the control group students'. In addition, different levels of students' number sense ability was improved, particularly using benchmarks flexibly and effectively.

Key words: Benchmark, The Fourth Grades, Number Sense, Mathematics Instruction