科學教育學刊
2007, 第十五卷第六期, 647-669

Chinese Journal of Science Education
2007, 15(6), 647-669

數常識情境教學活動融入國小三年級數學科教學之研究

楊德清[1]　**吳宛儒**[2]
[1]國立嘉義大學　數學教育研究所
[2]桃園縣　幸福國民小學

（投稿日期：民國95年3月17日，修訂日期：96年11月1日，接受日期：96年11月22日）

摘要：本研究將數常識（Number sense）情境教學活動融入國小三年級課室中，主要目的在了解兒童解數常識情境問題之表現，並探討數學課室之教學歷程。因此，本研究採個案研究法，以一班三年級的學生為對象，實施過程導向教學，以探究數常識情境教學的成效。研究結果顯示，學生在教學前後之相同數常識測驗成績經由 t 檢定分析，結果達顯著水準（$\alpha < .01$），此顯示學生在教學後，不但數常識能力有明顯之增長，原課程之教學目標亦可達到。更由教學中的師生互動、學生的解題記錄和觀察資料中發現，數常識情境教學活動不但建立了學生的數概念，也提升了學生的數常識能力，培養學生閱讀題目的習慣，增進學生對題意的理解。此外，過程導向教學有助於提升學生的數常識，透過教師的鼓勵與同儕間的互助合作，提升了學生的學習意願，建立學習的信心。

關鍵詞：三年級、真實數學、過程導向教學、數常識、數常識情境活動

壹、前　言

近年來，澳洲教育委員會（Australian Education Council [AEC], 1991）以及美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000）皆認為數常識教學為中小學數學教育所不可缺少的主題，並將數常識列為數學教育改革的重要議題，足見數常識在數學教育上的重要性。而國內之數學教育相關研究，亦逐漸意識到數常識的重要性（楊德清, 2002）。同時，檢視九年一貫數學領域課程綱要，可以發現其精神強調數學教學應與生活化結合，提供兒童熟悉的事物讓兒童自行探索並尋求其中的知識。但是，過往之中小學數學教育由於過於重視結果，以致教學太過機械化，雖然學生熟稔解題技巧，可是卻無法將數學知識應用到真實情境的問題解決中，所以知識的學習是蘊含於情境脈絡中，也是學習活動之內的重要部份（Brown, Collins, & Duguid, 1989）。

NCTM（2000）在「學校數學課程及評量標準」一書中便主張「本標準之重心旨在發展兒童的數常識」。從九年一貫數學領域

課程綱要之主張亦可發現在數與量之主題中所強調之內容亦與數常識的內涵相呼應。現階段越來越多的研究支持數常識的教學活動可以顯著降低兒童早期階段數學學習的失敗（Griffin, 2004; Griffin, Case, & Siegler, 1994）。Verschaffel（2002）在數學解題的研究發現，數學題目涉及的情境會影響學生的解題。因此，若多提供機會給學生去解生活情境的問題，則有助於學生處理生活中的數學問題，同時亦有助於數學解題能力的提升。

如上所述，具備數常識能力之重要性已備受肯定，但由於過往之數學教育過度強調程序性知識之獲得，在教學中忽略了數學問題與情境的結合，以致無法將數學知識應用到真實情境的問題解決中。所以，如何將數常識情境教學活動融入國小三年級課室中？學生解數常識情境問題之表現為何？國內並無相關研究。有鑑於此，研究者將數常識融入於生活情境的數學問題中，透過過程導向之方式進行教學，以探討學生解數常識情境問題之表現，同時期望本研究可以提供未來教學活動設計之參考依據。基於上述之動機，本研究之目的為：

一、數常識情境教學活動融入小三數學課室後，探討兒童解數常識情境問題之表現。

二、數常識情境教學活動融入國小三年級兒童數學課室之教學歷程的探討。

貳、文獻探討

一、數常識（Number sense）理論基礎？

何謂數常識？數常識可以解釋為個人能夠意義化數字與運算之精髓，理解數字和運算所產生之情境，具備使用參考點的能力，並能夠以彈性的方法發展解題策略與處理日常生活中的數字問題，同時能夠判斷答案的合理性（Markovits & Sowder, 1994; NCTM, 2000; Yang, 2003）。

本研究參考相關之文獻（McIntosh, Rey, & Rey, 1992; NCTM, 2000; Yang, 2006），並配合三年級之數學學習內容，歸納出本研究之四個數常識組成成分，說明如下：

(一)瞭解數字與運算之意義及關係

在解決數字問題的情境裏，有許多學生缺少對數字與運算的瞭解（Kouba, Brown, Carpenter, Lindquist, Silver, & Swafford, 1988; Yang, 2002）；如台灣四年級學生在 TIMSS2003 年國際數學成就表現中，對於校外租車問題、廚工需要為學生訂購多少條吐司等情境問題，由於忽略真實情境的考量，而以小數呈現答案（林碧珍、蔡文煥, 2003）。NCTM（1989）提到，假如孩子要有意義的使用數字於日常生活情境，那麼他們就必須了解數字與運算的意義。由於數字與運算本身是抽象的，其意義在於我們所賦予它的價值，學生透過設計良好之教學活動，才能思索數字與運算間的關係。例如：若要買356元的東西，則知道至少要付4張100元才夠。透過生活中和數學有關的事物，作為數學學習的素材，除了讓學生更加瞭解數字所代表涵義外，亦能培養學生思考的能力。

(二)具備比較數字大小的能力

比較數字大小的能力包括：(1)能將數字做比較的能力：學生對位值的概念會影響數字比大小之正確性。例如：在整數系統中，比較101和98的大小時，可從高位數開始比較得知101大於98。(2)能將數字做排序的能力：當學生面臨一串數字時，可以依規定之大小順序排出正確的順序，或當面臨數詞序列時，能在判斷題目後於空格中填入答案。Sowder 和 Kelin（1993）主張透過情境問題來發展學

生比較數字大小的能力，較能提升兒童對數字的理解。

(三)運用參考點的能力

參考點可以解釋為個人在解決問題時用來當做基準的指標。McIntosh 等人（1992）認為參考點通常可以被使用於判斷一個答案的大小或者選擇一個約略數字以方便於估算或心算的進行。NCTM（1989）認為兒童能夠發展並運用參考點於生活情境中，是培養數常識能力的主要途徑之一。例如：以二年級小朋友兩手張開之手臂長（1公尺）為參考點，學校校門口約6個手臂長，意即約6公尺長。

(四)能發展計算策略與判斷答案合理性的能力

包含心算、估算、估測等策略的發展。一個有良好數常識的解題者在解題過程中，會根據題意而預設合理答案的可能類型與可能數目，並能據以拒絕不合理的答案（Dougherty & Crites, 1989）。適時的運用估算策略，從簡單的方法得到和答案很接近的數字的能力，應是較符合生活上的實際需求。

由上述四個成份所組成的數常識架構，構成本研究之理論基礎。

二、情境認知之相關研究的探討

若數學問題是取自於生活中的真實情境，內容是符合生活的，也是兒童會親自面臨的問題，對兒童來說是「有趣的」、「熟悉的」，如此一來兒童的學習興趣提高，解題動機也相對提高（賴怡君, 2002）。國外許多情境相關之研究（Browns et al., 1989; Carraher, 1988; Lave, 1988; Lave & Wenger, 1991）即指出孩子的數學認知能力以及她（他）們所處的日常生活情境之間有高度的相關性。Lesh 和 Lamon（1992）認為真實數學活動應該是發生於日常生活情境中，或是與學生之實際生活經驗具密切之相關性；因此他們主張真實數學活動應具備四項特徵：(1)真實的數學：包含數與量、圖形與空間、機率與統計、代數等真實之數學概念；(2)真實的情境：真正發生於學生日常生活經驗中的情節；(3)可能會發生於真實的生活情境中之問題爭論之議題；(4)真實的工具與資源：解數學問題時，應允許學生使用日常生活中垂手可得之工具或資源，如電算器或電腦等。Brown 和 Duguid（1993）以及 Suchman（1987）之研究進一步指出數學學習必須透過真實經驗的活動，方能夠將所學得的知識與技能應用於日常生活情境裡，若非如此，數學的學習將變成抽象符號的運用，而無法了解其真正之內涵。

此外，國內學者蔡文煥和林碧珍（1998a, 1998b）亦主張將兒童所熟悉之日常生活情境融入數學教學活動或數學遊戲中，可以促進孩子的數學學習，同時可以幫助孩子數學概念的發展，她（他）們的研究進一步指出將情境融入學校數學活動之教學可以有效地幫助孩子進行相關數學概念的連結。黃國勳和劉祥通（2006）透過以情境認知為取向之教學的實踐，例如運用撲克牌之大老二活動，研究結果亦顯示可以有效地幫助小五學生發展因數概念、促進數學知識與生活情境之相連結。

綜合上述之文獻評析，可以發現情境在數學學習之重要性與其價值，研究者本身之教學經驗與研究亦發現透過真實情境的佈題的確可以有效提升孩子的數學學習成效。基於此，研究者乃參考 Greenes, Schulman 和 Spungin（1993）之教學活動設計模式，將學生所熟悉之真實生活情境融入教學活動中，讓學生跳脫以往只顧解題計算的模式，培養學生從了解題意、判斷關係與推理思考著手，

以培養學生的數常識。

三、數常識情境教學之相關研究的探討

Griffin（1995）設計以情境學習觀為主的課堂教學活動，在比較它與傳統教學二者之間的成效後，發現情境教學法的確優於傳統課堂教學。一些數常識相關之教學研究（Markovits & Sowder, 1994; Yang & Reys, 2001a, 2001b）發現透過設計良好的教學活動可促進學童數常識的發展，且具長期保留效果。Greenes, Schulman 和 Spungin（1993）指出發展數常識的方法可以藉由設計良好之文字題中展現，每個問題是一則小故事，故事中蘊含著真實情境的數量關係，學生藉由所提供的情境，以合理的將數字填入題目的空格處，使問題情境符合數學化及意義化。同時，Yang（2006）運用「過程導向教學模式」在其教學研究中，並將真實生活情境問題融入教學活動中，研究結果發現，當學生能應用和連結真實生活情境中的數學概念時，他們便能理解數學的重要性和實用性。

綜合上述，將真實生活情境融入數學學習中，可以幫助孩子提升數常識。因此，本研究參考情境學習之相關文獻（Choi & Han-nafin, 1995; OECD, 2004; 賴怡君, 2002），以及依據 Greenes 等人（1993）所提出之「Fill In Number to Fit the Facts Problems」問題，提出「數常識情境教學」，改編某版本第六冊第一單元「一萬以內的數」，以及結合楊德清（2002）所提出之過程導向教學，將學生所熟悉之生活情境融入數常識文字題中，透過小組討論的模式，培養合作解題、溝通、發表的能力，讓學生不僅可以學習到相關的數學知識，亦可增強自身的數學能力。

參、研究方法

一、研究法

本研究採個案研究法，以數常識情境活動融入小三數學教學為主題進行研究，以探討教學歷程、了解兒童的學習表現，並藉由訪談深入探討學生教學前後數常識的成長。

二、研究參與者

(一)參與學生

為了研究之便利性，乃以研究者任教之班級進行教學，班上共有30名學生（男生15名、女生15名）。家長之社經背景差異頗大，包含工、商、公等各階層。

(二)研究參與者

研究者暨教學者：現任教於小學，具6年之教學經驗，自任教以來均擔任中年級的級任導師，因此，對於中年級的教材相當熟稔，平常數學課的教學過程中，大多採用小組討論的方式進行，鼓勵學生發表、溝通、以及培養表達能力。

研究參與者：目前是數學教育師資培育者，在研究過程中，提供理論支持，使研究可以順利進行。同時在資料分析上，協助進行三角校正，讓資料的詮釋更加客觀正確。

三、教學活動設計

本研究的教學實驗共設計五個活動，每個活動的教學時間為2堂課（80分鐘），共10節課。研究者首先分析教材內容與單元目標，活動設計時，除了配合教學目標與問題情境是否符合學生的真實生活經驗外，並融入數常識的各組成成分。本研究教學單元為某教科書第六冊第一單元「一萬以內的數」，教學目標為：[目標1]：進行一萬以內各數的說、讀、聽、寫、做；[目標2]：認識一萬以內各數的位值，進而理解0所代表之意義；[目標3]：比較1萬以內兩數的大小認識；[目標4]：認識2000元、1000元、500元、200元的錢幣，並

能在生活中使用。依上述教學目標，搭配本研究之數常識成分；同時參考 Greenes 等人（1993）之論點及其它相關文獻，研究者設計五個教學活動，每個活動以情境為主軸進行設計。活動內容如表1：

各活動中所搭配的數常識成分與教學目標之關係羅列如下表2：

經由一位數學教育專家與兩位熟稔數常識之國小教師協助審閱上述之教學活動，提供修改意見，並一致同意這些活動符合原課程之教學目標與數常識之精神。

四、教學流程：過程導向式教學

本研究採用過程導向教學法，此教學鼓

表 1：數常識情境教學活動

活動名稱	活動內容	答案選項
活動一 健康檢查	三年六班利用 3 月 ① 日到保健室健康檢查，班上最矮的是俊偉，最高的是小華，俊偉的身高是 ② 公分，小華的身高是 ③ 公分，2 人相差了 ④ 公分，後來進行體重測量，小華的體重是 ⑤ 公斤，老師說他是班上最高最壯的小朋友。	20 120 100 52 140 12
活動二 租房子	明美家住在明興街 2 號三樓，家裡一共有 4 間房間，房租比停車費還貴，每月要付房租 ① 元，如果再加上每個月的停車費 ② 元，每月共要付 ③ 元。每次爸爸去領錢給房東時，都要領 ④ 張 1000 元才夠付房租和停車費，當然，領 ⑤ 張 2000 元也是可以的。	10 8 5 2000 10000 8000
活動三 合作社	每節下課，到合作社買東西的人都很多，以下是合作社經理所做整理： •第一節下課時收銀機裡的零錢，1 元的有 20 個、10 元的有 8 個、50 元的有 ① 個，全部合起來是 300 元。 •中午時，收銀機裡 100 元的紙鈔有 ② 張，合起來是 ③ 元。 •1 箱礦泉水 200 元，今天共賣出 ④ 箱，賣了 ⑤ 元	6 8 3 4 600 800
活動四 運動會	我們學校操場一圈是 ① 公尺，運動會比大隊接力時，每人跑半圈，也就是每人要跑 ② 公尺。班上前 7 棒都領先，7 人共跑了 ③ 公尺，到第 14 棒跑完時，一共跑了 ④ 公尺。如果班上 30 人都下場跑大隊接力，全班共跑了 ⑤ 圈操場。	100 700 200 1400 15 30
活動五 百貨公司週年慶	百貨公司舉行週年慶，全館大特價，小毅和媽媽到玩具館看到了三樣他喜歡的玩具：益智遊戲組 五百多元　機器人 四百多元　布偶 三百多元 小毅身上有 1200 元，最多可以買 ① 種不同的玩具，如果買最便宜的玩具最少要付 ② 張 100 元。媽媽打算買一隻電動寵物狗 ③ 元回家養，它的價錢比電動汽車還貴，所以電動汽車賣 ④ 元，媽媽至少要付 ⑤ 張 1000 元才能買下電動寵物狗。	3999 4005 5 4 3 2

表 2：教學活動內容與數常識組成成份及教學目標知關係

活動名稱	數常識組成成份				教學目標			
	成份一	成份二	成份三	成份四	目標一	目標二	目標三	目標四
活動一	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
活動二	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
活動三	✓	✓		✓	✓	✓		
活動四	✓		✓	✓	✓			
活動五	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

勵兒童以自己的方式思考與解題，並勇於與他人溝通，分享彼此的想法與解題方式。楊德清（2002）之研究指出，過程導向教學可以有效鼓勵學生進行探索、溝通、討論、思考與勇於分享解題經驗，而兒童的數常識較能夠被孕育與成長。依上述原則，教學流程如圖1所示：

五、評量工具

本研究使用兩份測驗卷，第一份測驗卷乃依據原修改之課程目標及教學內容設計而成，以選擇題和填充題兩部分呈現，並於教學後進行測試，主要目的是為了檢核學生的學習情形，如下表3。本測驗卷之內部一致性係數為0.86。

第二份測驗卷參考李威進（2004）所編製之國小第一階段電腦化數常識測驗量表，以當做本研究之平行測驗卷。本量表包含20個問題，題目以選擇題方式呈現，如下表4。本卷分別於教學前（前測）及教學後（後測）進行測驗，以檢核學生在數常識之概念與能力之進步情形。

第二份測驗卷之內部一致性係數為0.77。在效度考驗方面，本量表最初設計90題的測驗問題，並請三位有數學科多年教學經驗的老師就試題內容逐題審閱。經比對三

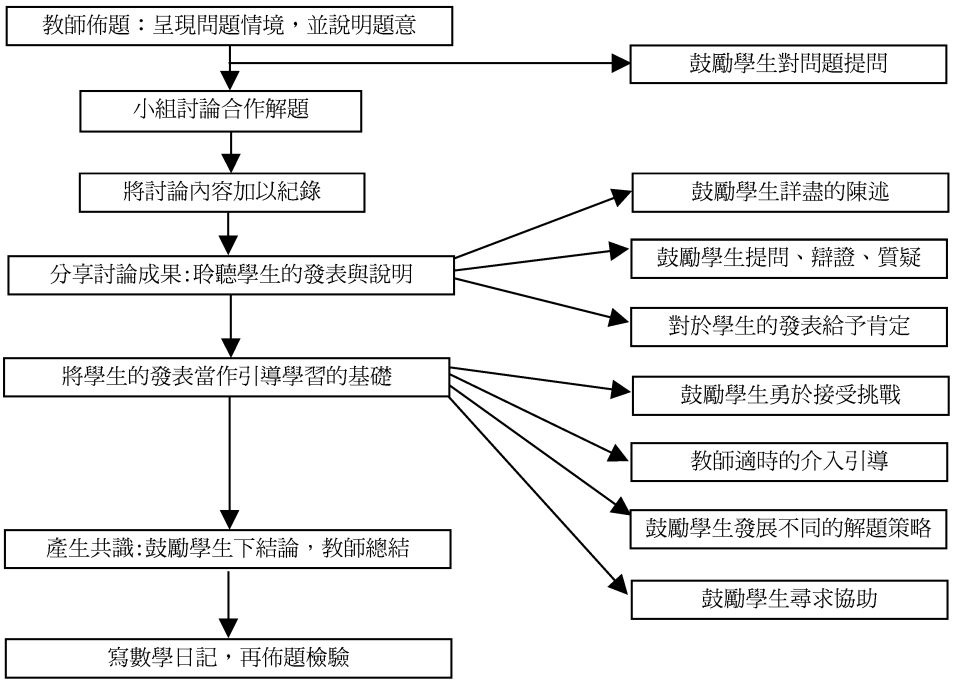

圖 1：過程導向之教學活動流程（引自楊德清, 2002, p. 238）

表 3：第一份數常識測驗卷之雙向細目表

數常識各組成成份	選擇題		填充題	
	題號	題數	活動 1（5 格）	活動 2（5 格）
成份 1（瞭解數與運算的基本意義）	1, 2, 6	3	✓	✓
成份 2（比較數字的相對大小）	3, 4, 7	3		✓
成份 3（運用參考點的能力）	9, 10	2	✓	✓
成份 4（運算結果之合理性的判斷）	5, 8	2	✓	✓

表 4：第二份數常識測驗卷之雙向細目表

數常識各組成成份	題號	題數
成份 1（瞭解數與運算的基本意義）	1, 2, 5, 12, 14	5
成份 2（比較數字的相對大小）	4, 7, 10, 11, 15, 16	5
成份 3（運用參考點的能力）	3, 6, 8, 9, 16	5
成份 4（運算結果之合理性的判斷）	13, 17, 18, 19, 20	5

位教師的審查意見，將超出學生學習範圍的題目刪除，修改題意不清之問題，然後請二位數學教育專家針對試題內容的代表性及周延性進行檢視，進而選出具代表性之50題題目。最後經過二階因素分析選出20題具代表性之問題，因此，此測驗卷具備良好之內容效度。

六、資料的蒐集與分析

本研究透過紙筆測驗、課室觀察紀錄、學生的數學日記、教學省思札記等方式來蒐集資料，並透過不同的資料來源，以減少單一方法的不足。研究者逐步將這些資料經過編碼、整理、分析等步驟，形成研究結果。

研究者將所有資料進行編碼轉譯，例如：【AS25】代表教學活動1座號25號學生課堂上的發言；【BS31記】代表教學活動2座號31號學生所填寫的數學日記；【CG4S8】代表在教學活動3第4組小組討論時座號8號學生的發言；【940410觀】代表94年4月10日教學觀察；【940412省】代表94年4月12日教學省思紀錄。

關於資料的分析，在質的部分，研究者解讀所蒐集到的資料，以發現研究內容的關係，並排除與研究無關的部分，進行資料分類的工作，透過多方面的資料與相關人員的觀點，表徵學生的學習情況。在量的部分，研究者將針對學生的作答情形，進行統計分析。最後，進行撰寫報告，並透過三角檢定，將資料不斷的檢視後，獲得一致性的闡釋。

肆、研究結果與討論

本研究之教學設計包含五個情境問題，本節將從兩個向度探討學生的解題表現及教學歷程。除了瞭解研究對象在數常識測驗的解題表現外；接著探討過程導向之數常識情境教學活動的實踐歷程，並分析學生的數學日記，針對教學前後的發現進行反思。

一、學生在數常識測驗的表現

本節報告學生在第一、二份測驗卷的表現。

(一)學生在教學後之第一份測驗卷的表現

如表5，首先將後測題目依數常識組成成

表 5：學生在教學後的數常識測驗各組成成分答對率分析表

數常識成份與教學目標	成份一（選擇第 2.6.10 題）目標 1,2,4	成份二（選擇第 1.3.7 題）目標 1,2,3	成份三（選擇第 4.8 題）目標 1,2	成份四（選擇第 5.9 題）目標 1,2,4	填充題（共 10 格）目標 1～4
答對率	75%	85%	49%	80%	81%
	選擇題平均答對率 72%				

分區分，以分析學生在各成分的作答表現：

上表顯示，學生在教學目標與數常識各成份的表現皆不錯，填充題答對率為81% 優於選擇題的72%，由學生的作答表現顯示出多數學生在面對數常識情境填充題時已能掌握解題方向。在選擇題方面，學生除了成份三參考點的問題表現較不理想外，其它成份的答對率均在75% 以上，尤以成份二比較數字大小的能力上表現最佳，答對率為85%。此結果與林姿飴（2005）之研究結果相一致。其次是成分四的發展計算策略及判斷答案合理性的能力，答對率是80%；接著是成分一的瞭解數字與運算的意義及關係之能力，答對率為75%，答對率最低的是成分三的使用參考點的能力，答對率為49%。由此可見，學生在參考點問題的表現較弱，除了學生對數線問題不熟悉外，對於題目中之數學問題（如：書包重量、操場大小…等）缺乏具體的概念，因而影響參考點問題的作答表現。此結果亦呼應了楊德清（2002）的研究，顯示出國內學生使用參考點的能力較缺乏。

(二)學生在平行（第二份）測驗卷之前後測表現

為了讓研究更具客觀性，乃採用李威進（2004）所編製之數常識測驗量表，來進一步檢驗學生的數常識。經成對樣本 t 檢定分析顯示 t 值 = 13.649（$p < .01$），達顯著水準，如表6所示：

下表顯示學生的後測平均分數（11.07分）較前測平均分數（8.03分）為優，而 t 值 = 13.649，$p = .000 < .01$，考驗結果達顯著水準，表示學生前後測表現有顯著差異，答對率由40% 提升到55%，此顯示教學後，學生在數常識測驗上的表現有顯著進步。為比較學生前後測答對率的改變，將學生的作答情形列於下表7：

從下表可以看出，學生在接受同一份測驗卷的評量結果，大部分題目的答對率都有提升，除了第2、4、12題沒有進步。研究者推論，由於前測時正進行乘法單元的教學，因此多數學生在面對關於乘法符號的問題時（第2、4題）均能成功作答，但是相隔4個月後再次進行測驗，部分學生由於當時沒有融會貫通，以致面對相同題目卻無法成功解題，使得答對率下降。進步最多的題目為第19題（題目：王先生養了40隻羊，10隻牛，請問王先生幾歲？）答對率由7% 提升至50%，由於問題設計的目標就是學生能具有判斷答案合理性的能力，且訓練學生閱讀題目的能力，

表 6：教學前後學生紙筆測驗成績 T 檢定摘要表

	平均數	題數	答對率	標準差	t 值	相關	顯著性
前測	8.03	20	40%	3.27	13.649	.969	.000
後測	11.07	20	55%	4.08			

$\alpha = .01$

表 7：教學前後學生紙筆測驗答題情形分析表

題號	前測答對率	後測答對率
1	63%	73%
2	60%	57%
3	40%	63%
4	90%	83%
5	70%	83%
6	10%	37%
7	37%	57%
8	3%	30%
9	40%	77%
10	30%	53%
11	30%	37%
12	37%	37%
13	43%	47%
14	40%	43%
15	43%	50%
16	30%	57%
17	53%	87%
18	13%	23%
19	7%	50%
20	60%	63%

學生必須掌握題意、發展題目間的關係，才能正確作答。根據教師的觀察及經驗，多數學生平時解題時都習慣只看數字而急於計算，並沒有清楚的了解題意，以致在前測時，大多數學生都答錯。在進行數常識情境教學之後，明顯看出約一半的學生在解題前已經能夠做到先理解題意再解題的動作。

測驗結果亦顯示學生對於數字意義的掌握及判斷答案合理性之能力有所提升，例如：（17）小至今年10歲，他的身高是140公分，正常發育的話，他20歲的身高大約幾公分？此題的答對率由53% 提升至87%，部分學生初始對於身高該是多少才合理並沒有概念，教學後，儘管仍有少數學生不瞭解題意，但多數學生已能掌握對於正常發育20歲的人而言，選項中的170才是合理的答案。

除上述題目的分析外，從學生表現上亦可看出，學生在關於數線的題目（如：第3、6、14題）及運算的等價表示式（如：第8、12、16題）之解題表現尚有進步的空間，部分原因在於此類問題鮮少出現於課程中。因此，教師日後在題目的設計上，除了教科書所提供的題材外，亦應提供此類問題給予學生學習的刺激與思考的機會。

二、數常識情境教學活動之實踐歷程

本節將探討數常識情境教學活動之實踐歷程，針對數常識之四個組成成分逐一探討數常識教學活動歷程：

(一)學生在「瞭解數字與運算意義及關係」之教學歷程

首先針對「瞭解數字的意義」進行分析，接著分析「數字與運算關係」之學習表現。

1.瞭解數字的意義

透過教學活動一「健康檢查」來探討學生在數字的意義這部分的學習表現。

(1)以關鍵字決定答案以致錯誤解題

學生因為以題目中的關鍵字決定答案，忽略了答案的合理性以致出現錯誤的解題。活動一的問題設計除了要培養學生注意題目前後的數字關係外，亦同時讓學生思考三年級學生的身高、體重應該要多少才是合理的答案。原案如下：

（原案1）

AS16-065：我們先從第五題開始算，是140公斤，因為題目說，小華是最高最壯的，所以是從數字中選最大的。

從原案1可以看的出來，該組學生在解第5個問題時，因為題目中所描述的語句：「…老師說他是班上最高最壯的小朋友。」由於看到最高最壯的字詞，所以便從答案選項中選擇了最大的數字當作答案（AS16-065）。從教學現場也發現到，儘管每個學期的健康檢查（測量身高、體重、視力）是例行事務，

但是部分學生對於自己的身高、體重並沒有概念，所以根本不曉得140公斤究竟是多重，因此，學生不易察覺自己的解題錯誤。

(2)學生對於同儕的錯誤解法提出質疑，並加以舉例說明

在確定學生以關鍵字決定答案以致錯誤解題後，教師持續針對該組的問題進行以下的對話，並同時鼓勵其他學生提出自己的想法：

（原案2）

AT-080：有沒有人有其它的問題，或是要說說看你的想法?

AS-081：我有問題~

AS11-082：如果他的體重是140，那不就變成相撲大力士了嗎?（學生笑~）

AS-083：對呀~對呀

AT-084：為什麼你說體重是140就會變成相撲大力士呢? 你是怎麼判斷的呢?

AS-085：我知道（多人舉手）。

AS11-086：因為小朋友一般的體重最多大概五十幾。

AT-087：你為什麼會認為最多大概五十幾公斤?

AS11-088：因為我媽媽也才三十幾。

AT-089：喔~他從他媽媽的體重才三十幾公斤來判斷小朋友就算很重很重，會不會到140?

AS-090：不會，不可能。

以學生的認知而言，140公斤是很重的，而相撲選手長得很胖，因此拿140公斤等於相撲選手的體重這樣的例子，對學生而言是很貼切的，可以讓其它的同學對140公斤更加具象化。同時 S11以媽媽的體重為例，讓其他學生了解140公斤是不大可能發生在三年級學生的身上。

(3)學生想法的改變與進步

由於第1組學生以關鍵字解題，因此以下特地提出第一組兩位學生在課後解練習題時的記錄，從學生回答練習題的問題可以看出學生在教學過後想法的改變。解題記錄呈現如下圖2：

S15經過課堂的討論過後，修正原先的想法（以關鍵字解題），接受同儕的看法，了解到體重100多公斤有如大力士般的體重對於四年級學生而言是不大可能的，而由於小銘是班上最重的，所以23、20也不會是答案。藉由解題記錄進一步確定學生的想法，可以說明學生可以從不同的角度思考問題，比較能夠掌握住數字所代表的意義，而不是執著於原先的錯誤解法。

從以上的分析可知，學生在教學後，能夠逐漸掌握對數字意義的理解，並進一步對同儕的錯誤解法加以質疑進而舉例說明，學生的成長與進步是清楚可見的。NCTM（1989, 2000）主張，假如孩子要有意義的使用數字於日常生活情境，那麼他們就必須了解數字的意義。由此可知，讓學生習慣在解題前先理解題意、掌握數字的意義是很重要的。

2.數字與運算的關係

在研究過程中發現學生在數字與運算的關係部份，學生透過乘法運算解題，具備數字合成與分解的能力；以下透過活動二逐一探討學生在這個層面的表現：

(1)學生藉由討論中產生對數字與運算之意義的掌握

學生不管問題情境的前後關係只單憑題目中的某句話便做答的情形是較常見的學習問題，因此，本活動設計考慮到這一點，在問題的設計上以關係題的方式呈現，希望養成學生先將題目完整看完的習慣。以下呈現

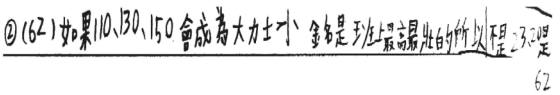

圖 2：S15 練習題 A2 的解題記錄

活動二「租房子」的學習過程：

（原案3）

BG4S08-04：你看，房租比停車費還貴，所以房租應該是一萬吧！

BG4S09-05：不是，先把題目全部看一遍，因為後面還有一些問題...。

BG4S17-06：這邊應該一萬呀！

BG4S09-07：每個月要付多少錢，如果這邊寫一萬的話（第一題），那等到這邊的話（第三題），就沒有了，所以第一題不是一萬塊。...

BG4S09-11：所以房租是八千，停車費兩千元，每個月總共就是一萬就對了。

S08、S17並沒有掌握住題目間的數字關係，S09掌握了題目數字間的關係（BG4S09-07），了解到1萬是最大的數字，如果第1題房租是1萬的話，那第3題房租和停車費合起來就沒有數字可以選了（BG4S09-07），在不確定房租和停車費為多少的情況下，可以掌握房租和停車費相加必是1萬的關係。

(2)學生掌握對運算式意義的了解

教學現場中發現，學生習慣於計算，但是對於所列運算式之了解程度有多少，仍待進一步的確認。在活動二的問題情境中，學生首先判斷房租和停車費共要付一萬元的問題後，進而解決不同面額的鈔票該付幾張的問題，原案如下：

（原案4）

BS28-074：我們選10張，因為1000乘以10等於一萬。

（記錄：1000 × 10 = 10000）

BS13-075：為什麼要1000乘以10？

BS28-076：因為要有10張才會等於一萬。

BT-077：1000元哪來的？好，同組的小貴說。

BS15-078：因為他說要領幾張1000元才夠付房租和停車費。

BT-079：乘以10又是什麼意思？

BS28-080：要領幾張才會等於一萬元。

學生能夠正確的解題，當同學提問將1000乘以10的用意時（BS13-075），該組學生能夠回答出是表示所要領出的1000元鈔票（BS15-078），對於繼續提問的乘數意義亦能清楚的表達出來（BS28-080），顯示學生對於乘法算式意義的了解。

(3)學生具備數字合成與分解的能力

以下原案呈現的是學生在處理10張1000等於10000的關係中，透過先將數字分解再合成的動作進行解題活動，內容如下所示：

（原案5）

BT-087：你怎麼一開始就知道是10張呢？同一組的幫忙補充。

BS16-088：因為題目說要付房租和停車費呀！

BT-089：有沒有人幫忙說清楚。為什麼10張1000元就會一萬呢？好，小貴。

BS15-090：因為房租8000元，所以要8張1000元，然後停車費要2000元，就是2張1000元，合起來就是10張1000元，就是一萬元。

學生可以掌握1萬元是由房租的8000元和停車費的2000元合起來的，因為題目問及爸爸要領幾張1000元，所以該生先將房租8000元分解成8張1000元；停車費2000元分解成2張1000元（BS15-090），接著進一步加以合成為10張1000元。由此可知，學生具備將數字先分解再合成的能力。由此可見，當學生具備數字的合成、分解能力，對解題是有幫助的。如同 Greeno（1991）所言，擁有良好數常識能力的人，了解如何藉著合成、分解、組合等方式的轉化，以利於問題的處理。

上述分析可以發現部分學生從習慣性的以紙筆計算進行解題，到能夠察覺題目數字間之關係，透過不同的計算策略求解，掌握數字和運算的關聯性，加以判斷答案的合理性。這樣的發現呼應了 Howden（1989）的看

法，當個體能在不同情境下察覺數字的變化，不受到傳統算則的束縛，並能將相關的數字加以連結時，個體本身的數常識也隨之發展。

(二)學生在「比較數字大小能力」之教學歷程

以下將透過教學活動五來探討學生在比較數字大小能力的表現，在問題呈現上，數字以300多、400多等不確定大小的形式呈現，希望學生在解題時，先對數字做判斷，學生若能了解其數值範圍，便能成功解題，不一定要給一個確切的數字才能進行解題。

1.學生掌握「300 多」代表 301~399，藉此判斷答案

學生掌握300多代表的數字範圍是301~399，其中，最小的數字是301，最大的數字是399，基於此而進行解題活動，原案如下所示：

（原案6）

EG4S08-009：第二題是四，我要解釋，因為布偶三百多，最少是301嘛！最多是399呀！那如果是399的話，拿三張就會不夠。

EG4S11-010：二張更不夠。

EG4S17-011：所以最少是四張，而且還會有剩下。

EG4S8-012：把他寫下來，最便宜是布偶，益智遊戲組太貴，機器人也太貴，所以最便宜是布偶300多元。

EG4S09-013：對，第二題最便宜是布偶，所以最少要付四張一百元。

原案6呈現的是學生在解下列問題時的小組對話：「如果買最便宜的玩具最少要付 ② 張100元。」

學生知道300多代表301~399（EG4S08-009），進而利用這樣的觀念進行解題，了解最少該付多少的問題（EG4S17-011）。由此可知，數常識情境問題的佈題與引導方式，能充分發揮小組討論的合作精神，符合過程導向教學的精神。

2.學生以最大值、最小值判斷答案

原案7之問題情境為：「小毅身上有1200元，最多可以買 ① 種不同的玩具」，學生在討論的過程中，發展出以「最大值、最小值」為基準判斷問題的答案。

（原案7）

ES08-081：題目不是說400多嗎？你怎麼知道是499呢？

ET-082：好問題，題目說400多，又沒有說400多多少，你怎麼會拿499來判斷呢？

ES25-083：…（思考中）

ES30-084：老師我要補充，因為400多元最多是499，300多元最多是399，然後如果最高的價值合起來不會超過1200元的話，就一定可以買。

ET-085：曉萱說，400多元最多是499，300多元最多是399，如果把最高的價錢加起來沒有超過1200元，那就一定可以買，同意嗎？

ES-086：同意。

第2組學生在發表的過程中直接以399、499等最大數值判斷最多可以買多少的問題，如此的方法雖然可以得到正確答案，但對於其他同學的提問（ES08-081），並無法立刻加以解釋。經由另一名同學的補充（ES30-084），建立了當最大數總合不超過1200時，那麼結果一定成立（最多可以買幾種），這個發現出乎老師意料之外。教學過程中，教師並未想要建立學生用最大值、最小值判斷答案，S30藉由第2組的發表再加上自己的想法將第2組的解法加以合理詮釋。當學生對數字有感覺，能夠了解數字所代表的意義，對於錯誤的解法能夠提出合理的質疑並澄清，並透過數字大小範圍的掌握，應用於日常生活情境中，如此一來，學生就越能夠對答案合理性做判

斷，進而掌握數字之間的關係。

3.學生能進行 4 位數的大小比較

問題4、5的數字以3999、4005這種約略4000的數字呈現，藉以觀察學生是否能夠正確的比大小，原案呈現如下：

（原案8）

EG3S22-04：媽媽打算買電動寵物狗，然後他的價錢比電動汽車還貴。

EG3S30-05：後面又有問電動汽車幾元，然後也不可能是5元、2元、3元、4元。

EG3S22-06：這些個位數不可能。

EG3S06-07：所以是4005，因為3999比4005還小。

學生首先從答案選項中(5、2、3、4、3999、4005）判斷出合理的價格值（3999、4005）（EG3S22-04~06），接著6號學生判斷出由於「3999比4005還小」，所以答案是4005（EG3S06-07），學生很直覺的判斷這兩數的大小，由此雖看不出學生所使用的方法，但可以知道大部份學生在這兩個數字的比大小上並沒有問題。

4.以高位數為基準判斷大小

學生透過位值的概念及運算來進行數的大小比較，發展出高位數相加等於要比較的值時，那麼再加上其他位數時一定會超過該值。原案分析如下：

（原案9）

ES25-088：前面的百位，500加400等於900，900加300就已經1200了。

ES26-089：你為什麼一定要用前面的數字加起來？

ET-090：小安剛剛說把百位加起來就已經1200，因此不能買三種。可是小晶問一個問題，你為什麼會想要用百位數來判斷？

ES25-091：因為我們還不知道後面的十位和個位。

ES30-092：因為如果百位超過了，再加上十位也一定會超過。

ET-096：那可不可以直接從十位判斷就好？

ES11-097：不能，就算十位不會超過，可是也許加上百位就會超過了。

S25針對同學的提問而提出的說明為：因為十位和個位未知（ES25-091）這樣的說明，接著，教師想知道學生是否清楚如果直接從位數低的數字判斷大小會有什麼影響，因此又再次提問（ET-096），從 S11的回應，可以更加清楚的了解到所具備的比大小概念（ES11-097）：就算十位不會超過，可是也許加上百位就會超過了。所以無法從位數低的數判斷大小。在教師這樣一連串的提問過程中，為的是了解學生的深層想法，並釐清概念不清楚之處以奠定學生的基礎概念。

從以上之教學歷程可以看出，藉由情境佈題與適當的引導，學生較能發揮比較數字大小的能力，透過對於數字合理性的判斷，決定出正確的數值，並以位值的觀點比較大小。此正呼應 Sowder 和 Markovits（1989）的看法，在課程中加入更多數字大小比較的作業，能增進孩子對數字和數字系統的了解。

(三)學生在「運用參考點的能力」之教學歷程

Resnick（1989）認為參考點的使用是利用已知的事實來推測未定的事實。本研究發現，學生可以利用生活週遭熟悉的人物為參考點判斷答案合理性。以下透過教學活動一與四來探討學生在運用參考點能力的學習表現：

1.學生以班上最高的小朋友（140 幾公分）為參考點判斷答案

學生面對題目中的身高問題時，由於情境中所提及的對象是與自己同年級，而且是班上最高的同學（問題③），所以，當學生接

收到題目所提供的資訊時，便以自己班上最高的同學身高來判斷答案的合理性，原案分析如下：

（原案10）

AT-214：還有沒有人要講講看你的想法，為什麼小華的身高一定是140？

AS11-215：因為140是正常的三年級的身高。

AT-216：你怎麼知道最高140是正常的三年級的身高？有沒有人要幫忙補充？

AS23-217：因為我們班最高的就有人140幾了。

AT-218：哦~我們班就已經有人140幾了，講得非常好。

學生以自己班上最高的同學身高為參考點來判斷140公分是合理的（AS23-217）。同樣是三年級的學生，若班上最高是140幾公分，那麼同年級的其他班應該也是如此，學生以熟悉的人物為參考點加以判斷答案的合理性。

2.學生以班上最矮的小朋友（120 公分）為參考點判斷答案

同樣地，學生面對的情境對象是三年級且是班上最矮的同學時，便以自己班上最矮的同學身高來判斷答案合理性。研究亦發現，學生除了以同學身高為參考點決定答案外，亦能夠以環境中合適的物體高度（窗檯高度）為參考點加以判斷答案，原案分析如下：

（原案11）

AT-222：誰可以說說看120公分到底多高？

AS12-223：像窗台那麼高。（頭轉向窗台，並以手在筆劃著）

AT-224：哦，有人說120差不多像窗台那麼高而已。

AS11-225：差不多跟劉小嘉一樣高。（眼睛看著該生回答）

教師希望學生不是憑著想像來決定答案，而是能夠掌握量感，因此提問學生是否知道120公分的高度是多少，S12回應120公分：像窗台那麼高（AS12-22），教師注意到該生看著窗台並以手筆劃著，而教室窗台高度的確是100多公分，S11提出120公分差不多像小嘉一樣高（AS11-225），而小嘉是班上最矮的學生，身高差不多是120公分，學生透過班上最矮的小朋友為參考點判斷120公分的高度。

3.學生以班上多數小朋友的身高（130 公分）為參考點判斷答案

學生利用班上大多數人的身高為參考點判斷答案，而三年級多數人的身高差不多就是130幾公分。原案分析如下：

（原案12）

AS12-231：如果小華最高是120公分，那其他人就不會超過120，這樣會有問題。

AT-232：為什麼這樣會有問題？

AS9-233：因為我們班上大部分大約是130幾。

AT-234：剛聽不懂的人有沒有聽懂。

S12吸收了本堂課前半段同學發表時提出的想法（AS12-231），同時也證明了該生不但接受了同儕的觀點並隨時加以運用。S9以班上大多數同學的身高130幾公分為參考點，判斷身高最高若為120公分是不合理的（AS9-233），事實上因為 S9本生就是中間高度的學生，而中間高度的學生是最多的，而該生是以自身身高130幾為參考點來判斷合理性的問題。由此可看出學生對於三年級最高和最矮身高的掌握。

4.學生以自身的體重為參考點判斷答案

當處理體重問題時，學生亦能以合理的對象為參考點進行解題活動。當教師檢示學生的解題記錄單時，發現學生以自身的體重為參考點來判斷答案，如下圖3所示：

＊問題情境：四年一班…到保健室健康檢查，小銘是班上最高最壯的小朋友，他的

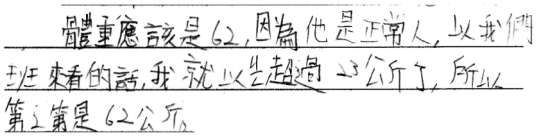
體重應該是62，因為他是正常人，以我們班來看的話，我就以它超過23公斤了，所以第二第是62公斤。

圖 3：S06 練習題 A2 的解題記錄

體重是 ② 公斤、身高是 ③ 公分。

＊答案選項：20、110、130、150、23、62。

S06以自己體重已經超過23公斤為參考點，刪除答案選項中的20、23這種不可能的數字，並且了解到一個正常的三年級學生體重，亦不可能為100、120、140公斤，所以，依此為標準判斷四年級最重的體重是62公斤。

McIntosh 等人（1992）指出，參考點可以由個體本身的屬性或是曾經經歷過的經驗來作為衡量標準，例如：以自身的身高、體重來猜測他人的身高體重。透過課堂中的教學對話，學生以週遭同學的身高為參考點來決定答案，這樣的想法，可以促進不具備參考點能力的學生一些學習刺激，鼓勵學生思考不同的解題策略，並且透過教學引導，讓學生將自身的學習經驗應用在數學的解題活動中，進入除了紙筆計算外的多元解題空間。

(四)學生在「發展計算策略與判斷答案合理性能力」之教學歷程

以下將透過活動三「合作社」來探討學生在發展計算策略與判斷答案合理性之表現。

1.學生能夠策略性地選取最有可能的答案

由於學生對於問題類型的不熟悉，而答案又無法單靠平常所習慣的策略就能順利解題。因此，學生在解題的過程中便自行發展出適合自己的解法，將數字條列出，將已使用的數字圈選起來，那麼就會剩下比較少的數字，減少解題時的負擔。原案呈現如下：

（原案14）

CG2S25-29：那我們先在板子下面寫下數字。

CG2S18-30：有6、8、3、4、600、800。

CG2S25-31：現在什麼數被用掉了？

CG2S18-32：600

CG2S13-33：還有4和3

CG2S25-34：還有嗎？

CG2S18-35：沒有了，所以剩下6、8和800，剩下兩題，我們來想，收銀機裡的紙鈔有幾張？嗯，我覺得它們合起來的是8張，你知道為什麼？

CG2S25-36：我知道為什麼。

CG2S18-37：因為100加8次就等於800呀！因此，就只剩下6。

該組學生在初步討論過後確定某些題的答案，依此將答案選項條列出來（CG2S18-29~30），把已經確定的數字圈選（代表刪除之意），如此一來，遇到較難判斷的題目時，所需考量的數字變少了，將較易解題。當數字只剩下6、8、800時，考量100元紙鈔有幾張的問題時，那麼答案便很清楚就可以判斷出來（CG2S18-37）。不管學生透過何種解題策略判斷答案，只要是學生自行發展出來的，那麼就會具有加倍的學習效果。

2.透過不同的計算策略進行解題活動

Reys 和 Yang（1998）之研究結果顯示，具有良好的計算技巧並不一定伴隨著良好數常識。因此，若學生能發展出適合的解題策略，熟悉不同的運算方法，利用多元的表徵進行解題，那麼，必能提升其數常識。以下呈現學生透過不同計算策略之解題過程：

（原案15-1）

CS04-030：我們先算第一題，它說第一節下課時收銀機裡的零錢，1元的有20個、10元的有8個、50元的有幾個，全部合起來是300元。如果1

元的是20個加10元8個合起來是100元…

CS04-042：然後我們就算50元的有幾個，但是我們不知道50元有幾個，如果50元乘以6的話，5_6_30，所以是300，再加那邊的100，就變成400了，所以不是。我們一個一個加下去發現……

S04發表活動三問題一的解法時，所採用的策略是先將1元和10元的金額合起來（CS04-030），繼而再將答案選項中的數字代入計算。在處理這個問題上，教師認為其他學生應該可以提出不一樣的想法，而無須逐一檢查，因此鼓勵學生發表其他的看法。

（原案15-2）

CS16-061：就是用原本的300，1元有20個不是20嗎？再加這裡的80就是100，然後用300減100等於200。

CS-062：我有問題！為什麼要300減100？

CS16-063：因為要算50有幾個。

S16透過先將總金額扣掉已知的1元和10元金額後，剩下的200就是50元的金額了，如此一來，就可以直接計算出50元有幾個合起來才會是200元（CS16-063），不管是哪一種方法，教師都予以肯定，但是由此也可以看出，由於問題設計提供答案選項，因此學生會加以利用題目所給的條件解題（如 S04的解法），教師為了讓學生直接判斷數字間的關係，因此鼓勵學生發展不同的策略（如 S16的解法）。

小結：研究發現，透過真實情境的設計，有助於學生察覺數字間的關係，學生會利用週遭的人事物為參考點來判斷答案的合理性，或以位值的觀點比較大小，建立比較數字大小的能力。在教學的過程中，學生能夠發展出適合自己的解題策略，透過不同的計算策略進行解題活動，以不同的表徵形式幫助解題，由此可發現，透過設計良好的教學活動，是有助於學生數常識的發展。

三、教學反思

教學是一門藝術，教學的成長亦需藉由經驗的累積與反思，以下將透過教學歷程中之觀察記錄、數學日記等進一步分享研究者之教學反思。

(一)教學困境之反思

教學前後數常識量表測驗結果顯示，平均答對率由40% 提升至55%，統計結果雖然顯示有顯著差異性存在。但仔細檢視學生之表現，可以發現本研究的教學活動對班上某一部份的學生而言，效果並不顯著。由於部份學生在題意的理解上須要花費較多的時間，同時又過於依賴紙筆計算，往往會忽略題目之間的關係。所以，教師在課堂上必須花費更多的時間來引導學生的學習，並透過同儕的討論以提高學習成效。但是，同時存在的問題是，學生在課後解練習題時，由於題目設計提供答案選項的關係，使部分低成就學生在作答時會隨意亂猜；雖然教師要求學生寫下解題過程以應付這樣的問題，但如此一來，便會增加書寫的時間（教師為了掌握學生的學習情形，練習題乃在校完成）。因此，為了讓中低程度的學生具備更多的數常識，教師持續進行數常識情境教學才能解決因程度落差而導致的問題。

(二)教學活動修正之反思：題目的設計應更接近生活化、合理化

本研究的問題情境以生活中會發生的情境為設計考量，希望學生因為具備該經驗而更加投入於學習活動中，並藉由其所具備的經驗來幫助解題。事實上，卻發生了題目設計上還不夠合理化，或是學生尚未具備該經

驗而較難以掌握題目的事情發生。例如在活動二的房租問題中，第5題要學生算出爸爸要帶幾張2000元才能付房租和停車費（１萬元），答案選項為：5、8、10、2000、8000、10000，其中，8為混淆答案選項，意即多餘的數字，而教師預設的答案為5，但是，第6組學生卻問了以下的問題，如原案所示：

（原案24）

BG6S23-06：老師，領出來的錢要和房租剛剛好嗎？

BG6T-07：什麼意思？

BG6S23-08：就是可不可以超過房租的錢？

BG6T-09：會有超過房租的錢嗎？

BG6S24-10：大概裡面都是一萬塊...

BG6T-11：題目說要付什麼錢？

BG6S-12：房租和停車費

BG6T-13：生活中，付錢時，爸爸可以多帶錢，但可不可以付不夠？

BG6S-14：不可以。

學生於小組討論時發現如果領8張2000時，可以付錢但是會多出來，於是向老師提問：領出來的錢需要剛剛好嗎？（BG6S23-06）此時老師並沒有想到可以有這種選擇，因此還反問學生：會有超過房租的錢嗎？雖然老師稍後立即給予符合生活化的回應（BG6T-13）：生活中，付錢時，爸爸可以多帶錢。但是當時仍然尚未立即注意到問題所在。此外，部分學生面對如活動二的房租問題時，對於房租和停車費該多少並沒有很清楚的概念，若是提供的數字沒有像題目中1位數和五位數的差距時，學生在判斷上將會更加困難（由學生回答課前調查中房租費用是多少，可以清楚的知道學生並沒有概念）。因此，若題目可以更貼近學生的生活經驗時，相信將有助於學習活動的進行。

教師太有信心的認為題目是「設計好」的，所以應不會有錯，卻仍然比不過學生的細心與發現。教師在設計題目時，想要訓練學生判斷答案合理性的能力，自己卻陷入計算精準的迷思中，因此忽略了生活中我們在領錢付款時，常常是會再多領一些當做生活費之類的用途的，所幸的是，學生注意到合理性（生活化）的問題，學生的想法往往超過老師的預期，這正是教學精采之處，但同時也是老師要更加具備教學敏感度的考驗。

(三)學生除了達到教科書所設定的目標外，還增加了數學能力

教學經驗顯示，學生過度依賴紙筆計算，解題時不夠理解題意，對於答案合理性的判斷相當缺乏，在進行完教學活動之後發現，教師提供非例行性的問題是有助於學生思考能力的發展。由於題目不像以往制式佈題，所以，能引發更多的討論空間，在面對情境問題時，學生被迫去思考題目間的關係、考慮答案（數字）是否符合情境，雖然多數學生一開始難以獨立思考，但是在透過教師教學引導及同儕的討論後得以慢慢進入狀況，最後多數學生已經能夠掌握要領，會注意題意的理解，並考慮答案合理性的問題，同時肯定自己判斷能力的提升，如 S29、S26在數學日記中所言：

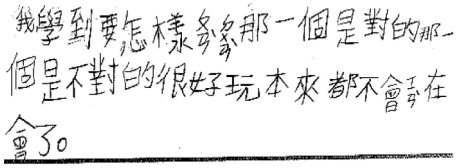

圖 4：AS29 記

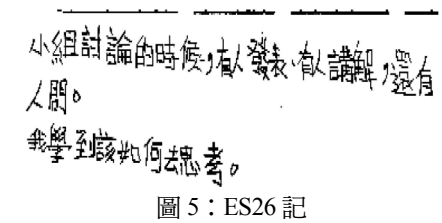

圖 5：ES26 記

透過設計良好的教學活動可以讓教學對話、小組的合作討論更加的名符其實，那麼，在學到數學知識之外，亦必能同時提升學生的數學能力。（940412省）

(四)數常識教學活動提升學生的學習意願，促使學生進行解題活動的反思

從學生的課堂表現及數學日記中，可以看出學生的學習表現是漸入佳境，當學生喜歡上數學課，對學習抱持著信心，那麼學習成效必然加倍。研究發現，多數學生在幾次的教學後，可以肯定自己對數常識情境問題的掌握，學生並不因題型的陌生或難度而退卻，甚至認為這種多重關係的題目比平常的數學問題還要簡單，並且希望日後能夠再接觸到類似的題目，數學課的氣氛也變得較以往活絡，此顯示本研究可以提升學生的學習意願，列舉兩位學生的數學日記：

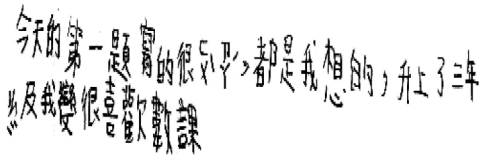

圖 6：BS09 記

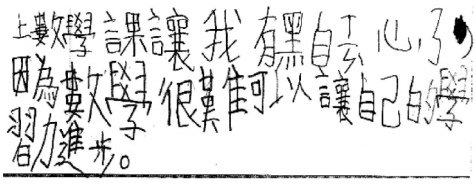

圖 7：AS05 記

在解題過程中，學生容易因為忽略某些資訊而影響其答題的方法，其中，最容易發生的問題之一就是對題意的不了解下倉促作答，以下列舉兩名學生的解題後反思紀錄：



圖 8：DS15 記

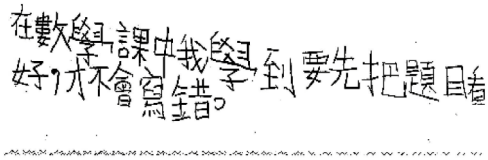

圖 9：DS16 記

學生在解題時容易忽略題目數字間的關係以致解題錯誤，因此事後反思自己應該要將題目看清楚。學生已能逐漸養成解題前必須分析完所有的問題之習慣。

(五)實施過程導向教學可以提升課室中成員的互動與討論

本研究中，教師創造課室學習情境與提供具數學價值之教學活動，以鼓勵學生參與討論、探索及促進思考。此呼應了 Reys（1994）所提出的過程導向教學，教學中鼓勵兒童以自己的方式思考與解題，並勇於與他人溝通，分享彼此的思考方式與解題方法。在師生互動的過程中，教師的鼓勵是促進學生參與學習的一大動力，在教學現場中發現，學生最擔心的莫過於解題錯誤而面臨的責難與取笑，此時教師的鼓勵就顯得格外重要，因為如此一來可以幫助學生更謹慎的面對下一個問題。

過程導向教學中，同儕的協助與合作亦是影響學習成效的因素。平常，學生會因想要趕快討論完畢而忽略同組程度差的同學，但是，因為教師的提醒與肯定，而減少小組討論時「教室客人」的產生。小組成員能肯定同儕的表現與進步，幫助她們了解數學概

念，此亦呼應了 Empson（2003）的主張：在教師適當的鼓勵及充分的同儕與師生互動下，低成就學生也能發展其數學能力。研究亦發現，學生肯定小組討論的功能，認為結合小組的力量，就可以順利解題。

但是，教學中亦發現，並不是所有學生都能投入於討論活動中，儘管多數學生的課堂學習表現較以往進步、專注，但是少數學生的學習意願薄弱，討論時，必須透過同儕的協助，提升其學習的意願，使其更投入於討論活動中。

伍、結　論

一、數常識情境教學活動融入小三數學課室後學生之數常識表現有顯著進步

研究結果顯示，學生在教學前後之相同測驗成績經 t 檢定分析，已達顯著水準（$\alpha < .01$），顯示學生在進行完數常識情境教學後，學生的數常識能力已有成長。而學生在教學後第二份數常識測驗之總平均答對率亦表現不錯，其中，在具備比較數字大小的能力上表現最佳；其次是發展計算策略及判斷答案合理性的能力、瞭解數字與運算意義及關係之能力，而學生在參考點的問題表現較不理想。此結果與先前的研究（李威進, 2004; Yang, 2003）相呼應。此外，透過數常識情境教學，除了建立學生「一萬以內的數」之概念外，亦發現學生在數常識各成份之表現均有所提升。學生原本習慣以關鍵字決定答案及依賴算則的方式解題，在經由教師適時的引導、鼓勵及小組合作討論的方式下，促使學生去注意題目前後的關係，進而掌握數字與運算的意義，尤其是依賴紙筆計算進行解題活動的學生，也逐漸能夠在計算之外，思考數字和運算的關聯性，加以判斷答案的合理性。

二、數常識情境教學之歷程不但可以增進學生閱讀習慣，亦可提升學生的學習意願

學生缺乏讀題的能力是數學教學中教師最想解決的學習問題之一。在數常識情境教學融入數學課室後發現，學生因為教師的引導及同儕間的互動，會逐漸注意到題目前後的關係。而多數學生在面對情境問題時，會先將題目完整的看一遍，再根據提供的數字進行判斷，無形中增進對數字意義的了解，此乃教學的一大收穫。此亦呼應了 NCTM（1989, 2000）的看法，假如孩子要有意義的使用數字於日常生活情境，那麼他們就必須了解數字的意義。此外，教學過程中教師亦發現，數學課的氣氛變得較以往活絡，數常識教學活動無形中提升了學生的學習意願，同時建立了信心。同時，更讓教師欣喜的是，平時不太發表或對數學缺乏信心的孩子，多數都能積極投入於問題的討論中，不但使得高程度學生的數常識提升了，同時帶動了低程度學生的學習。此亦呼應了 Yang（2002, 2003）所提出的看法：數常識過程導向教學不但可以提升孩子的數常識，亦可以促進教師的教學與學生之學習。

誌　謝

本研究蒙國科會專題計畫補助，計畫編號 NSC 95-2521-S-415-001，特誌申謝；文中所提論點純屬作者個人之意見，並不代表國科會之立場。

作者衷心感謝審查委員對本文所提供之寶貴意見，由於您們的協助，方能使本文能夠以更清楚、更結構化的方式呈現。

參考文獻

1. 李威進（2004）。資訊融入九年一貫數學領

域第一階段數學測驗之研究 – 以數字常識為例。嘉義縣：國立嘉義大學碩士論文（未出版）。

2. 林碧珍和蔡文煥（2003）。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。**科學教育月刊**, **258**, 2-20。
3. 林姿飴（2005）。**電腦化數常識量表之編製及其發展之研究 – 以九年一貫數學領域第二階段學童為例**。嘉義縣：國立嘉義大學碩士論文（未出版）。
4. 楊德清（2002）。從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力之研究。**科學教育學刊**, **10**(3), 233-260。
5. 賴怡君（2002）。生活數學雙簧戲-生活化的數學問題解決教學。**師友**, **415**, 34-37。
6. 蔡文煥和林碧珍（1998a）。數學、文化和認知整合教學研究:兒童文化活動類型與結構。載於國立高雄師範大學編印：**第十四屆科學教育學術研討會暨第十一屆科學教育學會年會會議手冊及短篇論文彙編**（pp. 735-741）。高雄市：國立高雄師範大學。
7. 蔡文煥和林碧珍（1998b）。**數學、文化和認知整合教學研究：兒童兒童日常生活活動類型之調查研究**。行政院國家科學委員會研究計畫成果報告：新竹師範學院應用數學系（NSC87-2511-S134-002）。
8. 黃國勳和劉祥通（2006）。一個情境認知取向教學活動的發展與實踐-以「因數大老二」為例。**科學教育學刊**, **14**(1), 1-27。
9. Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
10. Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*, 32-42.
11. Brown, J. S., & Duguid, P. (1993). Stolen knowledge. *Educational Technology*, *33*(3), 10-15.
12. Carraher, T. N. (1988). *Street Mathematics and School Mathematics*. PME XII, 1, Hungary, 1-23.
13. Choi, J., & Hannafin, M. (1995). Situated cognition and learning environments: Roles, structures, and implications for design. *ETR& D, 43*(2), 53-69.
14. Dougherty, B. J., & Crites, T. (1989). Applying number sense to problem solving. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 22-25.
15. Empson, S. B. (2003). Low-Performing Students and Teaching Fractions for Understanding: An Interavtional Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(4), 305-343.
16. Greenes, C., Schulman, L., & Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher, 40*(5), 279-284.
17. Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 170-218.
18. Griffin, S. A., Case, R., & Siegler, R. S. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learing of arithmetic to students at risk for school failure. In K. McGilly (Ed.). *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp. 25-49). Cambridge, MA: MIT Press.
19. Griffin, M. M. (1995). You can't get there from here: Situated learning, transfer, and map skills. *Contemporary Educational Psychology, 20,* 65-87.
20. Griffin, S. A. (2004). Building number sense with number words: a mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*, 173-180.
21. Howden, H. (1989). Teaching number sense.

Arithmetic Teacher, 36(6), 6-11.

22. Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., & Swafford, J. O. (1988). Results of the Fourth NAEP assessment of Mathematics: Number, operation, and word problems. *Arithmetic Teacher, 35(8)*, 14-19.
23. Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.
24. Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated Learning.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
25. Lesh, R., & Lamon, S. J. (1992). *Assessing authentic mathematical performance.* Washington. DC: American Assocation for the Advancement of Sciences.
26. Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.
27. McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining Basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.
28. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
29. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
30. Organisation for Economic Co-operation and Development. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. Paris: Author.
31. Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle(Eds.), *Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference* (pp. 35-42). San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
32. Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teaching Mathematics in the Middle School, 1*(2), 114-120.
33. Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 225-237.
34. Suchman, L. A. (1987). *Plans and situated actions: The problem of human-machine communication.* New York: Cambridge University Press.
35. Sowder, J. T., & Markovits, Z. (1989). Effects of instruction on number magnitude. In C. A. Maher, G. A. Goldin, & R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of Eleventh Annual Meeting: North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 105-110). New Brunswick, NJ: Rutgers University Center for Mathematics, Science, and Computer Education.
36. Sowder, J. T., & Kelin, J. (1993). Number sense and related topics. In D. T. Owens (Ed.), *Research Ideas for The Classroom: Middle Grades Mathematics* (pp. 41-57). New York: Macmillan.
37. Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: Promises and pitfalls. *Procedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, 64-80. U. K.: Norwich.
38. Yang, D. C., & Reys, R. E. (2001a). Developing Number Sense. *Mathematics Teaching, 176*, 39-41.

39. Yang, D. C., & Reys, R. E. (2001b). One Fraction Problem: Many Solution Paths, *Mathematics Teaching in the Middle School, 7(3)*, 164-166.
40. Yang, D. C. (2002). Teaching and Learning number sense: one successful process-oriented activity with six grade students in Taiwan. *School Science and Mathematics Journal, 102*(4), 152-157.
41. Yang, D. C. (2003). Teaching and Learning Number Sense – An Intervention Study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 1*(1), 115-134.
42. Yang, D. C. (2006). Developing number sense through real-life situations in school of Taiwa. *Teaching Children Mathematics, 13*(2), 104-110.

The Study of the 3rd Graders' Mathematics Teaching Integrating the Number Sense Situated Activities

Der-Ching Yang[1] and Wan-Ru Wu[2]

[1]Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University

[2]Happy public elementary school, Taoyuan County

Abstract

This study integrated the number sense into the 3rd graders' mathematics teaching activities, and then investigated students' number sense performances in their learning processes. One 3rd-grade class was purposefully selected from Tao-Yuan County in north Taiwan. The results of the T-test showed that students not only had better performance on number sense, but also achieved the intended learning goals. The results on the parallel test indicated that there is a statistically significant difference between pre-test and posttest at $\alpha < .01$. This implies that these students' number sense got much progress after the teaching. Moreover, the process-oriented teaching not only promoted students number sense, but also enhanced students' collaboration, learning motivation and establishing their learning confidence. In sum, the 3rd graders' mathematics teaching integrating the number sense situated activities is indeed helpful on developing students' number sense.

Key words: 3rd-Grade, Realistic Mathematics, Process-Oriented Teaching, Number Sense, Number Sense Situated Activities