科學教育學刊
2007, 第十五卷第四期, 357-385

Chinese Journal of Science Education
2007, 15(4), 357-385

傳統中算家論證的個案研究[1]

洪萬生
國立台灣師範大學 數學系

（投稿日期：民國 95 年 7 月 26 日，修訂日期：96 年 1 月 26 日，接受日期：96 年 3 月 21 日）

摘要：本文首先簡要評論《華人如何學習數學》，並結合有關數學史與數學教學的研究成果，從中析出可供對比傳統中算家論證的概念，然後，再據以分析劉徽、徐光啟、梅文鼎與李善蘭的幾個論證個案。至於研究方法，則採用歷史文獻分析法與比較史學方法，在一方面，對比劉徽和歐幾里得、劉徽和阿基米德，與劉徽和海龍，以掌握劉徽所代表的中算「固有的」論證特色。另一方面，考察徐光啟、梅文鼎與李善蘭如何呈現他們各自會通中西的論證特色。梅文鼎與李善蘭都為海龍公式提供了證明，尤其是我們進行中西對比的極佳切入點。綜合本文的論述，我們發現：劉徽、徐光啟與梅文鼎的論證，都包括了「程序性（算則）– 程序性（算則）」、「程序性（算則）– 概念性（含命題）」，以及「概念性（含命題）– 概念性（含命題）」等知識連結。不過，劉徽的「連結」方式多元，概念結構層次分明，而徐光啟與梅文鼎的論證，在作圖題上表現的「概念性 – 概念性」連結的邏輯缺陷，暴露了中算「辭圖並用」之限制。至於李善蘭的證明海龍公式，則企圖從「特定的」圖形解放，他針對正五邊形作圖及其證明時，則完全符合歐幾里得的證明規範，亦即：完全以「概念性（含命題）– 概念性（含命題）」之連結為主。

關鍵詞：中算家、程序性知識、論證、概念性知識、辭圖並用

壹、前　言

二十世紀初以來，歷史文化學者考察中西文化及其互異風格時，大都無暇追溯中西文化在 1600-1900 年之間的「具體」遭遇與衝突，甚至於也從未「貼近」譬如徐光啟（1562-1633）、梅文鼎（1633-1721）或李善蘭（1811-1882）等人的算學心靈，理解他們如何利用傳統中算以消納西算，無怪乎我們很難在他們的文化（史）論述基礎上，提升我們對華人認知特性的瞭解。

其實，上述這些數學家在遭遇西算時，都努力促進中算與西算的對話。在依違折衷的過程中，他們如何理解並進一部融合西算，或多或少凸顯了傳統中算的特色。如果我們將這一「凸顯」放在譬如劉徽為《九章算術》作注（263 AD）的脈絡中，甚至結合劉徽與歐幾里得（Euclid）、或阿基米德（Archimedes）以及海龍（Heron）在論證進路方

面的對比，那麼，我們對於今日華人如何學習數學乃至於如何思維，[2] 一定可以找到更好的視角才是。

有關華人如何思維，中村元的《中國人的思維方法》（1995），當然給了我們非常深刻的啟發，不過，那是將近六十年前之著作，同時，他的研究範圍未曾納入古代算書。[3] 近年，陳榮灼對《墨辯》與公孫龍的思維方式，作了一些有意義的澄清，可惜，他的研究對象，也不及於古代算書之論述方式。[4] 所幸，過去 20 年來有關劉徽論證的全面性研究（尤其是郭書春的貢獻）（郭書春, 1995），極有助於我們結合數學史與數學教學的研究進路。[5] 然而，儘管史家相關貢獻卓著，他們的論述並不涵蓋教育研究之關懷。[6] 再者，綜合二十年來數學教育的相關研究成果來看，那一些夸夸其談的文化論述，根本無助於我們建立可以操作的教學研究實驗，以理解中、小學生如何進行思考與論證。因此，我們必須鼓勵學者反過來，從最「小處」的數學學習研究做起，尋找或確認一些切入點，以便允許我們探索數學理性的「在地」意義，從而豐富我們對於數學知識與華人文化傳統之關連的思考。

現在，由於《華人如何學習數學》（范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編, 2005）的問世（英文版 *How Chinese Learn Mathematics*, 2004），我們終於有一個可以累積相關研究的起點了。此書有多篇論文涉及華人的數學學習或認知特性，為我們澄清了一些問題，譬如華人學習所經歷的四個階段－記住、理解、運用，以及質疑和修改－之文化意義，乃至於數學教學所習慣採用的策略。筆者將在本文第貳節中，簡要介紹本書之相關內容。本書中所載的黃毅英（Wong Ngai-Ying）論文〈儒家文化圈（CHC）學習者的現象 – 對數學教育的影響〉，則頗有總結的意義，他從具體的「藝術」如書法，武術與篆刻之學習體驗中，探索華人如何在 CHC 的脈絡中的進行學習，可以說為我們的進一步研究，找到了一個可運用的切入點。不過，論及數學學習，或者更一般的華人的學習模式，傳統中國數學家或一般學者如何就數學問題進行思考或論證，倒是在華人學界中甚少得到應有的關注。[7] 有鑑於此，在本文中，筆者將依據一些我自己相關的研究成果（洪萬生, 2003, 2005a, 2005b, Horng, 2000a, 2000b, 2001a, 2001b），結合數學史與數學教學關連（HPM）的進路，以便探索傳統中算家如何進行論證，[8] 從而為我們未來研究華人如何學習或思考（數學），提供幾個可供解釋或預測的參考座標。

有關本文之結構，茲說明如下。第貳節文獻探討對象，主要針對《華人如何學習數學》一書中的相關論文。[9] 這當然解釋了本文的論述之針對數學教育脈絡。或許在這些實徵的（比較）數學教育研究結果的映照下，我們得以發掘古代數學文本所透顯的數學認知特性。因此，我們在第參節中，將運用比較史學的方法，將劉徽分別對比歐幾里得、阿基米德與海龍，以便掌握劉徽論證之特色。這是中國古代數學「固有的」內容，同時也最具論證特色，至於其中、西對比，則是我們刻意運用的研究策略。另一方面，在本文第肆節中，我們將考察 1600-1900 年間的幾位主要數學家，如徐光啟、梅文鼎與李善蘭，如何在遭遇西算挑戰的脈絡中，為我們凸顯了中算的論證特色。後者這種中、西算的對比，可以就一個自然形成的歷史環境來考察，因此，我們的歷史觀察當然顯得更加真實（authentic）。其中，梅文鼎與李善蘭都為海龍公式提供了證明，尤其是我們進行中西、對比的最佳切入點，因此，海龍公式的幾個證明版本之討論，遂成為本文第肆節

的主題。[10]

根據我們針對劉徽、徐光啟、梅文鼎，以及李善蘭的論證之研究，我們將在本文第伍節「結論」中，試圖刻畫傳統中國數學家的論證特色，亦即知識的連結（connection），包括了「程序性 – 程序性」、「程序性 – 概念性」，以及「概念性 – 概念性」。目前有關華人如何有效教授與學習數學的策略，大概都離不開這三連結，只是它們究竟是三個面向（aspect）或層次（level），則有待進一步研究了。

貳、文獻探討

數學知識中有關程序性面向和概念性面向的對比，是數學教育研究中一項重要的成果。它是筆者研究中國古代數學思考或論證時，一個適當有用的分析工具。同時，本文所據以論述的二手文獻（包括筆者自己的著述）都參考了這一分類，所以，在本節中，我們先簡要地介紹數學知識的這兩個面向，以及由此而引伸出來的過程性變式與概念性變式。以此為基礎，筆者再評論黃毅英有關儒家文化圈之研究，以及《華人如何學習數學》一書中的其他相關結果。總之，此處所介紹或評論之文獻，只限於有實徵基礎的數學教育論文，至於其他文化論述，則只好暫時割愛了。

所謂「程序性知識」（procedural knowledge），「是由數學的形式語言、或符號表徵系統所組成，其教學成效之考察，則在要求學習者在一個可接受的「形式」中，對於文字符號及其文法規約操作是否熟練與覺察。」另一方面，「它包括了完成數學作業所使用的算則或法則，也就是說，程序性知識是依據一種執行步驟的指示之組合，教導吾人作業如何完成。其特徵是一種預先決定的線性序列之操作。正因為如此，程序性知識有別於其他的形式知識。」[11] 由此可見，數學史家喜歡運用「算則」（algorithm）概念來刻劃傳統數學的一些特色或風格，或者利用 “heuristic” 來解讀「術曰」中的「術」，都可以收納到這一個「程序性知識」的範疇之中。還有，純就「幾何作圖」（geometric construction）的觀點來看，歐幾里得《幾何原本》第一卷的第一題「于有界直線上，求立平邊三角形」之證明前半部「法曰」，也是程序性知識，只不過在後半部的「論曰」中，[12] 歐幾里得連結了定義（definitions），設準（「求作」，postulates）與公理（「公論」，common notions），[13] 以是當然是另一類面向的數學知識了。

至於在數學知識中需要對概念進行連結的面向，我們就稱作「概念性知識」（conceptual knowledge）：「概念性知識可以清楚地刻劃成為富有關係（式）的知識。這些關係（式）散佈在個別的事實與命題之中，以致於它們都關聯成為一個網絡。事實上，概念知識的一個單位，絕不可能是孤立的資訊片段；按定義，一個資訊片段只有在它的擁有者認識到它與其他片段的關係時，才有可能是概念知識的一部份。」[14] 其中資訊片段當然包括了程序性知識，譬如有一個九歲女孩，在體認到她所記得的「算則」與每一位數的「位值」之知識有所關連時，才「了解」多位數減法的意義。[15] 另一方面，在中算史上，劉徽注《九章算術》時具體實踐的「事類相推，各有所歸，故枝條雖分而同本幹知，發其一端而已」，譬如邏輯地連結「長方形」（方田）與「三角形」（圭田）兩者的面積（公式）之關係，也是有關「概念性知識」的最佳例證之一。[16] 然則如何區別這兩種面向之知識呢？請參考大學入學考試中心（2001, pp. 4-5）。

在上一段中，筆者試著利用數學史例證，說明數學史與數學教育這兩個領域的可能連結。這兩個領域的確可以互惠，國際 HPM 同行的很多論述都提供了充分的佐證或示範。（Bergren, 1990; Fauvel & van Maanen, 2000）事實上，本文的主要內容，正是綜合筆者的多篇相關研究成果而成。（洪萬生, 1994, 2000a, 2000b, 2003, 2005a, 2005b; Horng, 2000a, 2000b, 2001a, 20001b）。此外，顧泠沅、黃榮金與費蘭倫斯・馬頓（Ference Marton）顯然依據 James Hiebert, Anna Sfard 有關數學知識（活動）的程序性和概念性之對比，提出「概念性變式」與「過程性變式」。[17] 同時，他們也「基於對中國數學教學實踐和實驗的分析所獲得的兩種變式，可以從某些西方理論中找到支撐和解釋。」[18] 儘管他們的研究成果與本文題旨並不直接相干，然而，由於他們是在「華人如何學習數學」的提問脈絡下進行論述，因此，所謂的「變式教學」（teaching with variation）就成為他們刻劃「促進有效的數學學習的中國方式」之指標了。

這種「變式」被黃毅英認為是「「基本技能」與「過程能力」的橋樑」。（黃毅英, 2005）他贊同「學習者是由「識別」並注意現象的各方面來經歷種種現象。」（黃毅英, 2005）既然如此，而且「只有透過變化才能引起對現象的「識別」，那麼通過有系統地引入變化的反覆練習是導向學習與理解的關鍵。」（黃毅英, 2005）將此一理論引進數學的教與學之解析當中，黃毅英為宋儒朱熹的讀書方法，找到了現代化的價值與意義。更重要的，他針對「儒家文化圈」（Confucian heritage culture, CHC）有關書法、武術與篆刻學習之研究，幫助他體認「儒家文化富含有助深層理解的文化潛力。」[19]

《華人如何學習數學》還有下列幾篇論文與本文題旨有關：[20]

1. 蔡金法和維克多・西弗賴利（Victor Cifarelli）（2005），〈中國學習者的數學思維特徵 – 一個跨國比較研究的視角〉。它的結論是「識別」出中國學習者數學思維的六個特徵，不過，看起來多半呼應了中國教師的教學特色。此外，作者也未將此一結論與華人文化脈絡連結。
2. 蕭文強（2005），〈中國古代官學數學課程：考生是怎樣學習和準備考試的？〉。在此文中，作者「運用「間接證據」重新建構了一些問題，亦在提出另一種與傳統觀念不同的觀點，以表明中國古代的數學學習並非是應試的和死記硬背的。」值得注意的，作者所謂的「間接證據」則取自《九章算術》卷五的第 17 題有關「羨除」的體積公式，以及劉徽的註解。他的目的，顯然是為了說明《新唐書》對於「明算科」試題規範 –「錄大義本條為問答，明數造術，詳明術理」，很有可能發揮了積極的評量效果。[21]
3. 黃榮金和梁貫成（2005），〈中國學習者悖論的質疑：透視香港和上海數學課堂〉。在此文中，作者基於變式教學理論，發現「即使在大班級中，在教師熟練地引導下，學生仍然可以主動參與在學習過程中。」因此，中國學習者所面對的，應該還是一個十分有效的學習環境。
4. 安淑華（2005），〈追逐中國的教學方式：學 – 問和學 – 思的教學模式〉。此文結論指出：「中國教師能運用不同的方法幫助學生學習數學，尤其通過提問及反思的策略來幫助學生理解數學概念，培養數學熟練技能。中國教師的信念深深影響著他們的教學實踐：教師相

信概念性理解及過程化發展對數學教學而言是同等重要的。他們認為教數學就是教思想方法。」儘管如此，本文作者對於中國（傳統）文化如何影響數學教師有關「學 – 問」與「學 – 思」教學模式之信念，則論述不足，無法幫助我們認識所謂「中國數學教學模式」的文化脈絡意義。

參、中國傳統固有的數學論證

在本節中，筆者專論劉徽的數學論證。為了凸顯它的特色，我們特別運用比較史學的方法，先是針對輾轉相除法與畢氏定理等證明，對比劉徽和歐幾里得；其次，針對圓面積公式之證明，對比劉徽和阿基米德；最後，針對「（直角）三角形內切圓半徑之求法」，[22] 對比劉徽和海龍。以這些為基礎，在本節最後，筆者將試圖刻劃劉徽的數學論證之特色。

一、劉徽和歐幾里得

中國版的「輾轉相除法」（Euclidean algorithm）先是出現在《筭數書》（公元前 186 年）的「約分術」：

約分術曰：以子除母，母亦除子，子母數交等者，即約之矣。……

二千一十六分之百六十二・約之百一十二分之九。（洪萬生、林倉億、蘇惠玉和蘇俊鴻, 2006, p. 241）

然後是《九章算術》之「約分術」：

約分術曰：可半者，半之。不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也，以等數約之。（郭書春, 1998, p. 202）

這兩個「術曰」都是不折不扣的「程序性知識」。由於本小節專門討論劉徽注，所以，在此我們就不討論《筭數書》版的「約分術」。

這一方法既然英文名稱為 “Euclidean algorithm”（歐幾里得計算法），那麼，歐幾里得的原版（《幾何原本》第 VII 卷命題 1、2）就值得考察了。[23] 值得注意的，這個命題一經偉烈亞力、李善蘭的翻譯如下：「兩不等數輾轉相減，餘一而止，則為兩無等之數」（歐幾里得, 1993, p. 1304），此一版本相當簡要，看不出它在「程序面向」上與上述「約分術」的類似性。不過，如果讓我們引述一個現代的翻譯版本，它們的「如出一轍」或許就一目了然了：

設有不相等的二數，從大數中連續減去小數直到餘數小於小數，再從小數中連續減去餘數直到小於餘數，這樣一直作下去，若餘數總是量不盡其前一個數，直到最後的餘數為一個單位，則該二數互質。（Heath, 1956, 2, pp. 296-297）

兩相對比之下，「約分術」中除了「可半者，半之」顯得多餘，還有此一方法主要用在分數約簡上方面，而非如同《幾何原本》一樣，只用以確認兩數互質（第 VII 卷命題 1）、或如下一命題（該卷命題 2）之求最大公因數而已。至於其餘的方法論面向，則極為相似。[24]

不過，劉徽針對「約分術」的注釋：

等數約之，即除也。其所以相減者，皆等數之重疊，故以等數約之。（引自郭書春, 1998, p. 202）

卻說明了「求等數」的所以然之故，它「呼應」了歐幾里得的證明，儘管後者的證明運用了「歸謬法」（*reductio ad absurdum*），一個從未在中國古代數學出現的一種論證形式。

因此，如果說「約分術曰」與《幾何原本》第 VII 卷命題 1，都提供了「輾轉相除法」的程序內容，那麼，劉徽與歐幾里得就可以說是各自補上了「概念性知識」內容，只不過是前者訴諸「註解」，而後者運用「證

明」了。

劉徽 vs. 歐幾里得的對比，似乎也可用以討論「幾何作圖」（geometric construction）的程序性意義。由於「幾何作圖」完全無關《九章算術》本文，所以，我們只能訴諸劉徽的注解。他在注

勾股術曰：勾股各自乘，併，而開方除之，即弦。（引自郭書春, 1998, p. 444）時，利用了平面圖形（此處為兩個正方形）的割切移補：

勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也。合成弦方之冪，開方除之，即弦也。（引自郭書春, 1998, p. 444）

按照史家的解讀，劉徽此處的「出入相補」（一種充滿 "heuristic" 的「程序」）將勾方與股方，變換成為弦方。也就是說，劉徽似乎「程序地」連結了「勾、股方」與「弦方」。至於歐幾里得，則是在證明《幾何原本》所謂的「畢氏定理」（第 I 卷命題 47）：

在直角三角形中，直角所對應的邊上的正方形，等於夾直角兩邊上正方形的和。（Heath, 1956, 1, pp. 349-350）

利用了三角形全等命題（兩邊夾角，SAS），「概念地」連結了「角所對應的邊上的正方形」與「夾直角兩邊上正方形的和」。

其實，仔細比較上述這兩個「證明」，我們可以發現劉徽的「作圖」與「說理」往往融為一體，[25] 也就是，他將程序性、概念性兩個知識面向結合在一起。至於歐幾里得則是將作圖與論證分開，通常他先作圖（此處依「幾何作圖」原則，作補助線），[26] 然後繼之以論證，也就是，他將程序性面向與概念性面向分開處理。

二、劉徽和阿基米德：有關圓面積公式之證明

阿基米德的圓面積公式，出自他的《圓之度量》（*Measurement of a Circle*）：

圓的面積等於兩股分別為此圓半徑與周長的直角三角形面積。（cited in Fauvel & Gray, 1987, pp. 149-150）

他的證明摘要如下：令 S、K 分別代表圓、直角三角形的面積。若 $S \neq K$，則不是 $S > K$，就是 $S < K$。然後，他證明這兩種情況都無法成立，亦即 $S \neq K$ 的假設矛盾，於是 $S = K$，得證。在他證明 $S > K$ 為不可能時，他運用了圓內接多邊形逼近圓的概念。另一方面，在他證明 $S < K$ 為不可能時，他則是運用了圓外切多邊形逼近圓的概念。有了此一公式後，阿基米德隨即在《圓之度量》中給出π的估計：$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$。

上述阿基米德的證明，正如歐幾里得一樣，都運用了歸謬法與窮盡法（the method of exhaustion）。所謂「窮盡法」，它的理論基礎則是《幾何原本》第 X 卷命題 1：

考慮兩個不相等的量，從「較大的量」減去大半（超過一半），再從剩餘的部分減去大半（超過剩餘部分之半），這種手續反覆進行，最後必定有剩餘量比「較小的量」（開始考慮時兩量之一）為小。（Heath, 1956, 3, pp. 14-15）

不過，由於他們兩人都「不敢」進行涉及無限概念的論證，所以，根本無所謂「窮盡」！其實，根據《幾何原本》第 XII 卷命題 1，如果歐幾里得「敢」進行無限論證，則他立刻可以證得緊接的命題 2：

兩個圓之比，如同各自的直徑上的正方形之比。（Heath, 1956, vol. 3, pp. 371-373）

然則歐幾里得和阿基米德為什麼「不敢」進行無限論證呢？究其原因，顯然是他們無法面對「無限」。在《幾何原本》中，即使在定義平行線的概念時，「無限」也不曾出現（參見第 I 卷定義 23）。希臘人的無限夢魘源自季諾（Zeno）的悖論，同時，這

也導致後來的西方人直到 1870 年代康托爾（Georg Cantor）發明集合論之前，只認可「潛無限」（potential infinity），而無法接受「實無限」（actual infinity）。（Dauben, 1979）

我們再看劉徽的「圓田術」。劉徽在注解《九章算術》時，針對其第一章〈方田〉的「圓田術」，提供了圓面積公式 —「半周、半徑相乘得積步」— 的證明，並藉以求出π的近似值 3.14。

現在，先讓我們將劉徽證明最主要部分引述如下：

按：半周為從，半徑為廣，故廣從相乘為積步也。（引自郭書春, 1998, p. 214）

這第一句話開宗明義，說明了「圓出於方」，利用已知方形面積公式的前提，來證明圓面積公式。[27] 接著，劉徽指出π = 3 乃是利用圓內接正六邊形（圓中容六觚）逼近圓形而求得：

假令圓中容六觚之一面，與圓徑之半，其數均等，合徑率一而觚周率三也。（引自郭書春, 1998, p. 214）

再接著，劉徽利用「割圓術」分別計算圓內接正十二邊形、正二十四邊形的面積：

又按：為圖，以六觚之一面乘一弧半徑，三之，得十二觚之冪。若又割之，次以十二觚之一面乘一弧之半徑，六之，則得二十四觚之冪。（引自郭書春, 1998, p. 215）

最後，劉徽開始「窮盡」他的割圓，而證明了圓面積公式：

割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。觚面之外，猶有餘徑。以面乘餘徑，則冪出弧表。若夫觚之細者，與圓合體，則表餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍，故以半周乘半徑而為圓冪。（引自郭書春, 1998, p. 215）

同時，他也明確指出：

此以周、徑，謂至然之數，非周三徑一之率也。（引自郭書春, 1998, p. 216）

也就是說，半周半徑相乘而得圓面積的圓周、直徑之比，絕非π = 3！

劉徽證明的特色，完全在於它的具象與直觀，這充分反映在其他的面積、體積公式的證明過程之中。（郭書春, 1998, pp. 311-315）有時候，他甚至運用剪紙所蘊藏的幾何變換方法，來證明一些幾何公式（詳本文第參節第三小節）。此外，他以及其他古代中國數學家從未使用歸謬證法。

缺乏歸謬證法的進路，自然也在方法論上「正面地」反映出來，那就是：劉徽在證明過程中總是「直接建構」！換句話說，在「圓出於方」的認識論與方法論之原則下，他的證明的每一步驟，都可以幫助學習者直觀地掌握圓面積公式的模樣。（Horng, 2000b）此外，他的證明也可以清楚顯示：「圓面積等於半周半徑相乘」並不難以想像或理解。因此，要想從日常生活的平凡情境，悟得獨到的數學洞察力，劉徽經驗是很值得學習的。

三、劉徽 vs. 海龍：有關「句股容圓」

已知三角形三邊長的面積（海龍）公式（Heron's formula）之證明中，[28] 希臘數學家海龍（Heron，公元第一世紀）利用了下列幾何命題：

由三角形的周長與其內切圓半徑所構成的長方形，是原三角形的兩倍。（cited in Fauvel & Gray, 1987, p. 205）

事實上，此一公式的內容，「實質上」與《九章算術》〈勾股〉章第 15 題之「術曰」相同：[29]

今有句八步，股一十五步，問句中容圓徑幾何？

答曰：六步。

術曰：八步為句，十五步為股，為之求弦。

三位并之為法，以句乘股，倍之為實

實如法得徑一步。（引自郭書春, 1998, p. 468）。

現在，我們依序來考察各自的證明細節。先看海龍對任意三角形面積公式的證明。在此一證明之前，海龍提供了一個「算則」，來計算已知三邊長分別為 7、8、和 9 的三角形之面積，他所使用的公式，當然是前述的「海龍公式」。（洪萬生, 1999）緊接著，他提供了一個「幾何證明」（geometrical proof）。同時，他提醒我們：計算三角形面積也可以畫出某一條垂線（亦即三角形的高）。

海龍的證明，依序動用了歐幾里得《幾何原本》中的命題 IV. 9（亦即第 IV 卷命題 9，以下仿此）、I. 41、III. 7、III. 31、III. 22、V. 16、V. 18 等五個命題，可見，他相當嫻熟《幾何原本》中的平面幾何與比例論之相關知識。茲將他的證明摘要引述如下：

(一)第一部份：如圖 1，△ABC 為給定三角形，G 是內切圓的中心，先證明「由△ABC 的周長與其內切圓半徑 EG 所構成的長方形，是△ABC 的兩倍。」再延長 CB 到 H 使 BH = AD，從而 CH 等於這三角形周長之一半。最後，證明 $(\triangle ABC)^2 = CH^2 \cdot EG^2$。

(二)第二部份：過 G 點作 CG 的垂線，交 CB 的垂線於 L，GL 交 CH 於 K 點，並連接 CL。然後，證明△AGD 相似於△CBL。

(三)第三部份：主要利用《幾何原本》第五卷的比例命題，證明 $CH^2 \cdot EG^2 = (CH \cdot HB)(BE \cdot EC)$。由於 $\triangle ABC = CH \cdot EG = \sqrt{(CH \cdot HB) \cdot (BE \cdot EC)}$，而 CH 為△ABC 周長之半，故 $\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 a,b,c 為此一三角形的三邊長，而 s = (a + b + c)/2 則是周長的一半。

由此可見，在希臘數學史上，對比於《幾何原本》中的面積公式之付諸闕如，[30] 海龍提出這個「可操作的」面積公式之證明，是相當難能可貴的文獻。不僅如此，他還嚴格地遵守了歐幾里得的規範，[31] 可見，只要接受了不可公度量（incommensurables）及其運算法則，我們絕對可以賦予這一類的面積公式之嚴密證明。無論如何，這個證明完全展現了數學知識的概念性面向。

此外，海龍的證明也利用了三角形轉化成為長方形的策略。只不過他將後者的兩邊（分別是三角形周長一半與內切圓半徑）連結到 s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ 這幾個線段，則主要利用相似三角形的邊之比例關係。事實上，這也可以說是他嫻熟《幾何原本》知識結構的最佳例證之一。

至於中國魏晉劉徽（公元 263 年）的注解「句中容圓（徑）」，則是針對已知三邊的直角三角形之內切圓直徑「術曰」，提出他的說明。他的方法運用了「剪紙」操作，輔以文字說明，其程序性知識與概念性知識揉合在一起，不脫「具象演示」（visual de-

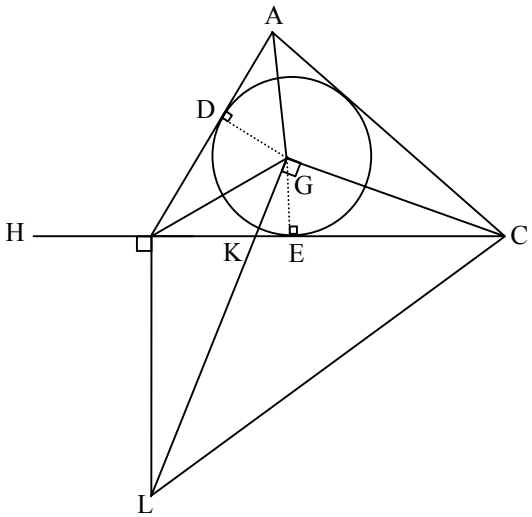

圖 1：海龍公式證明之插圖

monstration）之本色，請參考下列引文及其重建之圖 2：

句、股相乘為圖本體，朱、青、黃冪各二，倍之，則為各四。可用畫於小紙，分裁邪正之會，令顛倒相補，各以類合，成脩冪：圓徑為廣，并勾、股、弦為袤。故并勾、股、弦以為法。

又以圓大體言之，股中青必令立規於橫廣，句、股又邪三徑均，而復連規，從橫量度句股，必合而成小方矣。又畫中弦以觀除會，則句、股之面中央小句股弦：句之小股，股之小句皆小方之面，皆圓徑之半。其數故可衰之。以句、股、弦為列衰，副并為法。以句乘未并者，各自為實。實如法而一，得句面之小股可知也。以股乘列衰為實，則得股面之小句可知。言雖異矣，及其所以成法、實之，則同歸矣。則圓徑又可以表之差、并：句弦差減股為圓徑；又，弦減句股并，餘為圓徑；以句弦差乘股弦差而倍之，開方除之，亦為徑也。（郭書春, 1998, p. 468）

根據史家郭書春的看法，上述劉徽注內容可以分為如下四個部分：

第一部份：利用「出入相補」原理，將四個全等直角三角形所拼湊的兩個長方形切開，重新拼湊成一個以圓徑與三邊長之和為兩邊的長方形，從而證明了本題之計算公式 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$，其中 a, b, c 分別為直角三角形之句、股、弦三邊之長，而 d 則是其內切圓之直徑。

第二部份：劉徽簡要說明如何做出內切圓。（郭書春, 1998, pp. 470-471）

第三部份：畫出「中弦」（按字面意義，應指「中間的弦」，亦即過內切圓平行於弦的線段），然後，利用相似勾股形的原理與「衰分術」，再次證明 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$。

第四部份：劉徽提出三個用勾、股與弦的和、差，以表示的圓的直徑的公式：$d=b-(c-a)$，$d=(b+a)-c$，$d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$，但並未證明。

無論是海龍或劉徽，他們先後但彼此獨立地「證明」了「由三角形的周長與其內切圓半徑所構成的長方形，是原三角形的兩倍」，儘管正如前述，前者針對一般三角形，而後者則專指直角三角形。不過，由於他們兩人的解題脈絡不同，亦即前者三邊求面積，而後者則專在「句中求圓徑」。如果我們試著從方法論的層面來比較，則可以發現他們雖然分處不同的時空與文化脈絡中，卻不約而同地從各自的傳統，走向「程序性」與「概念性」這兩個極端之間的「中庸之道」來，這種彌足珍貴的經驗，很值得我們學習與效法。

有關內切圓之幾何作圖，海龍並未討論，這是因為他的證明是在《幾何原本》的脈絡中進行的，顯然無此必要。至於劉徽，則由於他的註解的第一部份已經假設內切圓存在，並已經在操作「出入相補」時，充分地運用了這個性質。然後，在第二部份，則根據他對假定存在的圖形之解析條件，而作

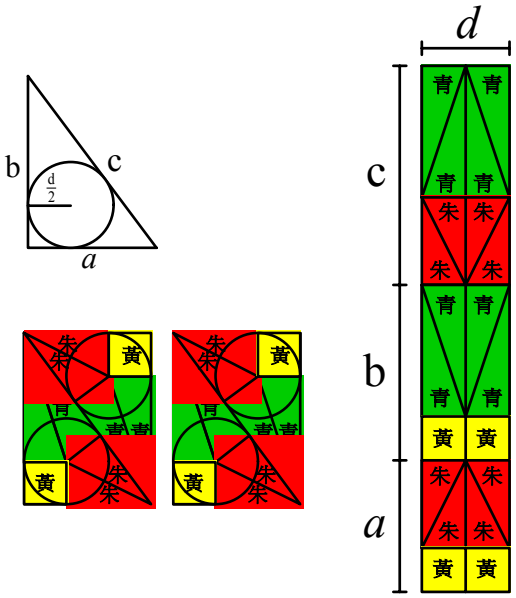

圖 2：《九章算術》劉徽注「勾股容圓」之插圖

出內切圓來，不過，他並未證明這個內切圓即為所求。[32]

四、劉徽論證之特色

就上述第參節第一小節所引述的劉徽注來看，他對「約分術」中的「更相減損」之說明手法，就是利用一個命題「分子、分母之等數重疊」（翻譯成為現代語言，就是分子、分母有最大公因數），來解說「更相減損」這個算則。歐幾里得的證法當然不是如此，因為他所運用的邏輯推論都是運用在命題之間。因此，如果說劉徽與歐幾里得在分別解說「更相減損」與「輾轉相除法」時，都各自運用了「概念性知識」來進行連結，那麼，劉徽的版本由於出自中算脈絡，所以，在風格上比較接近 David Tall（2002）所謂的「程序成概念」或「過程貌概念」（procept）。[33] 其實，劉徽這個注的論證形式可以「改寫」如下：

因為分子、分母都是等數的重疊，所以，我們可以運用輾轉相減求出等數，從而可以利用等數來約簡它們。

顯然，在其中我們補上了「求出等數」這個運算結果。然而，「分子、分母都是等數的重疊」固然是一個命題，後兩者卻是算法而非命題，因此，劉徽在此一脈絡中的註解目的，大概就是利用「分子、分母都是等數的重疊」，來提供「輾轉相減」這一算法的理由。不過，在此一「論證」中，「理由」與「歸結」之間，應該沒有所謂的邏輯必然（logical necessity）才是。[34] 當然，如果「所以」之後的第一個命題改成「分子、分母一定存在有最大等數」，那麼，因為分子、分母都是等數的重疊，所以，分子、分母一定有最大等數。無疑就是邏輯之必然了。

另一方面，有別於歐幾里得論證的「推演關係」（derivation relationship），劉徽的論證頗像是掌握了「核證關係」（justification relationship）。前者是命題譬如 A 與 B 之間的演繹關係，後者則是在比如「論述句」（argument）A 被宣稱成立的情況下，「論述句」B 是用以支持 A 或反駁 A。前者之 A 是當作前提（premise）或假設（hypothesis）用的，至於後者的 A 則是一個論題（thesis）。[35] 一般來說，日常語言中的所謂「推論」（reasoning）大都是指後者而言。此外，數學史上一些「數值核證」（numerical justification）或「幾何圖形重構」（geometrical reconfiguration）（譬如上述的「出入相補」），嚴格說來都無法構成數學證明，然而，它們卻是不折不扣的「論述句」，可以為我們引出相關命題之為真加強信心。[36]

在前述第參節第二小節、第參節第三小節中，有關圓面積公式與「句股容圓」的證明而言，劉徽的進路都是針對欲證的公式，造出相關的幾何圖形來。對圓面積公式而言，半周半徑兩個量相乘讓他聯想到一個長方形的兩邊（「廣」與「從」）。至於對「句股容圓」而言，則是「造出」一個兩邊分別是內切圓直徑與句股形三邊和之長方形。因此，他一開始針對公式所做的幾何圖形之「翻譯」，就主導了他的論證程序，亦即他設法利用「出入相補」這種幾何重構方法，而建立兩個圖形之關係。

然而，這種情況是歐幾里得或阿基米德所不需要的，這是因為在後兩者的相關命題上，都已經至少給定兩個圖形了。事實上，在歐幾里得的命題中，這是以四個圖形的比例式呈現，至於阿基米德，則是給定一個圓形與另一個直角三角形。海龍在證明「海龍公式」時，則利用幾何作圖所作出的長方形（邊長分別是內切圓半徑與三邊之和），[37] 此一進路與劉徽相當類似。劉徽的進路，當然呼應了前此有關其他面積公式（如「圭田

術」、「邪田術」等等）之證明一貫策略。此外，他的論證顯然涉及了如上所說的「幾何圖形重構」，而將圓形變換成為長方形，不過，他的這一進路，卻擁有了歐幾里得幾何作圖方法中的「解析」（analysis）面向，亦即先假設結論可以完成，再逆向分析看看如何可以完成。[38] 這種進路，當然也具體地實踐了他自己作注所主張的「析理以辭，解體用圖」，因此，史家郭書春認為劉徽的論證「辭、圖並重」。（郭書春, 1998, pp. 470-471）同時，劉徽對於這種「核證關係」的處理手法，顯然是「解析」（analysis）多於「綜合」（synthesis），[39] 這無疑是他的論證之主要特色之一。[40]

肆、西方數學論證的傳入與消納

上文第參節所論，無非是現代史家的一種比較史學之進路，其目的主要是為了凸顯各自的特色。儘管如此，中西數學之不同，絕對不只是「各如其面」而已。以論證為例，我想它在各自的文化脈絡中的需求迥異，以是表現出來的形式，也就大大地不同了。這種強烈的對比，尤其顯著於十六世紀之後，中、西數學面對面的遭遇（confrontation）之中，不管「代理人」是中國人或西方傳教士。譬如徐光啟、梅文鼎在十七世紀的融合西算，以及十九世紀李善蘭的學習西算，都是極佳之例證，值得我們在此分梳與整理。

一、徐光啟如何折衷句股問題與畢氏定理？

徐光啟（1562-1633）與梅文鼎（1633-1721）都以《幾何原本》（1607）的「畢氏定理」為基礎，先後提出他們各自對中國傳統「勾股」問題的研究。此一文本係利瑪竇（Matteo Ricci）與徐光啟根據丁先生（Christopher Clavius）改編的拉丁文版本（1574），翻譯前六卷而成。其中，每一命題之後都有「解曰」與「論曰」，如果涉及「幾何作圖」（geometrical construction），則又加列「法曰」。所謂的「解曰」，是用以解釋定理「內容」或「意義」，「論曰」意即「證明」。其實，此處的「法曰」無非是一種「程序性知識」，不過，在丁先生版本中的「註釋」（*scholium*）遇有舉例說明時，利瑪竇與徐光啟也翻譯成「法曰」。譬如上述拉丁文《幾何原本》第 I 卷第 47 命題的「注釋」VIII，在利、徐譯本（1607）被譯成「四增（題）：三邊直角形，以兩邊求第三邊長短之數。」至於在緊接著「法曰」中，作者則是根據本定理（亦即「畢氏定理」）對所給例子進行演算：

> 甲乙丙（三）角形，甲為直角。先得甲乙、甲丙兩邊長短之數。如甲乙六、甲丙八，求乙丙邊長短之數。其甲乙、甲丙上所作兩直角方形并。既與乙丙上所直角方形等（本題），則甲乙之冪（自乘之數曰冪）得三十六。甲丙之冪得六十四，并之，得百。而乙丙之冪亦百，百開方得十，即乙丙數十也。[41]

或許正因為如此，所以，徐光啟的《勾股義》（1609）與梅文鼎的《勾股舉隅》（不著撰年），儘管都以中算的「程序性」進路，折衷調和古希臘數學的「概念性」風格，然而，他們卻往往將《幾何原本》體例中的「法曰」與「論曰」混雜在一起。

先看徐光啟如何處理「畢氏定理」。在《勾股義》中，徐光啟提供的第一、二、三題分別是「勾、股，求弦」、「勾、弦，求股」、「股弦，求勾」。不過，在「法曰」中，他都以具體數值為例來演示「解法」。譬如，第一題之「法曰」：「甲乙股四，乙丙股三，求弦。以股自之，得十六，勾自之，得九，

并得二十五，為實。開方得甲丙弦五。」至於所附圖形，則是一個直角三角形，並將它的勾、股、弦三邊標示了三、四、五。[42] 在此一脈絡中，徐光啟顯然讓「勾股術」與「畢氏定理」各自表述，前者的「程序性」與後者的「概念性」並未接合。

現在，讓我們來考察「勾股容圓」問題。正如本文第參節第三小節所述，它的原型出自《九章算術》卷九〈勾股〉第 15 題。徐光啟將它列為《勾股義》第 7 題：

勾股，求容圓

法曰：甲乙股，六百。乙丙勾，三百二十。求容圓。以勾股相乘得一萬九千二百，倍之，得三萬八千四百，為實。別以勾股求弦，得甲丙弦六百八十。并勾股弦為法，除實，得容圓徑乙子二百四十。（徐光啟, 1983, p. 5-9）

然後，他的「論曰」就花了將近九頁的篇幅之多，企圖證明他所「計算」出來的「辛壬」或「乙子」邊（參見圖 3），果然是「容圓徑」！（徐光啟, 1983, pp. 5-9）為此，他還必須證明這一容圓（內切圓）與勾股形三邊之相切，以及這勾股形三角之平分線交於一點。不過，最終他並未成功地完成證明，儘管他訴諸金元李冶《測圓海鏡》中的「勾股步率」（以其專論直線與三角形故也），而不是中國傳統數學家對圖形的割切移補（譬如劉徽的「出入相補」）。（Engelfriet, 1998, pp. 293-295）無論如何，在徐光啟所採用的這種將中西論證接枝手法中，我們可以看到「程序性」與「概念性」結合的痕跡。

類似的情況，也出現在《勾股義》第 4 題：「句、股。求容方」（亦即：已知一個直角三角形之三邊長，求其內接正方方形之邊長）。[43] 安國風（Peter Engelfriet）與蕭文強（Siu Man Keung）針對本題的精彩分析之後，極有洞識地指出：徐光啟乃是利用歐幾里得的幾何學（完全是概念性知識），以說明中國古代數學中的算則之合理性。(Engelfriet & Siu, 2001) 因此，他結合概念性與程序性兩個面向，殆無疑問，儘管他可能企圖將算則中的步驟「翻譯」（translate）成為相對應的幾何作圖。不過，就像第七題的處理一樣（見上一段），他並未成功地解決此一中西算的融合問題！因此，正如安國風與蕭文強所強調：「如果我們將徐光啟的努力，詮釋成一種企圖以嚴密的（歐幾里得）方法，去證明（中國）傳統算則的正確，那麼，我們必須下結論說：他失敗了。然而，更有可能的情況，則是他將歐氏幾何視為一種啟發（heuristic）與教學（pedagogical）方法。」（Engelfriet & Siu, 2001）在他的《句股義》中，徐光啟說明他「論譔」正法十五條之義

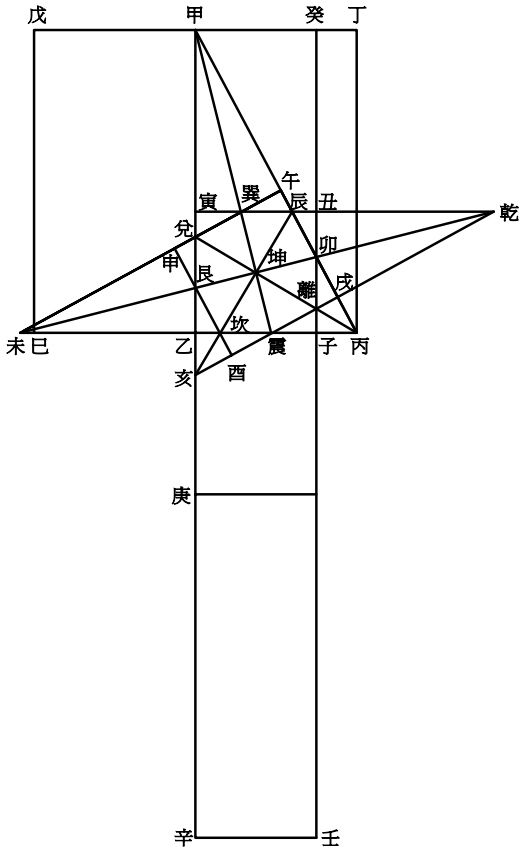

圖 3：徐光啟證明「勾股容方」之插圖

的目的，在於「使夫精於數學者，攬圖頌說，庶或為之解頤！」如此說來，徐光啟與劉徽如何比較呢？在此書的「論曰」中，正如前述，徐光啟通常運用數值計算的程序，以核證他所引用的《幾何原本》之命題（如「句股容方」中所引的六卷十六，即《幾何原本》的第 VI 卷命題 16），這種策略頗為類似本文第參節第四小節中的「數值核證」，只是在此脈絡中，徐光啟還混雜了作圖。相反地，劉徽的出入相補「作圖」之「核證」通常不涉及數值計算，因此，抽象性或一般性顯得比較高明。在劉徽論證的映照下，徐光啟在中、西算的「接枝」上顯得不夠成熟，由此可見一斑！

二、梅文鼎研究畢氏定理與句股問題

相較於徐光啟，梅文鼎對於「畢氏定理」的處理顯得自在多了。在他的《勾股舉隅》中的〈弦實兼勾實、股實圖〉這一節內，梅文鼎提供了兩個「論曰」，揉合了中法的割切移補與西法中的平行、平移概念，而證明了「畢氏定理」。其中，它固然不乏訴諸圖形的直觀意義（譬如第二個「論曰」中的「與乙丙弦成十字」一詞）（梅文鼎, 1993a, p. 4），然而，類似第一「論曰」中的「是一弦實分為勾、股二實也」，則無疑是「程序性」改裝成「概念性」的結果。[44] 此外，在緊接著的「假如勾六尺，股八尺，求弦」題中，梅文鼎的「論曰」表述，也可以讀出類似的變化：

> 勾實、股實，併之與弦實等，故開方得弦也。（觀前圖自明。）（梅文鼎, 1993a, p. 5）

按中算如《九章算術》的習慣表述，上述第一句話當是「勾實、股實，併之為弦實」，可見，在西算的映照下，「程序性」的操作轉變為靜態的（「概念性」）命題了。[45]

數學史家馬若安（Jean-Claude Martzloff）評論梅文鼎的進路時，曾指出：「對原著的改寫不僅涉及論證，還包括幾何圖形，像梅文鼎這樣的一流數學家，就曾盡力將幾何圖形從其所附屬的論證中分離出來。於是，為使相應的的原理更直觀，他們便會重新畫圖。若視其為「演示法」（monstrations），則通過明確的圖形表示，論證的實質已發生了變化。」（馬若安, 2002）此處 monstration 應該與 demonstration 一字有關，它出自數學史家 Arpad Szabo，意指為了直觀地呈現某些命題的真實性所採用的演示方法，其特色就是避免訴諸繁瑣的推理程序。（馬若安, 2002）

馬若安進一步對比歐幾里得和梅文鼎，提供了發人深省的歷史洞識：「在歐氏原著中，其命題的實質是難以脫離相伴其中的無可置疑的邏輯過程的，而對梅氏來說，對給定命題的理解則主要依賴相關圖形的特殊畫法，而不是演繹推理。」（馬若安, 2002）其實，梅文鼎的認知顯然出自「幾何即句股」的考量，在進行幾何「通解」時，他堅持依據中國固有的「弦圖」，[46] 也不見得那麼一無所得。正如前文所說，他針對《幾何原本》第 II 卷第 7 命題的圖形重構解讀，固然失之「繁瑣」，不過，類似的進路，卻引導他有機會提供遠較於歐幾里得來得簡易的圖示（graphical illustration）。如果我們再從一個漂亮證明必須滿足的「說明」（explanation）功能來說，那麼，梅文鼎的「解」，對於現實教學的啟發就不無意義了。（洪萬生, 2006b）

針對「勾股容圓」，梅文鼎的處理就簡要多了，這或許是他採用「弦和較」的緣故吧！[47] 請徵之於他在《勾股舉隅》中所提供的內容：

> 假如句八尺，股十五尺，弦十七尺，問內容圓徑？
>
> 法：以句八尺與股十五尺相加，得二十三尺，內減弦十七尺，餘六尺為容圓全徑。

論曰：弦和較即容圓徑也。如甲乙丙勾股形，內容戊己庚圓。而圓周切弦於庚，切股於戊，切句於己。各作線至圓心丁，則丁戊、丁己皆半徑，各與戊乙、乙己等。而戊乙、乙己者，皆弦和較之半也。半徑既與半較等，則全較為全徑無疑矣！餘詳《（平）三角舉要》。（梅文鼎, 1993a, pp. 19-20）

儘管如此，梅文鼎論證時，他並未指出、或利用「三角形之內心即內切圓之圓心」之定理，從而這也不是一個嚴謹的「論曰」。[48] 在《（平）三角舉要》中，他雖然提及三角形內三條分角線，但是，未曾說明它們何以相交於一點（亦即內心），[49] 則是一大失算，這是因為如此一來，整個論證就無法成立了，而且連帶地影響了相關的論述。（梅文鼎, 1993a, pp. 4-9）總之，梅文鼎的「論曰」以「幾何作圖」為主，至於一些「概念性」的幾何事實，則都只是扮演輔助者的角色。

三、梅文鼎與海龍公式[50]

梅文鼎有關海龍公式的證法，並非他所獨創。事實上，此一證法在羅雅谷撰寫、湯若望校訂、徐光啟督修的《測量全義》第四卷中即已出現，但邏輯推論上有漏洞。梅文鼎是將此證法加以補正，並略作改良後，編入他自己的《平三角舉要》。（李建勳, 2006）他撰書的目的之一，顯然是回答門徒的提問：[51]

三角大意，首卷略具，而入算仍有疑端。同學好問，事事必求其所以然，故不憚為之詳複，以暢厥旨。（梅文鼎, 1993a, p. 485）

而他的「海龍公式」版本，則如下表達：

問：三較連乘之理，曰：亦勾股術也。以勾股為比例，而以三率之理轉換之，則用法最精之處也，故三較連乘，即得容員半徑上方乘半總之積。（梅文鼎, 1993a, p. 491）

至於他的證明，則主要訴諸幾何。與海龍的出發點相同（參考圖 4），他先延伸 $\overline{CH}=s-a$，使得 $\overline{BH}=s$。但不同於海龍，梅文鼎所求出的比例式為

$$\frac{s-b}{s}=\frac{r^2}{(s-a)(s-c)}。$$

同時，他用來建立比例式的相似三角形，則是 ΔBID 與 ΔBGH（見圖 4）。由於相似，可得

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{ID}}{\overline{GH}}=\frac{\overline{ID}\times\overline{ID}}{\overline{GH}\times\overline{ID}}。$$

接著，他再將 $\overline{GH}\times\overline{ID}$ 置換成 $\overline{CH}\times\overline{CD}$，整個證明就告完成。

為此，他再利用 ΔCGH 與 ΔICD 相似，則 $\frac{\overline{GH}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{ID}}\Rightarrow\overline{GH}\times\overline{ID}=\overline{CH}\times\overline{CD}$。然而，如何證明 ΔCGH 與 ΔICD 相似呢？梅文鼎透過 ΔGKC、ΔGAL 與 ΔGAC 三者全等，推得 $\overline{GJ}\perp\overline{CJ}$，進而導出 ΔCGH 與 ΔICD 相似。平心而論，這部份相當難以理解，顯然，這也解釋了何以梅文鼎的圖形（圖 4）比海龍的圖形（圖 1）複雜。

綜觀梅文鼎的海龍公式之證明，是他的《平三角舉要》卷四「三較連乘之理」整卷結構的一部份。由於其中「事事求其所以

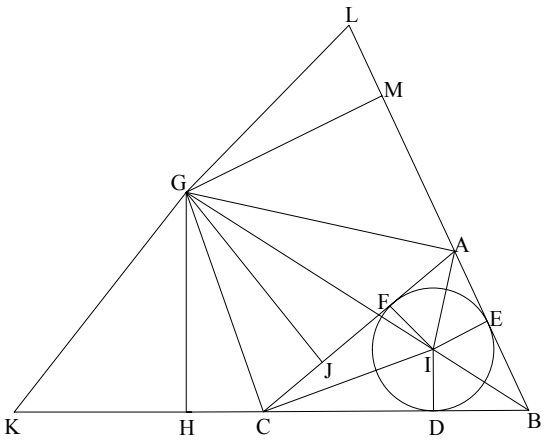

圖 4：梅文鼎證明「海龍公式」之插圖

然」，所以，他除了「幾何作圖」是為了證明存在性之外，論證可以說相當「形式化」，這當然是徐光啟所不及。此外，在證明過程中，梅文鼎會適時地舉例說明，「以數明之」。（梅文鼎, 1993a, p. 491）這種呈現方式，顯然意在讓讀者在追索他的論證時，多一點潤滑劑，不至於有過度窒礙之感。

另一方面，馬若安的前引評論，似乎不適用於梅文鼎有關海龍公式之證明。究其原因，或許梅文鼎未曾另創圖解，以說明海龍公式之意義吧！當然，他無法一開始以句股形的相關性質來會通海龍公式，恐怕也是原因之一。譬如說吧，他似乎並未體會「句股容圓」與海龍公式有關。於是，他照抄《測量全義》中的海龍公式、附圖及其有缺陷的證明，再補上其中邏輯推論上的漏洞。

因此，如果像本例一樣無從「會通」，那麼，梅文鼎這樣的傑出數學家，倒是可以在西算論證方面，表現了合宜的學習成效。他如何證明海龍公式，就是一個最佳例證。

四、李善蘭證明海龍公式[52]

李善蘭的自創證法，收入他的《天算或問》。[53] 其中，他通過三個一問一答的方式，論述等式 $(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2$（這就是他所謂的二、三率相乘等於一、四率相乘）如何成立。[54] 如將前式兩邊再乘上 s，即得

$$s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

這就與他的「第一問」海龍公式等價了：

或問曰：平三角形求積，以三邊半和與各邊相減得三較，三較連乘以乘半和，開平方得積，何也？（李善蘭, 1867, p. 6）

首先，參考圖 5，令 $BC=a, AC=b, AB=c$。李善蘭當然知道 $\overline{AE}=\overline{AF}=s-a$，$\overline{BF}=\overline{BD}=s-c$，$\overline{CE}=\overline{CD}=s-c$，這是採取幾何方式論證的必備條件。不過，李善蘭卻出人意表地先做出任一邊的高，論證比例式 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}+\overline{CH}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}+\overline{BH}}=\frac{r}{h}$ 成立，其中 $\overline{AH}=h$ 為 BC 邊上的高。如此一來，

$$\frac{\overline{CD}}{b+\overline{CH}}\times\frac{\overline{BD}}{c+\overline{BH}}=\frac{r^2}{h^2}\ 。$$

現在，

$$\begin{aligned}h^2&=c^2-\overline{CH}^2=b^2-\overline{BH}^2\\&\Rightarrow(c-\overline{CH})(c+\overline{CH})\\&=(b-\overline{BH})(b+\overline{BH})\ ，\end{aligned}$$

而且

$$\frac{(c+\overline{CH})}{(b-\overline{BH})}=\frac{(b+\overline{BH})}{(c-\overline{CH})}=\frac{s}{s-a}\ 。[55]$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CD}\times\overline{BD}}{r^2}&=\frac{(b+\overline{CH})\times(c+\overline{BH})}{(b+\overline{CH})\times(b-\overline{BH})}\\&=\frac{(c+\overline{BH})}{(b-\overline{BH})}=\frac{s}{s-a}\Rightarrow sr^2\ 。\\&=(s-a)(s-b)(s-c)\end{aligned}$$

細按李善蘭的證法，在一方面，他並不利用這些相關的邊長，以尋求比例關係。他反倒是將三角形 ABC 分解成兩個句股形，再利用 $\overline{AC}+\overline{CH}:\overline{AB}+\overline{BH}=\overline{CD}:\overline{BD}$ 所滿足的比例關係。[56] 另一方面，李善蘭在比例關係的推導上，不像前述海龍與梅文鼎的證法那麼依賴圖形－其實，如果我們想要理解後兩人的證法，就必須完全掌握證明中所附的圖

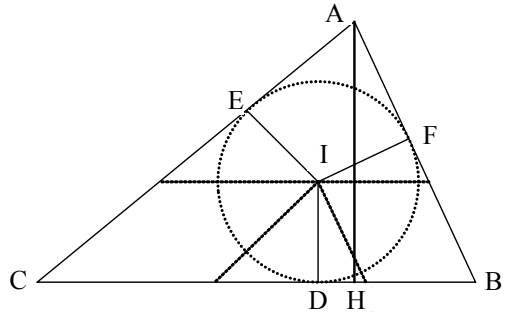

圖 5：李善蘭證明「海龍公式」之插圖

形才行。

事實上，當李善蘭試圖說明比例式 $\frac{(c+\overline{CH})}{(b-\overline{BH})}=\frac{(b+\overline{BH})}{(c-\overline{CH})}=\frac{s}{s-a}$ 成立時，他所利用的圖形（如圖 6），與原本用以論述的圖 5 不同。換言之，對李善蘭而言，比例式

$$\frac{(c+\overline{CH})}{(b-\overline{BH})}=\frac{(b+\overline{BH})}{(c-\overline{CH})}=\frac{s}{s-a}$$

的成立具有一般性，並不侷限在圖 5 中的三角形而已。這一想法，也呈現在他的論證之中。其中，他先舉相等情況為例，再說明不等情形也成立，而這樣的情形則不可能出現在同一個三角形的邊長上。這也說明李善蘭儘管採用幾何論證，但由於他掌握更多三角形邊長比例關係的一般性，使得他運用幾何圖形時，得以採取完全不同於海龍與梅文鼎的進路。

現在，我們不妨參考陳春廷、[57] 程和欽與王鼎勳的反思，[58] 來說明李善蘭的方法論之特色。陳春廷發現「《天算或問》以對話問答方式來呈述，不像現在教科書的標準作法（先證明需要的引理，再進入定理的證明），而是採用倒述手法，當證明過程之中需要用到其他的觀念時，才加以解釋或證明，這樣子就像是真實的教學情境，數學邏輯性更強。」（陳春廷, 2006）另一方面，程和欽也認為李善蘭「似乎採用了倒敘的手法，視結果的需求，採用了「反推法」與「媒介過渡」的兩個解題策略。」（程和欽, 2006）他還指出：「這種解題策略，明顯不同於現今一般的教科書課程內容，這是因為教科書的解題大部份都是由題目所給予的「條件」，直接經過幾個「媒介」推導出結果。但為什麼忽然出現此媒介？為什麼需要透過此媒介，則並未說明。反之，李善蘭的證明過程，是由題目所要證明的「結果」出發，考察欲達成這個結果需要什麼「媒介」，就去創造、

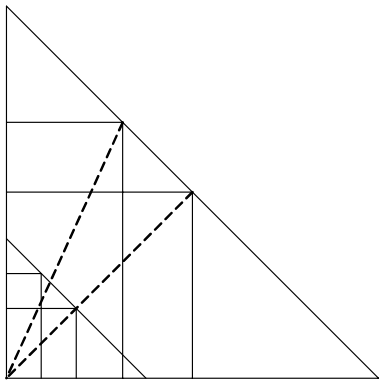

圖 6：李善蘭證明「海龍公式」之插圖二

去證明，進而整理得出結果這種作法及解題策略，其實更貼近學生的自然學習過程。也是有經驗的教師於教學中常用的解題及引導策略。」（程和欽, 2006）同樣身為中學數學教師，王鼎勳的教學反思也頗為類似。他發現李善蘭的證明過程，竟跟他自己在教學過程有相當大的雷同度：「〔我〕通常自己會先跟學生分析，給定一個策略，依照策略執行時遇上的問題時在〔再〕分別解決，最後完成整個策略，解決問題。」（王鼎勳, 2006）

綜合以上三位研究生的反思，我們可以發現李善蘭的證明進路，的確具有相當濃厚的「倒敘」之「解析」（analysis）特色。同時，他連結三角形的高與「三較」之策略，也需要相當獨到的洞察力，儘管他並非訴諸古典的三角形面積公式－(1/2) × 底邊 × 高。總之，他的欲證命題（即海龍公式）來自西方，證明所運用的相似與比例，也出自西算之範疇。然而，以「解析」方法來呈現他的論證，則無疑是他的獨到見解。還有，我們也必須注意：從數學知識連結的觀點來看，李善蘭的層次思維相當清晰，命題之間的連結依賴了嚴密的演繹論證，從而也保證了論證的「形式化」，不像梅文鼎還夾纏數值例證。此外，李善蘭（可能）自創的圓內接正五邊形之作圖及其證明，[59] 其呈現形式

完全符合《幾何原本》的規範，足以顯示他對於西方幾何論理的完整掌握。[60]

然而，李善蘭有關海龍公式證明的進路，卻頗為接近真實的教學情境，值得我們注意。事實上，在一方面，李善蘭的證明滿足了嚴密的要求，但在另一方面，這一證明也相當忠實地反映他的進路，讓有些讀者比如中學數學教師，得以基於他們自身的教學經驗，而掌握李善蘭的思維方法之歷史與教學意義。由此可知，要是數學文本的研讀者有能力從容出入「歷史現場」與「教學現場」，那麼，歷史經驗與教學經驗顯然可以互惠。這是我們研讀李善蘭之證明「海龍公式」所得到的最大收穫。（蘇俊鴻, 2006; Horng, 2006）

伍、結　論

在本文中，我們運用了數學史的一些單元，例如輾轉相除法、畢氏定理、圓面積公式以及「（直角）三角形內切圓半徑公式」之證明，分別對比劉徽和歐幾里得、劉徽和阿基米德、劉徽和海龍，以及徐光啟和梅文鼎。有關海龍公式之證明，又對比梅文鼎和海龍、李善蘭和海龍，進而刻畫傳統中算家的某些論證特色。[61]

在歐幾里得、阿基米德與海龍的映照下，我們發現：劉徽的論證風格，無非是總結「概念性知識」，以便邏輯地貫穿「程序性知識」（如《九章算術》中的「術」），[62] 然後，再將這些概念性知識，「總結」成為一個數學知識結構。（郭書春, 1995）就海龍公式而言，相對於海龍，劉徽顯然志不在證明（直角）三角形面積公式，所以，劉徽與海龍的對比，顯然可以幫助我們凸顯前者如何處理內切圓的作圖問題。由於內切圓如何證明存在，並非劉徽的主要關懷所在，所以，他視為理所當然的「辭圖並用」，充分顯示了傳統中算的特色。

劉徽的這種進路，恰好與徐光啟與梅文鼎大異其趣，後者都從西算的「概念性知識」出發，再試圖回來會通中算的「程序性知識」。不過，他們進行此一「接枝」論述時，尤其是涉及幾何作圖時，卻免不了左支右絀，顧此失彼。以是，西方幾何知識之偏向論理，與中算之「算則」面向之格格不入，固然是主要原因之一，不過，他們還沒有機會研讀失傳已久的劉徽數學，[63] 因而在會通中西算時，平白喪失了比較對等的「抗衡」機會！

話說回來，「程序性知識」固然主導了這些數學文化的交流（洪萬生, 2003），不過，我們也不能忽視「概念性思維」所扮演的角色。譬如，徐光啟、梅文鼎的「法」或「術」，就離不開西算的「論曰」。其實，在西方數學東傳的過程中，無論是十七、八世紀徐光啟、梅文鼎的第一次接觸，或是十九世紀李善蘭通過中譯本的「雙重」肆應，[64] 最終都必須面對程序性與概念性知識的結合。

儘管如此，李善蘭證明「海龍公式」，卻給了我們一個更有趣的切入點。李善蘭應該相當熟悉劉徽、徐光啟與梅文鼎的數學才是。[65] 如此，他創造新的證明方法，才顯得彌足珍貴。不過，就李善蘭著手證明海龍公式的方法論之「解析」面向而言，我們實在很難估測劉徽對他的影響，這是因為在其中我們看到以概念性知識為主的呈現形式。若論他的證明之形式化，則接近梅文鼎的西算融入之風格。

總之，在概念性知識面向必須關照的前提下，劉徽、徐光啟與梅文鼎，都表現了傳統中國數學中固有的「辭圖並用」特色，而企圖在概念性知識與程序性知識之間進行連結。對劉徽而言，他的知識連結包括了「程序性（算則）– 程序性（算則）」、「程序性

（算則）– 概念性（含命題）」，以及「概念性（含命題）– 概念性（含命題）」，同時，他的「連結」方式相當多元，也出現層次之分的概念結構。這些或許足以刻畫傳統中國數學家未受西算影響的論證特色。

另一方面，徐光啟與梅文鼎的論證，譬如作圖題上所表現的「概念性 – 概念性」連結之欠缺嚴密，似乎也放大了中國固有「辭圖並用」的不足。顯然，在概念性知識的映照下，數學知識的連結之強化，自然地逼迫「圖」離開「辭」，而讓擁有高超幾何能力的梅文鼎，都難免措手不及。不過，這也說明了徐光啟與梅文鼎在進行上述三種知識連結時，「辭圖並用」的確扮演了不可或缺的角色。

這種情況對於李善蘭而言，已經可以完全避免了。試看他的海龍公式的第三部份（亦即第三個問答），他證明其中之比例式具有一般性，企圖從特定的圖形如圖五解放出來。更進一步，他提供正五邊形作圖及其證明時，則正如前述，已經完全符合歐幾里得的證明規範了。不過，徐光啟與梅文鼎學習西算論證方面的缺失，現代數學教師強調概念性理解與過程化發展同等重要時，[66] 大概也不是那麼容易可以避免。為了彌補此一不足，或許劉徽與李善蘭有關「概念性－概念性」連結的「解析」面向，就非常值得納入數學教學的重點了。最後這一點，是我們結合「歷史現場」與「教學現場」的反思所提出來的初步觀察，或許可以作為論證研究的一個新的起點。

註　釋

1.在此，所謂「傳統」，在時間上是指二十世紀以前。在本文中，我們藉以討論數學論證的中國數學家之例子，最晚到十九世紀的李善蘭（1811-1882）為止。由於他被視為中國數學教育現代化的關鍵人物，所以，所謂的「傳統」就以他為終點。有關李善蘭，請參考拙文洪萬生（1991）。

2.平心而論，劉徽、徐光啟、梅文鼎與李善蘭等人，當然都不足以概括全部的傳統中國人。不過，這些恐怕是我們僅能仰仗的少數例證。話說回來，歐幾里得也好，阿基米德也好，也只能代表古希臘極少數的學院派菁英份子，只不過他們的數學風格後來主導了西方數學的發展。

3.根據本書中譯者徐復觀之說明，本書出版於 1948 年。參考中村元，《中國人的思維方法》（台北：學生書局，1995 年修訂版二刷），〈譯序〉（徐復觀）。

4.收入楊儒賓、黃俊傑編《中國古代思維方式探索》（1996）。本論文集或可視為台灣新儒家學者的典型著述，其中不乏發人深省之研究結果，不過，其研究對象不及於算書，相當可惜。

5.拙作與蕭文強的論述，都是相關例證。參考 Horng（2000b），Siu（1993）。

6.從數學史學的觀點而言，他們的研究成果當然「自我證成」（self-justification）。至於數學史與數學教學關連（Relations between History and Pedagogy of Mathematics, HPM）之進路，是一種正在成形的跨學門領域，當然需要嶄新的問題意識與研究方法。可參考拙著，洪萬生（2006a）。

7.李瑾（2005）引用「文化意義系統」或「文化模式」概念，企圖關連到數學教育，藉以研究「中國文化的學習模式」。可惜，除了他的「實徵」資料之外，他針對「學習目的」的考察結果，譬如中

國學生幾乎沒有提及嚴格推理等等，並未超越文化學者的一般性觀察。其實，收入本文與前述黃毅英等文的《華人如何學習數學》（范良火等編, 2005），就企圖研究此一問題，不過，看起來還在起步階段。

8.既然如此，本文所採用的主要研究方法，當然是文獻解析法，其解析對象則包括了極少數研究生/中學教師的反思之文本（text）。

9.台灣教育學者針對數學論證當然也貢獻了可觀的研究成果，不過，筆者將留待以後再綜合評論。

10.參考蘇俊鴻客座主編，《HPM 通訊》第九卷第四期「海龍公式專輯」：http://www.ntnu.edu.tw/~horng.

11.引自 Hiebert Ed.（1986），p. 6。另外，大學入學考試中心所出版的《指定科目考試參考手冊》（2001），就提供了程序性知識的評量判準，值得參考。

12.這種將涉及幾何作圖的命題之證明之分成「法曰」與「論曰」，見於利瑪竇、徐光啟合譯的《幾何原本》前六冊。至於 Heath 版，則無此劃分！

13.此處引文都出自利、徐（合譯）版，此一版本根據利瑪竇的老師丁先生（Christopher Clavius）改編的拉丁文版本所譯，其中將 “postulate”（設準）翻譯成「求作」，可見這些命題都成為了幾何作圖之所需了。至於 “common notion” 則翻譯成「公論」。現在通稱為平行設準的第五設準，則被丁先生移進他的「公論」之中。

14.引自 Hiebert Ed.（1986），pp. 3-4。概念性知識重視「連結」（connection），以是學習者對於意義的理解，乃是評量的主要指標。然而，我們卻必須特別指出前述 Hiebert 的引文中的「事實」，這也是 Haapasalo & Kadijvich（2000）針對「概念性知識」之定義，所強調的的重點之一。他們的定義如下：「概念性知識意指某一特別的網絡之知識，以及沿者此一網絡的一個精熟的「驅策力」（drive）。同時，此一網絡中的元素，可以是各色各樣「表徵形式」（representation form）中所給出的概念，規則（算則，程序等）甚至是問題（一個已解決的問題可引入新的概念或規則）。

15.有一些數學家或數學教育家會強調：這是「熟能生巧」的最佳例證之一。不過，這個「巧」究竟能否代表概念性的連結，進而出現更高層次的理解，則恐怕不容易下定論。

16.參考李繼閔（1992），pp. 239-240。

17.參考顧泠沅、黃榮金與費蘭倫斯・馬頓（2005）或 Gu Lingyuan, Huannnnng Rongjin and Ference Marton（2004）。Anna Sfard（1991）是數學教育界當年問世的經典論文。

18.引同上。又此處所謂的西方理論包括如下：Dienes 的學習理論，Marton & Bowden 的變異理論，以及 Bruner 等學者的鷹架理論。參考本書的英文版 Fang Lianghuo, Wong Ngai-Ying, Cai Jinfa & Li Shiqi (Eds.)（2004），pp. 309-347。

19.黃毅英在他的另一篇論文中，也持同樣看法。參考 Wong（2006）。從黃毅英此處所舉的例子來看，朱熹的讀書方法比較像是可以跟「實作理論」（practical theory）結合。針對朱熹的讀書方法如何可以連結到數學學習，我有不同的看法，不過，那是另一篇論文的主題。

20.除了下列幾篇筆者即將評論的之外，還

有徐斌豔的〈外在表徵對中國學生數學學習的作用〉。本篇的研究工具為「功能性認知結構」與「謂詞性認知結構」，或許很可以為我們引出中國人固有認知模式，不過，作者的結論是：中國學生一如其他國家的學生一樣，也展現了這兩種認知結構之差異，因而這種差異與文化環境無關。參考徐斌豔（2005）。

21.Alexei Volkov（琅元）（2004）從十九世紀越南數學文本中找到旁證，他認為《新唐書》的評量要求確有可能。

22.《九章算術》中的題名為「勾股容圓」。至於海龍所應用的公式，則是針對任意三角形。

23.《幾何原本》第 VII 卷命題 1 英文版如下：“Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measure the one before it until an unit is left, the original numbers will be prime to each other.”（Heath, 1956, 2, pp. 296-297）。至於命題 2 則如下：“Given two numbers not prime to one another, to find their greatest common measure.”（Heath, 1956, 2, p. 298-300）

24.參考「約分術」的英文翻譯：“If both [the denominator and numerator] can be halved, then halve them. When both cannot be halved, set down the numerals of the denominator and numerator, and subtract the smaller from the larger. Continue to diminish mutually through subtractions (‘Geng Xiang Jian Sun’) to seek a pair of equal numbers (‘Deng Shu’). Use [this number called] the ‘Deng Shu’ to reduce [the fraction].”（cited in Lam and Ang, 1992, p. 56）再試著比較「輾轉相除法」的英文版，應該也可以看出這兩者之間的相似性。

25.這也符合他在《九章算術》注序中所說的「析理以辭，解體用圖」。

26.劉徽與歐幾里得兩人的「作圖」概念當然不同，兩者都具有「解析」（analysis）意義，但是前者視一些幾何性質為理所當然，後者則有嚴格的規範。儘管如此，在對比笛卡兒與歐幾里得的修辭時，Fauvel 指出歐幾里得的目的，根本不在於他的讀者被假定去執行的一個學習活動（not about an activity that the reader was supposed to carry out.”。參考 Fauvel（1988）。

27.由於「從」與「廣」習慣上都指涉一個長方形（「方田」）的兩邊，因此，劉徽此處「按」語的目的，是將半周、半徑視為一個長方形的兩邊，於是，只要我們可以將這個圓形，「等面積」地變換成為邊長分別是那個半周與半徑的長方形，那麼證明就完成了。在此，此一「按」顯然主導了整個證明的方向與策略。

28.此一公式亦即：

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 a,b,c 是三角形的三邊長，而 $s=(a+b+c)/2$ 則是周長的一半。

29.兩者之差異，當然在於前者指涉一般三角形，而後者則指直角三角形。

30.眾所周知，《幾何原本》中完全欠缺有關幾何量之度量。

31.請參考他所運用的《幾何原本》之命題。

32.證明幾何作圖合乎所求，是歐幾里得針對作圖的命題（譬如《幾何原本》第 I 卷命題 1）的主要任務。換句話說，他認為如此一來，某些幾何圖形的存在絕非訴諸直觀，而是出自嚴格的證明。參

考 Bunt et al（1988），pp. 141-193。

33.按 “procept” 是 Tall 將 “process” 與 “concept”「濃縮」起來的結果。說得更明確一些，或許我們可以說劉徽利用了《九章算術》中很多「程序成概念」。事實上，無論是《筭數書》的「以子除母，母亦除子，子母數交等者，即約之矣」，或《九章算術》中的「副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也，以等數約之」，都曾出現 Tall 所說的「程序成概念」，前者的「交等者」與後者的「求其等也」中的「等」都可以解讀成「動詞」，因此，可以視同「程序」。至於，在最後一個運算中，前者顯然略去「等數」，而在後者中，「等數」當然就是一個（名詞）「概念」了。

34.參考中村（1995），頁 45。其實，劉徽的「等數約之，即除也。其所以相減者，皆等數之重疊，故以等數約之」在推論意義之敘述，不如《引書》（與《筭數書》一起陪葬）中的句型來得完整：「人之所以得病者，必于暑濕風寒雨露，腠理啟合食飲不合，起居不能與寒暑相應，故得病焉。」（引高大倫, 1995, p. 167）這是因為後者中的「得病」在首句與末句中重複出現。

35.此處我們運用了 Duval 的 “argument” 概念。他所謂的 “argument”，包括了諸如事實的一個陳述、一個實驗結果、或甚至只是一個例子、一個定義、一個規則的記取、一個共同擁有的信念或者是一個矛盾的呈現。換句話說，一個 “argument” 是用來回答「為何你這麼說？…為何你相信？…」這一類問題的。參考 Duval（1999）。

36.同上。

37.事實上，在附圖中，他並未畫出此一長方形。

38.這種進路在「句中容圓」中比較隱晦。

39.此處所謂的「解析」（analysis）與「綜合」（synthesis），是引自古希臘數學家 Pappus，他是《幾何原本》等書的一位相當重要的評註者。參考 Fauvel & Gray（1987），pp. 208-209。有關此一文本之解說，請參考 Grattan-Guinness（1997），pp. 82-84。

40.有關這一點，郭書春也曾明確指出劉徽在證明陽馬、鼈臑的體積公式時，結合了分析法與綜合法。參考郭書春（1995），pp. 295-296。

41.引徐光啟和利瑪竇（1983），p. 44。我們對照的丁先生之文本，出自 Clavius（1591）第一卷第四十七定理的「注釋」VIII。

42.徐光啟和利瑪竇（1983），p. 1。看來，徐光啟希望讀者參考《幾何原本》中的「畢氏定理」， 請徵之於他在第三題之後的「備註」：「已（以）上三論，具見一卷四十七題（凡言某卷某題者，皆引《幾何原本》為證，下同）。」引同上，p. 2。

43.在《九章算術》卷九第十四題內容如下：「今有句五步，股一十二步，問句中容方幾何？答曰：方三步一十七分步之九。術曰：并句、股為法，句股相乘為實。實如法而一，得方一步。」劉徽提供了兩個註解，第一個利用出入相補，第二個則利用了相似直角三角形的邊比例關係。此處，我們只引述第一個註解以方便參考：「句、股相乘，為朱、青、黃冪各二。令黃冪衰於隅中，朱、青各以其類，令從其兩徑，共成脩之冪：中方黃為廣，并句、股為袤，故并句、股為法。」引自郭書春（1998），p. 456。

44.第一個「論曰」引文如下：「試自弦方之乙角，作乙子線與甲丙股平行而等。又自丙角作丙丁線，與甲乙勾平行而與甲丙股等。又自辛角作辛癸線與甲丙股平行，自庚角作庚戊線與甲乙勾平行，而皆與甲丙股等，則丙子、辛丁、癸庚、戊乙四線，必皆與甲乙勾等。而成乙子丙、丙丁辛、辛癸庚、庚戊乙四勾股形于弦實內，皆與原設之甲乙丙形等。於是，移丙丙丁辛形於乙壬庚位，移辛癸庚形與甲乙丙位，則丙庚大方變成甲丙丁癸庚壬磬折形。末從癸巳截之，成大小二方形，則丙巳之大方即股實，壬癸小方即勾實。（癸壬小方即勾實）是一弦實分為勾股二實也。若先以丙巳股實、癸壬勾實，聯為磬折形，而移乙壬庚勾股形於丙丁辛之位，移甲乙丙勾股形於癸壬庚之位，即復成丙巳弦實矣！」（梅文鼎, 1993a, p. 4）。

45.請注意：「勾實、股實，併之與弦實等」與「勾實、股實，併之為弦實」在語意（semantic）上的不同。

46.本圖出自三國（孫吳）趙爽注《周髀算經》中的「句股圓方圖」，被數學史家認為是證明「畢氏定理」的主要依據。

47.「弦和較」意指弦與句股和的差。

48.梅文鼎雖然在「皆弦和較之半也」後自注一段文字，但仍然未提及三角形「內心」性質。

49.在他的《平三角舉要》卷三中，梅文鼎提及「分角術」與「三角求心術」，不過，都未曾賦予證明。參考梅文鼎（1993b），p. 478。

50.此處之論述主要改寫自蘇俊鴻(2006)。至於梅文鼎的完整「翻譯」，則請參考李建勳（2006）。

51.在本書序言中，梅文鼎認為「西法用三角，猶古法之用句股也。」同時，「句股雖不能備三角之形，而能兼三角之理。三角不能出句股之外，而能盡句股之用。一而二、二而一者也。」因此，「必先知句股，而後可以論平三角也。」引梅文鼎（1993b），p. 461。這種觀點當然呼應了他的「幾何即句股」之主張。參考拙文，洪萬生（2006b）。

52.本小節主要改寫自蘇俊鴻（2006）。有關李善蘭證明之「翻譯」與論述，請參考陳春廷（2006）。

53.本書收入他自己的《則古昔齋算學》，1867 年出版。

54.李善蘭所謂的一、二、三、四率如下：「三邊半和為一率，任取一較為二率，餘二較相乘為三率，則垂線冪為四率。」

55.此一比例式之成立，可以從簡單的比例原理獲得。不過，顯然是為了證明它的一般性，李善蘭利用了圖 6 的幾何圖形。

56.至於他何以提出這樣的證法呢？則還需要更進一步研究。

57.陳春廷在完成一年的教學實習之後，回到本系就讀碩士班一年級。

58.他們兩位目前就讀本系所教學碩士班，每週前來參加我在 2006 年春季開授的「數學社會史專題」。有關李善蘭如何證明海龍公式，就是在這個課堂上充分討論。

59.在《幾何原本》中，正五邊形之作圖列為命題 IV. 11（第 IV 卷命題 11，以下仿此），歐幾理得的證明依序應用了命題 IV. 10，IV. 2，I. 9，III. 26，III. 29，III. 27。但是，李善蘭卻應用命題 XIII. 3，XIII. 9，XIII. 11，完成作圖之證明。

60.李善蘭在作圖前，並未如海龍公式之證明一樣，先進行相關條件之「解析」。這種進路完全符合《幾何原本》的模式。

可見他呈現數學論證的方式，也相當多元。

61.相關研究還需要深入進行，本文結論當然不好過度推衍。不過，本文之進路與本土數學教育研究成果之結合，則勢在必行。這將是筆者下一篇論文的主題。

62.在劉徽的註解中，「程序性知識」與「概念性知識」的互補，是一個非常獨特的風貌。參考 Horng（2000b）。

63.他們兩人都未曾引述劉徽的註解。

64.李善蘭在 1850 年代接觸西學第二次東傳之前，已經熟悉徐光啟與梅文鼎所會通的西算了，並據以完成他的原創性貢獻（如對數函數的無窮級數展開式與垛積術等）。因此，當他開始翻譯西方代數與微積分等書時，他的肆應當然算是「雙重」了。

65.他還有另一個途徑掌握海龍公式，那就是《數理精蘊》所提供的版本。參考李建勳（2006）。

66.正如本文第貳節中所引的安淑華之論點所強調。

誌　　謝

本文得力於國科會研究計畫 NSC # 94-2521-S-003-013-，# 94-2522-S-003-011- 之贊助，謹誌謝忱。另外，在撰寫期間，筆者利用「數學社會史專題」與「古代數學典籍研讀」課程之便，邀請研究生/中學教師如蘇俊鴻、蘇惠玉、英家銘、王鼎勳、程和欽、鍾秀瓏、廖淑芳、陳春廷、胡政德及李建勳，就本文部份文本內容深入討論，分享了極為難得的教學相長經驗。尤其是建勳，還幫忙繪製了圖 2 與圖 3，盛情可感！當然，筆者理當自負文責才是。

參考文獻

1. 大學入學考試中心（2001）：**指定科目考試參考手冊**。大學入學考試中心九十一學年度大學入學考試研討會。台北市：大學入學考試中心。
2. 中村元（1995）：**中國人的思維方法**。台北：學生書局（修訂版二刷）。
3. 王鼎勳（2006）：**有關李善蘭證明海龍公式的心得與討論**（未出版）。
4. 安淑華（2005）：追逐中國的教學方式：學 – 問和學 – 思的教學模式。載於范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編，**華人如何學習數學**（pp. 356-370）。南京：江蘇教育出版社。
5. 李建勳（2006）：海龍公式的流變 – 由徐光啟到梅玦成。**HPM 通訊**, **9**(4), 9-15。
6. 李瑾（2005）：中國文化的學習模式。范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編：**華人如何學習數學**（pp. 103-130）。南京：江蘇教育出版社。
7. 李善蘭（1867）：天算或問。收入李善蘭：**則古昔齋算學**, 十三。金陵刻本。
8. 李繼閔（1992）：**九章算術及其劉徽注研究**。台北：九章出版社。
9. 范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編（2005）：**華人如何學習數學**。南京：江蘇教育出版社。
10. 洪萬生（1991）：同文館算學教習李善蘭。載於楊翠華和黃一農主編：**近代中國科技史論集**（pp. 215-259）。台北：中研院近史所；新竹：清華大學歷史所。
11. 洪萬生（1994）：數學史上三個公式積圓面。**科學月刊**, **25**(7), 539-544。
12. 洪萬生（1999）：估計 $\sqrt[3]{100}$。載於洪萬生：**孔子與數學**（pp. 91-101）。台北：明文書局。
13. 洪萬生（2000a）：《算數書》的幾則論證。

台灣歷史學會會訊, 第十一期, 44-52。
14. 洪萬生（2000b）：《算數書》初探。**師大學報**, 科學教育類, **45**(2), 77-91。
15. 洪萬生（2003）：數學文化的交流與程序性知識。載於李弘祺主編：**理性、學術和道德的知識傳統**（pp. 1-48）。台北：喜馬拉雅研究發展基金會。
16. 洪萬生（2004）：教改爭議聲中，證明所為何事？。**師大學報, 科學教育類, 49**(1), 1-14。
17. 洪萬生（2005a）：從程序性知識看《算數書》。**師大學報, 人文與社會類, 50**(1), 75-89。
18. 洪萬生（2005b）：從古今翻譯看數學文化交流。載於黃毅英主編：**迎接新世紀：重新檢視香港數學教育 – 蕭文強教授榮休文集**（pp. 364-386）。香港：香港數學教育學。
19. 洪萬生（2006a）：**此零非彼 0：數學、文化、歷史與教育文集**。台北：台灣商務印書館。
20. 洪萬生（2006b）：當梅文鼎遇上《幾何原本》。**科學月刊, 37**(7), 504-508。
21. 洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻（2006）：**數之起源：中國數學史開章《筭數書》**。台北：台灣商務印書館。
22. 高大倫（1995）：**張家山漢簡《引書》研究**。成都：巴蜀書社。
23. 馬若安（Jean-Claude Martzloff）（2002）：17、18 世紀中國天文學與數理天文學著作中的時空觀。載於《法國漢學》叢書編輯委員會主編：**法國漢學**，第六輯（科技史專號）（pp. 448-474）。北京：中華書局。
24. 徐光啟（1983）：勾股義。載於蘇步青主編：**徐光啟著譯集**（八）（pp. 69-120）。上海：古籍出版社。
25. 徐光啟和利瑪竇譯（1983）：幾何原本。載於蘇步青主編，**徐光啟著譯集**（五-七）三卷。上海：古籍出版社。
26. 徐斌豔（2005）：外在表徵對中國學生數學學習的作用。載於范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編：**華人如何學習數學**（pp. 371-386）。南京：江蘇教育出版社。
27. 黃榮金和梁貫成（2005）：中國學習者悖論的質疑：透視香港與上海數學課堂。載於范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編：**華人如何學習數學**（pp. 274-297）。南京：江蘇教育出版社。
28. 黃毅英（2005）：儒家文化圈（CHC）學習者的現象 – 對數學教育的影響。載於范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編：**華人如何學習數學**（pp. 389-415）。南京：江蘇教育出版社。
29. 程和欽（2006）：對有關李善蘭證明海龍公式的一點心得。**HPM 通訊, 9**(4), 52。
30. 梅文鼎（1993a）：勾股舉隅。載於郭書春主編：**中國科學技術典籍通匯 – 數學卷**（四）（pp. 433-446）。鄭州：河南教育出版社。
31. 梅文鼎（1993b）：平三角舉要。載於郭書春主編：**中國科學技術典籍通匯 – 數學卷**（四）（pp. 461-505）。鄭州：河南教育出版社。
32. 蔡金法和維克多・西弗賴利（2005）：中國學習者的數學思維特徵 – 一個跨國比較研究的視角。載於范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編:華人如何學習數學(pp. 62-89)。南京：江蘇教育出版社。
33. 歐幾里得（1993）：幾何原本，十五卷（前六卷由利瑪竇、徐光啟譯自丁先生拉丁文版本，後九卷由偉烈亞力、李善蘭譯自某英文版本）。載於郭書春主編：**中國科學技術典籍通匯 – 數學卷**（五）（pp. 1151-1500）。鄭州：河南教育出版社。
34. 郭書春（1995）：**古代世界數學泰斗 – 劉徽**。台北：明文書局。
35. 郭書春譯注（1998）：**九章算術**。瀋陽：遼寧教育出版社。

36. 陳春廷（2006）：李善蘭如何證明海龍公式？。**HPM 通訊**, **9**(4), 16-22。
37. 顧泠沅、黃榮金和費蘭倫斯‧馬頓（2005）：變式教學：促進有效的數學學習的中國方式。載於范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編：**華人如何學習數學**（pp. 247-273）。南京：江蘇教育出版社。
38. 劉鈍（1993）：勾股舉隅、幾何通解提要。載於郭書春主編：**中國科學技術典籍通匯 – 數學卷**（四）（pp. 4431-432）。鄭州：河南教育出版社。
39. 蕭文強（2005）：中國古代官學數學課程：考生是怎樣學習和準備考試的？。載於范良火、黃毅英、蔡金法和李士錡主編：**華人如何學習數學**（pp. 131-150）。南京：江蘇教育出版社。
40. 蘇俊鴻（2006）：海龍公式各樣證法之特色。**HPM 通訊**, **9**(4), 35-40。
41. An, S.-H. (2004). Capturing the Chinese way of teaching: The learning-questioning and learning-reviewing instruction model. In Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. F. & Li, S. Q. (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 462-482). New Jersey/London/Singapore/Beijing/Hong Kong/Taipei/Chennai: World Scientific.
42. Berggren, J. L. (1990). Proof, pedagogy, and the practice of mathematics in medieval Islam. *Interchange 21*(1), 36-48.
43. Bulmer-Thomas, I. (1941). *Selections illustrating the history of greek mathematics* (Volume II). Cambridge, Mass: Harvard University Press.
44. Bunt, L. N. H., P. S. Jones, & J. D. Bedient (1988). *The historical roots of elementary mathematics*. New York: Dover Publications, INC.
45. Cai, J. F, & V. Cifarelli (2004). Thinking mathematically by Chinese learners. In Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. f. & Li, S. Q. (Eds.), (2004). *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 71-106). New Jersey/London/Singapore/Beijing/Hong Kong/Taipei/Chennai: World Scientific.
46. Chemla, K. (2005). Geometrical figures and generality in ancient China and beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, plato and thabit ibn qurra. *Science in Context 18*(1), 123-166.
47. Clavius, C. (1591). *Euclidis elementorum libri XV* (3nd ed.). Coloniae.
48. Cullen, C. (2002). Learn from Liu Hui? A different way to do mathematics. *Notices of the AMS* August 2002, 783-790.
49. Dauben, J. W. (1979). *Georg cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Cambridge, Mass/London: Harvard University Press.
50. Davis, R. B. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: A summary analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 265-300). Hillsdale, N.J./London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
51. Duval, R. (1999). Questioning argumentation. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical Proof,* November/December, 1999. Retrieved May 7, 2007, from http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html.
52. Duval, Raymond (2002, 11 月). *Proof understanding in mathematics: What ways for students?* 論文發表於 2002 數學論證國際學術研討會。台北市：國立台灣師範大學。
53. Engelfriet, P. (1998). Euclid in China: The genesis of the first Chinese translation of Euclid's elements books I-VI. Leiden/Boston/Koln: Brill.
54. Engelfriet, P., & Siu, M.-K. (2001). Xu Gu-

angqi's attempts to integrate western and Chinese mathematics. In Jami, C., Engelfriet, P. and Blue, G. (Eds.), *Statecraft & intellectual renewal in late Ming China: The cross-cultural synthesis of Xu Guangqi (1562-1633)* (pp. 279-310). Leiden/Boston/Koln: Brill.

55. Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. f. & Li, S. Q. (Eds.) (2004). *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders*. New Jersey/London/Singapore/Beijing/Hong Kong/Taipei/Chennai: World Scientific.
56. Fauvel, J. (1988). Cartesian and Euclidean rhetoric. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 25-29.
57. Fauvel, J. & G.ray, J. (Eds.) (1987). *The history of mathematics: A reader.* London: The Open University.
58. Fauvel, J. amd van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
59. Grattan-Guinness, I. (1997). The Fontana history of the mathematical sciences: The rainbow of mathematics. London: Fontana Press.
60. Gray, E. M., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 115-141.
61. Gu, L. Y., Huang, R. J. and Marton, F. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective mathematics learning. In Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. f. & Li, S. Q. (Eds.) (2004). *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives from Insiders* (pp. 309-347). New Jersey/London/Singapore/Beijing/Hong Kong/Taipei/Chennai: World Scientific.
62. Haapasalo, L., Kadijevichvich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal fur Mathematk Didaktik, 21*(2), 139-157.
63. Haapasalo, L., Kadijevichvich, D. (2003). *Simultaneous action of conceptual and procedural mathematical knowledge by means of ClassPad*. Paper presented at the ITEM 2003 Conference in Reims.
64. Haapasalo, L. (2003). Linking procedural and conceptual mathematical knowledge in technology-based learning. In A. Rogerson (Ed.), *The Decidable and Undecidable in Mathematics Education – Proceedings of the International Conference in Brno* (pp. 98-101). CZE.
65. Heath, T. L. (1956). *Euclid: The Thirteen Books of the Elements* (3 volumes). New York: Dover Publications, INC.
66. Hiebert, J. (1986). Conceptual and procedural knowledge: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.) (1986), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, N.J./London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
67. Horng, W.-S. (2000a). The Pythagorean theorem in different cultures. In Fauvel, J. and Maanen, J. V. (Eds.) *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 258-262), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
68. Horng, W.-S. (2000b). Euclid versus Liu Hui: A pedagogical reflection. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics* (pp. 37-48). Washington D.C.: MAA.
69. Horng, W.-S. (2001a, November). *Intrinsic cognitive dimension of the HPM: Text versus context*. Paper presented at The Netherlands and Taiwan Conference on Common Sense in Mathematics Education, Taipei: National Taiwan Normal university.

70. Horng, W.-S. (2001b). The influence of Euclid's *elements* on Xu Guangqi and his successors. In Jami, C., Engelfriet P. and Blue, G. (Eds.), *Statecraft and intellectual renewal in late Ming China: The cross-cultural synthesis of Xu Guangqi (1562-1633)* (pp. 380-398). Leiden/ Boston/Koln: Brill.
71. Huang, R. J. and Leung, Frederick K. S. (2004). Cracking the paradox of Chinese learners: Looking into the mathematics classrooms in Hong Kong and Shanghai. In Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. f. & Li, S. Q. (Eds.) (2004). *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives from Insiders* (pp. 348-381). New Jersey/London/Singapore/Beijing/Hong Kong/Taipei/ Chennai: World Scientific.
72. Lam, L.-Y. and Ang, T.-S. (1986). Circle measurement in ancient China. *Historia mathematica, 12*, 325-340.
73. Li, J. (2004). A Chinese cultural model of learning. In Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. f. & Li, S. Q. (Eds.) (2004). *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 124-156). New Jersey/London/Singapore/Beijing/Hong Kong/Taipei/Chennai: World Scientific.
74. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.
75. Siu, M. K. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on *Jiu Zhang Suan Shu*. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 345-357.
76. Siu, M. K. (2004). Official curriculum in mathematics in ancient China: How did candidates study for the examination? In Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. f. & Li, S. Q. (Eds.) (2004). *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 157-188). New Jersey/London/Singapore/Beijing/Hong Kong/Taipei/ Chennai: World Scientific.
77. Siu, M. K., Volkov, A. (1999). Official curriculum in traditional Chinese mathematics: How did candidates pass the examinations? *Historia Scientiarum, 9*(1), 87-99.
78. Tall, David (2002, November). *Differing Modes of Proof Belief in Mathematics*. 論文發表於 2002 數學論證國際學術研討會。台北市：國立台灣師範大學數學系。
79. Van der Waerden, B. L. (1983). *Geometry and algebra in ancient civilizations*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.
80. Volkov, Alexei (1992). Analogical Reasoning in Ancient China: Some Examples. In K. Chemla ed., *Regards obliques sur l'argumentation en Chine* (pp. 95-110), *Extreme-Orient Extreme-Occident*, no. 6, Paris: PUV.
81. Volkov, A. (2004, May). History of ideas or History of textbooks: Mathematics and mathematics education in traditional China and Vietnam. In Horng, W.-S., Lin, Y.-C. Ning T.-C. & Tso, T.-Y. (Eds.), *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference: History, Culture and Mathematics Education in New Technology Era* (pp. 57-80). Taichung: National Taichung Teachers College.
82. Wong, N.-Y. (2004). The CHC learner's phenomenon: Its implications on mathematics education. In Fang, L. H., Wong, N.-Y., Cai, J. f. & Li, S. Q. (Eds.) (2004). *How chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 503-534). New Jersey/London/Singapore/Beijing/ Hong Kong/Taipei/Chennai: World Scientific.

83. Wong, N.-Y. (2006). From 'entering the way' to 'exiting the way': In search of a bridge to Span 'basic skills' and 'process abilities'. In Leung, Frederick K. S., Graf, K. & Lopez-Real, F. J. (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of east Asia and the West* (pp. 111-128). New York: Springer Science + Business Media, Inc.

Case Studies of Traditional Chinese Mathematical Reasoning: Liu Hui, Xu Guangqi, Mei Wending and Li Shanlan

Wann-Sheng Horng
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Abstract

This article briefly reviewed *How Chinese Learn Mathematics* and thereby synthesized author's own studies concerning HPM. The aim was to abstract some relevant concepts upon which this study based to analyze mathematical reasoning of traditional Chinese mathematicians Liu Hui, Xu Guangqi, Mei Wending and Li Shanlan. As for the methodology, this study adopted the analysis of historical literature as well as comparative historiography. On the one hand, this study contrasted Liu Hui and Euclid, Liu Hui and Archimedes as well as Liu Hui and Heron in order to understand how Liu Hui makes reasoning on his own terms. On the other hand, this study investigated how Xu Guangqi, Mei Wending and Li Shanlan adapted the Western mathematics and integrated it with the Chinese mathematics under the influence from Western mathematics. The basic tool for comparative study was Mei Wending and Li Shanlan's proof on Heron's formula. As concluding remarks, the author comes to suggest three different connections, namely those between two forms of conceptual knowledge, between one form of conceptual and one procedural, as well as between two forms of procedural knowledge, can be used to characterize some aspects of traditional Chinese mathematical argumentation in which the four mathematicians had due role to play. Since these terms are due to mathematics education, the author hopes this article can serve as a demonstration for integration of researches in mathematics education and those in history of mathematics.

Key words: Conceptual Knowledge, Procedural Knowledge, Reasoning, Synthesis of Proposition and Diagram, Traditional Chinese Mathematician