科學教育學刊
2007, 第十五卷第六期, 703-723

Chinese Journal of Science Education
2007, 15(6), 703-723

探究歷史導向微積分課程與發展學生數學觀點之關係

劉柏宏
國立勤益科技大學　通識教育中心

（投稿日期：民國 94 年 11 月 24 日，修訂日期：96 年 5 月 28 日，接受日期：96 年 7 月 10 日）

摘要：本探究之主要目的在探討以歷史進展為導向的微積分課程，對於培養學生的數學觀點有何種關聯。本研究採取單一群體前後測研究法，研究工具包括開放式問卷、數學自傳、歷史導向的微積分課程、隨堂報告、與半結構式一對一訪談。研究結果顯示，大部份受測者在學前表示數學思考是一種牽涉到數字計算與套用公式的求解過程，但到學期末絕大部份的學生對於數學思考都有另一番論述，並且對數學家解題情境的想像投射到對於數學思考的認知上。在數學知識的認知方面，大部份學生對於數學知識始終抱持著強烈的工具化觀點。不過，學生於學期末的論述增加了兩方面的覺察：(1)數學知識承先啟後的概念；(2)數學家所扮演的角色。本研究最後不僅分析歷史導向課程與發展學生數學觀點之間的關係，也探討了學生對數學本質的瞭解在數學學習中的重要性。

關鍵詞：微積分、數學史、數學觀點、數學本質

壹、緒　論

數學身為學校教育的一門主要學科，應該傳達這門科學所具備的價值。美國「全國數學教師協會」（National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM]）於1989年擘畫二十一世紀數學教育的前景時即指出未來的學生對於數學的功能與價值必須抱持適當的信念（NCTM, 1989），因此將「學習評價數學（learning to value mathematics）」列為數學學習的首要目標。NCTM 進一步說明學生應如何學習評價數學：

> 學生必須體驗各種不同有關於數學的文化、歷史、與科學演化過程，使得他們能夠欣賞在當代社會發展中數學所扮演的角色.....學習評價數學即是聚焦於從數學自身的發展和它對我們文化與生活的衝擊中，讓學生瞭解數學和歷史情境的互動（NCTM, 1989, p. 5-6）。

美國科學促進協會（American Association for the Advancement of Science, [AAAS]）也強調「對數學本質的基本瞭解是科學素養的

要件」；「學生必須認知數學是諸多科學努力的一部份，必須瞭解數學思考的本質，並且熟悉數學的關鍵概念與技巧」（AAAS, 1990, p. 15）。NCTM 於西元兩千年的年鑑報告中也持續呼籲值此世界環境變化劇烈之際，學生仍必須瞭解數學為人類歷史上最偉大的文化與智識成就之一（NCTM, 2000）。由此可見協助學生瞭解數學的本質與內涵，和它與人類歷史的互動是數學教育相當重要的內在價值。

貳、理論架構

一、數學觀點與數學學習

不少研究指出，學生對數學本質的瞭解和觀點在某種程度上也會影響到他們在數學學習上的態度與行為。Schoenfeld 根據他從1970到1980年代對大學生與高中生數學解題行為的觀察發現一個人的數學世界觀與信念系統會引導其從事數學解題活動的方式與取向（Schoenfeld, 1985）。Schoenfeld（1989）進一步做教室觀察後發現學生不成熟的數學信念大都來自於其學習經驗。由於長期習於演練固定的解題模式，學生心中對數學早已印刻出一種僵化的概念圖像。Schoenfeld（1992; 1994）認為對數學本質的錯誤解讀不僅造成學生對數學認知的矛盾（例如學生同意數學是一門具創意的科學卻又同時認為記憶與背誦是最有效的學習模式），也影響其數學學習的成效，因此力倡幫助學生發展適當數學觀點的重要性。Schoenfeld 解釋所謂的數學觀點是指透過數學家的眼光看世界和評價數學化與抽象化的過程並樂於應用它們。許多數學教育研究者也發現學生對數學的認知與他們的數學學習有所關聯。例如 Kloosterman 和 Stage（1991）發現數學成就較低的大學生對於數學本質的認知通常較為貧乏。Rodd（1993）與 Ruthven 和 Coe（1994）也都指出學生對於數學的信念和他們的數學學習存在著相當程度（但非線性）的關係。在比較數學系學生的數學觀點與學習行為後 Carlson（1999）觀察到與大學部學生相比較，主修數學的研究生對數學呈現出一種較為活潑與動態的認知概念，在解題行為上也比較願意去嘗試各種策略。Cifarelli 和 Goodson-Espy（2001）也指出大學生對數學的認知確實會對他們的數學學習產生影響。由於上述的觀察研究並非在同一理論架構下進行，因此自難斷言學生的數學觀點與數學學習行為或表現必然存在因果關聯。但這些研究證據卻也不容數學教育研究者忽視其所代表的意涵，所以近年來相關學者已逐漸重視這方面的研究，而將其視為數學教育上一個隱藏的變數（Leder, Pehkonen, & Törner, 2002）。目前對於學生的數學觀點與信念的操作型定義在數學教育研究者之間仍難獲得一致共識，但為使本研究能在一個清晰且一致的架構下進行，本研究中所謂學生的數學觀點包含兩大面向：

(一)數學思考的觀點：學生的數學思考觀點是對於數學內涵的一種微觀概念，是關於數學個別問題之發生與解決過程的理解。舉凡學生對於數學問題之解題過程所必須含括的事實、策略、與數學家解題時之心理狀態等等的看法皆屬於其數學思考的觀點。

(二)數學知識的觀點：學生的數學知識觀點是對於數學內涵的一種宏觀概念，是關於數學整體知識之成長與演化過程的理解。舉凡學生對於數學知識之增長過程所必須含括的原因、條件、與數學家社群辯證時之互動狀態等等的看法皆屬於其數學

知識的觀點。

二、數學史與數學學習

許多學者早已倡議整合數學史素材與學校數學課程內容，或在師資培育中加入數學史的訓練，以幫助老師的教學與學生的學習（洪萬生, 2000; Horng, 2004; Barbin, 1996; Siu, 1995a, 1995b; Swetz, 1995），因此數學史在教育上的功能已引起不少的討論。Liu（2003）根據相關學者的觀察研究與理論論述，扼要提出五項數學史在數學學習與教學這兩個層面上所能達到的目標，而本研究的重點則在於對於 Liu 的部分論點做實境觀察，尤其是數學史對於培養學生對數學思考與知識本質的瞭解與認知究竟有何助益？

數學概念已演化數千年，古代數學大師背後的智慧可以提供我們學習數學思考方面的洞見。因此將歷史問題應用於數學教學之中已受到相當多學者的注意（Avital, 1995; Ernest, 1998; Furinghetti, 1997; Katz, 1997; Swetz, 1995）。誠如 Ernest（1998）所言「歷史上數學家所艱辛創建的數學過程與策略在現今的數學學習與操作中仍是十分有價值的」（p. 25）。數學思考的過程包含推測、歸納、演繹、類比、特殊化、與一般化等複雜組合，然當今邏輯演繹法則蔚為數學理論發展的主流，多數數學教本受此影響也將數學知識以最簡潔、精準的方式呈現。如此一來，數學家思考時所面臨的掙扎與試誤冒險過程被遮蔽，整個數學知識的折衝歷程消失殆盡。因此 Lakatos（1976）便嘗試透過對特定問題歷史發展過程的重建，傳達數學思考的多種面向。蕭文強（Siu, 1995a, 1995b）解析了 Euler 的數學解題過程說明他如何利用解構與重組、特殊化與一般化的交叉運用達成解題的目的。數學史上一題多解的情形屢見不鮮，介紹學生位於不同時間、地區、與文化的數學家對同一數學問題的不同解法，能夠使得學生透過比較分析以體驗數學思考的進路與洞見（洪萬生, 2000; Horng, 2000）。如此一來，學生對於數學解題的認知將會從「知道」解法提昇到「欣賞」解法的境界，因而可能啟發他們對數學概念的認知（Siu, 1993）。

另一方面，將數學史融入課程也能增進學生對數學知識本質的瞭解。學生通常認為數學知識的發展是以一種固定的、絕對的路徑前進，而這樣的認知係歸因於學校教材與教師經常以嚴謹與合乎邏輯的面貌詮釋數學。於是學生認為數學知識往往沿著直線進步的道路前進，是一種確切的真理，容不下任何謬誤。然而歷史所告訴我們的卻是另一個的事實：引導數學知識發展的是直覺臆測與啟發式思考，並非邏輯演繹。一個初生的數學概念是否被接受取決於當時的數學社群與數學家的信念，而非邏輯推理的結果。例如畢達哥拉斯學派拒絕承認無理數、克羅內克（Kronecker）否認無限多個實數的真實存在、科西（Cauchy）對複數的忽視等等。也由於數學家個人與整體數學社群認知上的限制，數學知識的真理性也受到挑戰。例如牛頓（Newton）便無法對於無限小（infinitesimal）提出合理邏輯的解釋。還有十七、八世紀的數學家仍無法掌握無窮級數收斂與發散性的關鍵概念，以至於發生一些錯誤的結果。事實上，直至十九世紀初期，沒有任何一個數學分支在邏輯上是安全可靠的（Kline, 1980）。往往是數學概念的實用性（而非其邏輯性與正確性）迫使數學家不得不接受它們的存在。由此可知，歷史讓我們了解到數學知識違反邏輯發展的一面。而這種數學認識論上的解構，正好建構了培養學生認知數學的人文面向的機會。

參、研究目的

雖然瞭解數學的價值與數學本質是數學教育最重要的目標之一，但許多跡象顯示出學生仍無法接觸到他們所應該得到的，或者應該學到的概念（NCTM, 2000）。應用數學史於課程教學中的理論與做法雖廣為人知且時有討論，但其在教育上的真正功能與價值卻仍缺乏足夠的與嚴謹的觀察研究證實，以至於始終無法受到一般數學教育學者的重視。Liu 和 Niess（2006）發現在經歷過一個學期的歷史導向微積分課程後，大一學生對於數學思考各種面向的瞭解已能建立起自己的觀點與論述。而且 Liu 和 Niess 也指出學生在數學思考方面的再省思，似乎激發他們重新詮釋數學知識的整體發展。在這個基礎之上，本項研究除觀察另一組主修工程的大一學生對於數學思考的觀點外，也將他們對於數學知識的觀點納入考量。主要研究目的有三：

一、分析技職院校大一工程系科學生入學之初的數學觀點；

二、觀察學生在經歷過一個學期的歷史導向微積分課程後，他們的數學觀點在面向上與程度上是否有任何的轉移？

三、探究課程設計的內容與學生數學觀點之發展是否存在任何相關性？

必須強調的是，本項研究屬於探究式觀察，焦點在於歷史導向之課程設計與培養學生數學觀點這兩者間之關聯性，並不做兩者之間因果關係的推論。

肆、研究方法與步驟

本研究採單一群體前後測研究法（single-group pretest-posttest design）。雖然在所有實驗性的方法中，這種方法的因果推論性最為薄弱，但適用於觀察一些具穩定性與持續性的概念與特徵（Gall, Borg, & Gall, 1996）。而且相對於其他影響數學解題臨場表現與成就的變數，大學生內蘊的數學觀點在穩定性上是較高的。再加上本研究屬探究式觀察，並不做因果推論，因此適合採用單一群體前後測研究法。

一、研究對象

本研究的對象為中部某國立科技大學五十五位工程科系的大一新生，其中大多數畢業自高工，少部分畢業自普通高中。

二、研究工具

本研究所使用之研究工具有開放性問卷、數學自傳、歷史導向微積分課程、隨堂報告、與半結構式（semi-structured）一對一訪談。本研究之研究者同時為此一歷史導向微積分課程的授課者。所有的研究工具已預先在一次先期研究中測試與檢討，而其中由研究者自行開發的開放式問卷更經歷過兩次預試。最初始的問卷原包含十六個題目，在第一次對100位學生預試後刪改為八個問題，之後徵詢三位專家學者（專長分別為心理學、數學、與數學教育）做專家效度的檢驗，在參酌意見後修正成九個問題並對40名學生做第二次預試。第二次預試中透過一對一訪談以檢驗學生對於問題瞭解的正確性與文字敘述之可靠性。其中與數學思考較為相關的六道題目已曾於正式研究中做實測（參見 Liu 2002; Liu and Niess, 2006），而本研究中所使用的問卷則是將原問卷中所有的九道問題納入，除探測學生對於數學思考的觀點外，也關心學生對於數學整體知識的內在與外在本質的想法（例如數學與科學、藝術有何不同？數學知識是如何產生與發展的？數學是被數學家發現的絕對真理或是被數學

家所建構發明的產物？）。數學自傳則要求學生說明他們以往數學學習的經驗、影響他們數學學習重要的人事物，還有他們對於數學這個學科的重要性的看法等等。隨堂報告則是要學生於課堂中紀錄下他們對於當時所學習的主題或是課程活動的感想。隨堂報告的作用主要是做為輔佐解讀學生的學後觀點之用。半結構式一對一訪談的目的除進一步瞭解學生的數學觀點外，更重要的是檢驗他們是否真正瞭解問卷問題的題意（題目的效度）和他們的文字敘述與口語表達內容的一致性（答案的信度）。

三、實施步驟

(一)學前階段：學期開始的第一節課在徵詢同學同意後將開放式問卷發給所有學生作答，以蒐集學生對於數學思考與數學知識的學前觀點資料。同時學生亦須繳交一份約 300 字左右的數學自傳說明個人數學學習歷程與想法。這兩份資料做為了解學生於入學時對整體數學學科觀點的依據。緊接著從五十五位學生中隨機抽出十位組成代表樣本參加一對一的半結構式學前訪談。其中一位學生後來因故退出，因此共有九位學生參與訪談。訪談內容主要是更深入了解被晤談者的想法，每一場學前訪談歷時約三十到四十分鐘。訪談內容全程錄音並謄寫成文字以做為分析之用。

(二)教學階段：本研究中的微積分課程為學生之大一必修課，其課程設計係以微積分概念的歷史發展為主要依據（詳見附錄一）。例如傳統大一微積分課程安排的順序大都是從極限概念開始，接著微分，再來是積分。但依微積分概念的發展歷程來看，其次序恰恰相反。所以這門一學期的歷史導向微積分從面積計算的問題開始，而引進了黎曼和。為了解決黎曼和的求和問題緊接著介紹無窮級數的收斂與發散性質，再引進極限概念來處理。接下來課程介紹十七世紀科學家所關心的物體運動瞬間速度與切線斜率問題，透過對實際應用問題去思考無限小這個概念是如何形成，還有牛頓和費馬（Fermat）等人如何處理無限小的問題。伯克利（Berkeley）主教對牛頓處理無限小的批判也是課程的重點，如此一來引進極限的概念與定義來解決這些爭端便成為理所當然的事情。

為引起學生學習上的好奇與興趣，這門歷史導向微積分課程在每個主題單元均以歷史問題做為鋪陳情境的開端。也就是要求學生去思考當時的數學家為什麼關心這個問題？他們如何解決這個問題？而為貫徹「做中學」（learning by doing）的理念，總共挑選十二道對微積分進展具決定性影響的數學問題做為學生的課後作業（詳見附錄二）。授課者要求學生只能藉助最基本的概念，不能以高階的方法與公式解決。例如第一道作業：「設計一套方法證明半徑為 r 的圓面積為 πr^2」，學生最初都被題目的條件所困惑，因為對他們來說圓面積為 πr^2 是最自然不過的事，如何證明？但學生被告知重要的不是答案，而是過程與想法。作業解答收集後研究者便邀請一些提出特殊想法的學生上台發表他們的解法，台下同學須對其同儕的解題策略發表看法，互相評論彼此觀點的可行性或可能遭遇的困難，而教師在最後階段則總結學生觀點再輔以歷史素材以加深他們對問題的認識。以問題做為情境鋪陳的開端主要是將「概念問題化」（problematize the concepts）。將數學概念問題化能夠引導學

習者發展深層的認知並訓練他們處理複雜情境的技巧（Boud & Feletti, 1991; Torp & Sage, 1998），而同儕的評論與教師的總結則是協助學生將「問題概念化」（conceptualize the problems）。例如第一個求圓面積的問題主要是傳達一種「準定積分」的觀念，從解題過程當中學生可能會主動或被動地發現分割圓形是個簡易有效的策略，其後教師在補充歷史素材時再輔以劉徽、阿基米德（Archimedes）、與日本數學家關孝和等人的想法，這時無限分割的概念大致上已能被學生所接納，所以黎曼和（Riemann sum）的引入也就水到而渠成。

除課堂上的答問與課後的解題思考外，研究者也要求學生對某些上課活動、事件或內容以短篇報告方式發表感想。這個活動設計的目的是為隨時記錄學習者對於課程內容或課堂活動的即時想法，以做為分析學生學後觀點的輔助證據與課程成效的參考。

(三)學後階段：歷經一學期的歷史導向課程後，所有學生再一次回答學期初所曾答覆的開放式問卷，而九位先前隨機選取出之代表樣本也再次接受一對一的半結構式學後訪談。晤談重點除與學前訪談類似外，焦點放在學前與學後觀點之差異。若發現任何言詞上的差異，研究者則進一步向被晤談學生查證是否只是用詞的改變或是確為觀點上的移轉。訪談內容全程錄音並謄寫成文字，而課堂上的隨堂心得報告、學後問卷、與學後訪談的內容則做為解讀學生學後觀點之用。

四、資料分析

本研究分析資料時採取外際三角交叉檢視法（inter-triangulation）和內際三角交叉檢視法（intra-triangulation）以試圖描繪出學生對數學思考與數學知識的想法。外際三角交叉檢視法是利用不同研究工具（問卷、數學自傳、隨堂報告、與一對一訪談）去查驗研究對象在不同環境脈絡中所表達的想法是否一致。另外由於受訪者經常無法只透過單一問題的答詢而清晰地表達出對某一特定主題的內在觀點，因此研究者也引入內際三角交叉檢視法。內際三角交叉檢視法是在開放式問卷中利用一些相異但相關的問題，對答卷者的觀點做一個整合性的瞭解。例如要了解學生對於數學思考的觀點，除請學生直接回答何謂數學思考外，也要求學生想像「數學家如何思考？」，和學生對「創意思考的過程」與「遵循既定的程序」孰輕孰重的看法。相同地，為解讀學生對數學知識的認知，除了要他們說出心中對數學的定義外，問卷中也納入一些輔助問題，諸如：「比較數學與科學、藝術的異同」；「數學知識如何產生？如何發展？」；還有「數學知識是被發現或發明？」等等。上述問題並無標準答案，研究者的目的在於觀察他們如何詮釋這些概念。

資料分析為一持續性的工作，採下列三階段完成：

第一階段

本階段之工作在於分析學前問卷、學生數學自傳與學前訪談內容。觀察重點放在(一)受訪者所表達的的文字與口述資料是否相符；(二)整理出學生對數學思考與數學知識的學前觀點；(三)學生對數學思考與數學知識的學前觀點跟其先前數學學習經驗的相關性。

第二階段

本階段分析重點在於比較前後測的書面與訪談口述資料，以觀察學前與學後觀點之差異，尤其是九位隨機樣本的學前與學後觀點。

第三階段

最後一個階段的分析工作試圖回答本研究計畫所設定的問題。藉由學後階段的分析，本研究探討此歷史導向的微積分課程對於學生發展數學觀點有何幫助。在此一階段的分析工作中研究者逐項討論所有設定的議題，以明確釐清課程特徵與學生觀點間之相關性。學生的隨堂心得報告將做為解讀學生觀點是否轉移的輔助資料。

伍、結果分析

一、學前觀點

Sierpinska（1987）將學生的數學認知分為三種不同傾向：直覺經驗主義者（intuitive empiricist）、推論經驗主義者（discursive empiricist）、和推論形式主義者（discursive formalist）。直覺經驗主義者認為數學是一種經驗科學，獲得知識的方法主要是藉由練習與模仿，因此數學知識的可靠性必須是在直覺上能接受的。推論經驗主義者所表達的則是一種拉卡托斯的觀點（Lakatosian view），認為數學是一個假設與演繹的科學，其來源與動機緣於對於解決真實世界與數學本身的問題，其過程包含假設與驗證。推論形式主義者則以一種形式操作的方式看待數學實踐的活動，數學知識系統只是一個跳脫真實世界意義的抽象符號體系。根據學生問卷上的回答與面談時的敘述顯示，本研究中的大一學生對數學本質的闡述大都偏向直覺經驗主義者，只有極少數學生的觀點類似推論經驗主義，但並不明顯也不完整。學生的論述則完全見不到類似推論形式主義的主張。整體而言受測者對於數學思考的認識普遍呈現出一種表層的、經驗取向的觀點，對數學知識也抱持一種工具化的認知。以下分為數學思考與數學知識兩部份討論。

(一)數學思考

關於數學思考的看法方面，絕大部分的受測者直接表達出經驗反射式的想法而認為數學思考就是尋找解題方式的一個過程，其中數字計算與公式運用佔據極大的範疇，至於思維實驗和推理驗證的角色則不受重視。例如致俊談到何謂數學思考時就說：

> 當看到題目，會有很多公式、算法和一些相似的題目在腦中閃過。看到題目時會有很多的習題是想法從腦海中閃過就可以拿來用，若都沒發現那就自己想。（致俊，920926學前訪談）。

這種透過公式解題的想法往往伴隨著一種「簡化數學」的思維。事實上，將數學思考等同於「公式化」或「簡單化」的觀點，可能隱約在學生心中築下一道解題的障礙。如另一位受訪者安喻所說：

> 數學家腦中會浮現是否解決過類似的問題，接下來會浮現出可以套用的公式，再來嘗試各種的解題技巧。……[數學家的]頭腦速度比一般人快，所以各式各樣的解法都會先過濾，再從中選擇最好的。（安喻，920919學前訪談）

這樣的觀點所造成的影響是當他們無法迅速地「公式化」或「簡單化」一個數學問題時，可能就很容易放棄解題的企圖。

另一方面當學生被問到對於「創意思考的過程」與「遵循既定的步驟」哪一個比較重要時，超過半數（29/55）表示創意思考在做數學時比遵循既定步驟重要；另外有三分之一（18/55）的學生則認為同等重要。也就是說只有少數的受測者強調數學解題必需嚴格遵照既定的規則或步驟。這一個現象或許呈現出學生對於數學思考的靈活性的瞭解，但深入剖析後可以發現學生對創意思考的觀點卻仍隱含著侷限與不利於學習的因子。首

先學生觀點的侷限性表現在他們將創意思考狹隘地解讀為「一題多解」或「多面向」的思考模式。一位受訪者凱思於學前訪談時就坦承他並不瞭解什麼是數學思考，若真要說的話就是指「思考問題並且可能有多種方法嘗試解題」 (920926)。類似這樣的觀點普遍存在受測者的敘述與言談之中。

此外值得注意的是受測者對於數學思考的觀點存在著一種雙層認知（two-tier recognition）。客觀上學生認為創意思考很重要，但主觀上他們並不認為自己能運用創意思考來解題。在他們心中數學問題有兩種層次，一個是基本的，習見於課堂上的，只要依照既定步驟就可以求出答案；另一種是進階的，屬於職業數學家的，需要融入創意才能解決。回答問卷時凱思對於創意思考的問題並無作答，訪談時研究者與他進行了下列一段對話：

研究者：有人說解決數學問題是一種具創意的思考過程，也有人主張做數學問題時必須嚴格遵循一些步驟，對這問題你沒表示看法，為什麼？

受訪者：因為我覺得兩者都對，數學高段一點的可以創造一些數學公式，那一般的學生的話都是屬於後者。

研究者：那你解題時會偏向哪一邊？

受訪者：後者吧！因為通常發明不出來！所以看到題目大部分會套用現成的工具，偶而也會想要發明不一樣的。

（凱思，920926學前訪談）。

由資料顯示，不少主張創意思考與既定程序並重的學生相當程度地附和著凱思的觀點，並且有部份學生甚至認為能熟用公式就是創意思考。雙層認知的背後通常隱藏著兩個意涵。一是對數學認知的二分法，有些數學是屬於校園之內的考試競技場（基本的、僵化的、程序的），另有些則存在於校園之外的數學巨塔（高等的，靈活的、創意的）。二來，雙層認知可能意謂著學生對進階數學的自我能力的否定，他們認為數學巨塔內的抽象數學僅僅屬於少數人，遙望而不可及。因此這種對於數學思考的雙層認知，無形中會在學生心中構成數學解題不自覺的障礙。

(二)數學知識

大多數學生對於數學知識本質的認知反映出直覺經驗主義的傾向。從受測者的回答可以看出，他們對於數學的三個主要印象分別是：數字、計算、與工具，而且前兩種印象經常伴隨出現。在回答什麼是數學時，有8位學生沒有作答，其餘47位學生有20位認為數學是一門牽涉到數字與計算的學問；有15位表示數學是科學或日常生活所需的工具。一位參與訪談的學生勝益在問卷中多次提到數學與數字計算的關聯，於訪談中他解釋：

數學是數字上的計算和應用，科學是有形的、有現象的。數學是數字上的運算……科學講究科學證據，數學則是求出答案驗算合理即可，不需要所謂的證據！（勝益，920926學前訪談）

勝益的回答充分反應出 Sierpinska（1987）所定義的直覺經驗主義者對數學的認知，那就是實用的知識不需驗證，利用特例就可說明一個規則或原理。這樣的概念可能與他們將數學工具化的傾向有關，例如另一位接受訪談的學生延襄更強烈地表現出這樣的觀點：

研究者：那依你的看法，數學知識是如何產生的？

受訪者：古人想要快速解決問題，後來又想把問題更簡單化。

研究者：所以為了解決日常生活的問題，數學就產生了？

受訪者：嗯！

研究者：那會不會有一些數學和生活沒關係，並不是因為生活需要的？

受訪者：好像沒有吧！

研究者：那萬一有數學家發明這種數學出來呢？

研究者：應該不會有這種情形吧？

（延襄，920926學前訪談）。

延襄極端將數學知識工具化的主張也加強了他對數學真理性不容置疑的態度。不過其他學生在這點上面並不如延襄這般篤定與明確。在回答這個問題的46位受測者中，有20位抱持中立的態度，他們認為數學知識是被發現的，但其中的運算規則、符號等等則是由數學家自行所建構發明的。另外有17位認為數學知識是被發現的，只有9位主張數學知識是絕對真理。但在訪談中發現許多受測者的回應相當反覆，無法給出一套標準一致的說辭。Sierpinska（1987）就指出直覺經驗主義者能夠接受數學知識是絕對真理這個說法，但卻也同時認為數學知識必須為直覺所接受。所以學生於前測訪談所表示的概念相當程度地顯示出這樣的矛盾。

二、學後觀點

經歷過一個學期的歷史導向微積分課程後，透過相同的研究工具，本研究進一步觀察受測者對於數學思考與數學知識的觀點是否朝某些方向移轉，或發生某種程度上的變化。

(一)數學思考

在數學思考的認知方面，大部份受測者在學前表示，數學思考是一種牽涉到數字計算與套用公式的過程。然而學後問卷資料顯示，只有少部份學生仍持續表達上述看法，絕大部份的學生對於數學思考都有新的論述，其中佔最大比例（12/55）的說法為數學思考是一種邏輯推理與做合理性分析的過程。如受訪者安瑜學期初認為數學思考是一個解決問題的流程，於學期末的訪談時表示：

研究者：之前說[數學思考]是人的反應能力，思考模式，解決問題的流程？

受訪者：解決問題的流程是指把各種公式結合在一起。

研究者：現在就你的了解什麼是數學思考？

受訪者：有邏輯性的思考方式，例如證明題還有公式的推導，能整合各方面的資訊。

研究者：和以前的說法有什麼差異？解釋一下吧！

受訪者：就是不會錯得太離譜，有跡可循的方式。

（安瑜，930107學後訪談）。

安瑜在學期末時對於數學思考的理解傾向於認為，推理的邏輯性能保證過程的合理性和和結果的確定性，這樣的想法普遍存在於學生文字與語言的表達之中，而且不少人也同時舉例說明其論點。例如羽俊於學後問卷中舉課程中所曾介紹的巴斯卡三角形如何應用於二項式定理和費波那西數列為例，說明數學思考即為理性思考，如何做有條理、有系統的思考，並解決問題。至於其他談到邏輯推理與數學思考的相關性的受測者中，許多學生也能舉出一些課堂實例來佐證他們的想法。如盛育就認為祖氏原理所做的推論：緣冪勢既同，則積不容異（兩個高度相同的立體，若在距底面同高處之截面積相同，則兩立體的體積也必定相等），就是一種邏輯性、合理性、的數學思考。

另外好幾位學生於學後問卷中表示，數學思考就是「尋求問題與數學之關聯性」或「以數學角度看問題」。由於學前問卷中並

沒有類似的說法，所以何謂以數學角度看問題值得加以深究。只是無論在文字或語言的表達上，受測者或受訪者所提供的資訊並無法幫助我們瞭解他們更深一層的想法。他們所表示的不外乎是「用數學來思考生活上的問題」之類較為表面的說法。這可能是由於他們並無實際的體驗，因此無法做更深層的論述。不過另一個值得觀察的重點是已經有許多受測者談到數學思考是對一個未知問題鑽研的過程。一位受訪者偉齊於學期初表示數學思考就是以自己的觀點去看待每一個數學的特性再去判斷對錯，於學後訪談中他表示了不一樣的看法：

研究者：問卷上說碰到一些從未碰過、看過的問題，然後自己動腦去思考如何解開，像老師每次出的作業就可以稱為數學思考，意思是？

受訪者：就是第一次碰到的題目，和我們教的好像是有關係，應該是那些同樣的東西延伸出來的吧！然後我們從來沒有碰過，然後去碰去自己想的話，我覺得就是數學思考。

研究者：那這兩次的答案有什麼不一樣？

受訪者：我第一次看到的時候，我是以好像要自己去發明的感覺，就是像以前的數學家發明那種特性的感覺，自己去研究一個問題以後發展出來的，然後判斷對或錯，我覺得是這個樣子。然後看到這個之後覺得是在面對現在的問題而已。

（偉齊，930107學後訪談）。

從偉齊的回答可以看得出來，他之前認為數學家解題時很輕易地就可以依其個人想法判斷出問題的解法（於學前問卷上偉齊形容數學家是瘋子），所以將這種想法投射在對於數學思考的理解上。而於學期末時由於增加了一些思考非制式問題的經驗，因此在對數學思考的詮釋上可能有了些許的差異。這種將對數學家解題情境的想像投射到對於數學思考的認知上的現象屢見不鮮，不少人（13/55）表示數學家解題時可能會陷入一種自我的心理狀態，對問題追根究底不放棄，直至解決疑惑為止。

除此之外，問到數學家如何解題時，學生表現出比較多樣化且具體的描述。例如數學家擅用逆向或迂迴式的思考模式、利用圖形將問題具體化、跳脫既有的限制與思考模式等等。張哲在問卷中表示數學家經常從各種不同方向思考，於訪談中他和研究者進行了以下的對話：

研究者：之前你說無法想像數學家是如何思考的。後來你說，嘗試用各種角度解決數學問題。例如阿基米德常以物理角度解決數學問題，什麼意思？

受訪者：就是上次做的那一題，他用圓錐和圓盤以槓桿原理求出圓球的體積[訪談中受訪者對此事的描述不甚完整，在此將其補正]，我是看他可以這樣想，所以我就這樣寫。

研究者：數學家會用比較多的角度來看？。

受訪者：嗯！

研究者：之前是說不知道，後來說一般人會以既有的去思考，數學家會用大眾未知或尚未接受的觀念，意思是？

受訪者：學微積分想到的，像那時候大家無法接受1除以無限大那一類的觀念，但是他[數學家]卻可以用這樣的觀念來解釋東西。

研究者：也就是說一般人只會用已知的東西來解，數學家會用比較冒險的想法，不見得都對，可是他們會用比較先進的想法來解決問題？

受訪者：像之前有學過例如分母是$x-1$好了，

然後上面的式子也是 x 的多項式，如果 x 代1進去的話，分母就0嘛！答案就是無限大。如果我還沒有學過那個題目[指羅必達法則]，我可能也會這樣想，不過學過之後就知道[分母分子公因式]可以消掉，就求出極限。

（張哲，930106學後訪談）。

從對話中可以看出張哲也能接受數學家犯錯的情形，也注意到數學家思考的可能謬誤。例如他在第二次隨堂報告中對歐拉（Euler）誤用無窮等比級數公式而得到矛盾結果的情形表示：

許多人使用數學公式來解決問題，但是往往只記住式子的長相，它的使用時機卻無法適當的掌握住。由歐拉的例子可以看出就算是數學家也難以避免……因此邏輯性的思考是相當重要的。

（張哲，921125第二次隨堂報告）。

顯然地，學期初始無法想像數學家的思考方式的張哲，已能夠透過具體案例勾勒出他心中對數學家解題的概念圖像。

(二)數學知識

如前所述，大部份學生於學期初始對於數學知識抱持著一種表層的認知和強烈的工具化傾向。從學前與學後資料的比對後發現，這種現象並沒有消失。在回答什麼是數學時，有20位（學前19位）受測者認為數學就是牽涉到數字運算的學問或方法，15位（學前也是15位）表示數學是應用於科學或者日常生活上的工具。雖然在量的方面幾乎沒有變化，不過經進一步分析後發現在質的方面有部份板塊移動情形。首先於學期初有8位受測者放棄對此題做答，但在學後問卷中所有受測者皆對此問題表示他們的看法。另外一些於學前認為數學就是牽涉到數字運算的學生在學期末則給了不同的詮釋，包括數學是一種「抽象的理論」、「尋求真理的過程」、「宇宙不變的語言」、「需要思考的學問」等等，而其中比較值得注意的是最後一種說法。在學前觀察中很少受測者將數學與思考做相關性的連結，但在學後問卷中有10位學生表示數學是一門須動腦思考、具有創意的學科。一位受測者和坤於學期初表示數學就是把一些東西做推算，然而在學後問卷上他表示數學是一種循序漸進的東西，沒法一步登天，而數學就像藝術一樣，可以很華麗，也可以很簡單。由於他並未參與訪談，因此無法得知何謂數學就像藝術一樣。不過我們可以透過另一位接受訪談的學生申豈的談話當中去探得一些蛛絲馬跡：

研究者：那數學和藝術有什麼一樣的地方？

受訪者：嗯……創意嗎？

研究者：你問卷上說數學也是一種藝術，就是如何在最簡單、最短的方式表現，什麼意思？

受訪者：一個題目，你可以寫得很簡單，也可以寫得很複雜。

研究者：所以一個很複雜的數學可以寫得很簡單，就是一種藝術？。

受訪者：對啊！

（申豈，930108學後訪談）。

申豈和和坤兩人所表現出的看法似乎有某種程度的一致性，他們都將數學視為一門「有限制性的創意思考」的學科，這和大部份的受測者於回答「創意與程序」這個問題時所表達的觀點互相呼應。

對於數學知識是如何產生與發展的這個主題，於學期初有11位學生沒有作答，其餘大部份的學生（24位）均認為與日常生活或科學發展相關。在學後問卷上所有受測者都對這個問題提出自己的觀點，並且呈現多樣

化的取向。多數的學生仍主張數學知識之產生係源於人類生活的需求，但對之後持續發展的解讀則較為多元。與學前問卷比較後發現學生對這一個問題的論述集中在兩個重點上：(1)數學知識承先啟後的概念；(2)數學家所扮演的角色。關於前者不少學生認知到數學知識的延續性和數學研究動機的轉變。鈞燕在問卷上表示：

由最早的交易到時間、空間、天文等等，由生活所需到後來的學術研究，由最初的點線面，到至今的微積分，可說是數學的發展是由原本的需要轉變成探索。

（鈞燕，921230學後問卷）。

於後續訪談中他也再次強調數學知識一直隨著社會的發展而轉變，由早期的被動需要到後來的主動探索。另一位受訪者安喻於學前表示數學知識的發展就是為生活方便與計算所需，而在學期末他表達出不同的看法：

研究者：數學知識是如何產生的？後來又是如何發展？

受訪者：一開始是用來解決日常生活的問題，後來發展解決科學或證明的問題，大致上數學知識是為了學數學而產生的。

研究者：什麼意思？

受訪者：解決日常生活的問題，數學早就夠用了。不會用到這麼深入的數學，比較深入的數學是科學那方面的。

研究者：那後來的數學只是為了數學而數學，跟日常生活沒有關係？

受訪者：嗯！應該是這樣。

（安喻，930107學後訪談）。

在接下來的問答當中安喻也認為數學是可以具有數學家個人風格的，不必完全依賴社會需要，可以只為滿足個人的好奇。類似安喻這種直接指出數學知識發展與數學家關係的情形不在少數。例如勝益在學期初認為數學知識的發展是由於數字間之應用與變化而產生，但在學後問卷與訪談中不僅顯現出數學知識延續性的觀點也強調數學家的角色：

研究者：你的看法數學知識是如何產生和發展的？

受訪者：數學知識是隨時間慢慢組合起來的，由最後的數學家提出證明，公式確定無誤，合情合理所產生的。

研究者：什麼意思？

受訪者：像微積分基本定理，之前有牛頓和他老師，慢慢累積下來，最後才由柯西證明出來。。

研究者：所以數學知識是隨時間慢慢累積起來的。那之前你是說數字間的應用，感覺比較沒有時間累積的觀念？

受訪者：對！

（勝益，930106學後訪談）。

從對話中可以知道勝益對數學知識發展的認知，相當程度受到微積分基本定理的影響。一般微積分課程通常先介紹不定積分，然後在定積分的定義之後引進微積分基本定理。不過由於微積分基本定理在微積分的歷史發展中佔有舉足輕重的地位，因此在這門歷史導向的微積分課程當中授課者要求學生先以定積分的定義計算定積分問題，之後談到費馬與巴羅（Barrow）的「準微積分基本定理」，再來介紹萊布尼茲（Leibniz）與牛頓如何處理這個問題，直到柯西（Cauchy）對微積分基本定理的證明為止，最後才引入不定積分，讓學生瞭解微積分基本定理的作用和為何需要不定積分。經過大約一周四小時的解說後，研究者要求學生寫下他們對微積分基本定理整個發展過程的想法，以瞭解他們如何看待這歷史事件，並且觀察課程設

計與學生學後觀點的關係。分析後發現，學生們傾向認為數學知識的發展是一個長期累積的過程，其中數學家持續的接力過程功不可沒。勝益在隨堂報告中便表達他對這一事件的看法：

微積分基本定理經過了費馬、巴羅、萊布尼茲、牛頓等數學家的研究之下，最後由柯西做最後的整理與結束。我們大致上可以發現這幾位數學家的想法都與切線求面積有點相關。當然唯有牛頓的解題方式是運用動態的想法。但可惜的是，在柯西之前的幾位數學家都差那麼一點就可以是微積分基本定理的發明人……我想或許當時他們都把心思放在其他數學問題上，而他們只是把微積分當作解決問題的工具，所以沒有具體的整理討論。（勝益，921209第三次隨堂報告）

由勝益的報告中可以知道他對於課程中所要傳遞的內容相當清楚，對每位數學家所使用的數學方法也研讀得相當仔細，所以在回答有關數學知識如何發展時，便將對微積分基本定理的印象投射到對整體數學知識的形象認知上。

當受測者對於數學知識的產生與發展有較為多元與具體的論述後，下一階段的觀察重點就在於他們對於數學真理性的看法。學前的資料分析指出大部分學生認為數學知識是被發明的或者發明與發現兩者兼具，但學後資料卻顯示出到了學期末受測者在這個問題上的意見呈現三分天下的局面。認為是數學家所建構發明的有14位（學前有17位）；主張中立立場的有19位（學前有20位）；反倒是抱持數學知識是被發現的真理的學生從9位增加到16位。進一步做個案追蹤後發現，立場大幅度改變的現象（從發明轉換到發現，或從發現改變到發明）並不明顯（分別只有3位和2位）。換句話說，於學期末主張數學真理性所增加的學生大多數來自於學期初沒表態或原先抱持中間立場的學生，這樣的結果與研究者原先的假設有些落差。因為在這門歷史導向的課程當中，學生瞭解到微積分概念發展的「非邏輯性」，包括費馬與牛頓運用無限小所引起的批判，還有早期和無窮級數有關的悖論等等。根據 Liu 和 Niess（2006）所報告的，在瞭解到微積分的非邏輯性發展和數學家思考的可能謬誤後，學生對於數學知識的真理性大多持保留的態度。而這和本研究中幾乎有三分之一的學生主張數學真理性的看法比較起來似乎是有些差異。對於這樣的現象，有兩個可能的原因。其一，學生在這個問題上的觀點尚不成熟，因此所呈現出的文字或語言無法反映其內心真正的觀點。其二，學生雖體驗過微積分的非邏輯發展和一些謬誤，但是也同時發現數學知識的長期累積和其邏輯架構下的自我修正特性可以確保其最後結果的真確性。本研究也觀察到關於數學到底是被發現或被發明的這個問題，幾乎所有的訪談者都無法提出明確且一致的論述，也顯示出這個哲學性議題的難度。

陸、總結與討論

一、前後數學觀點的比較

在數學思考的觀點方面，和學前資料比較之後發現，多數受測學生於學期末傾向於認為數學思考不僅是一個思考解題的流程，而且是一個具邏輯性與合理性的有系統的思維過程。這方面不少學生舉出於課程中所學過的具體數學案例說明他們的想法。由於對於數學家的解題策略印象深刻，因此部份學生將數學家的解題印象投射到對數學思考的認知上，而且對於數學家思考方式的描述也變得較具體。例如學生提到數學家經常跳脫既有的條件限制而擅長運用逆向或迂迴式的思考模式，且利用圖形將問題具體化。他們

也注意到數學家解題時可能會陷入一種自我的心理狀態，對問題展現出追根究底不放棄的態度。更值得注意的是，雖為數不多，但已有8位學生指出數學家解題過程包含「假設—測試—證實」三個步驟。這些對於數學家思維方式的描述可以說明為何學生的學後問卷中會出現「數學思考就是尋求問題與數學之關聯性或以數學角度看問題」的這種說法，而這種說法和 Schoenfeld 所謂的擁有某種數學觀點的意思就是「以數學家的方式看世界」（Schoenfeld, 1992, p. 340）相互呼應。

不過學生對於創意思考的觀點前後差異並不大。認為程序重於創意的學生一直是少數，而支持創意重於程序和持中間立場的人無論在量的增減或質的論述上，學前與學後並無明顯差異。至於在個別觀點上，也沒見到顯著的立場改變的情形。只是無論於問卷或訪談中，不少學生曾提到一些古代數學家（如劉徽、阿基米得）的思考方式很具創意，可是學前與學後對數學創意的觀點卻幾乎沒有發生顯著變化，這種情形頗值得玩味。可能的解讀是由於學生對數學創意思考的觀點存在著一種雙層認知，學生認為他們屬於底層，所面對的或者所能解決的題目大都只要依照既定步驟與公式即可，因此屬於上層的數學創意或許很重要，但對他們而言畢竟宛如天邊的彩虹，非他們所能體驗與掌握。此外學生狹隘地將數學創意解讀為「一題多解」或「多面向」的思考模式，也就是說將「創意性」（creativity）等同於「多重性」（multiplicity）的認知，在數學學習上仍算是相當淺層的。Ervynck〈1991〉將數學創意定義為發展結構性思考的一種解題能力，其中除包含邏輯演繹的本質外，更需要深層結構的直覺去策動想像力與靈感，也就是數學創意的用途在於決定假設的適當與否並且導引至運用演繹程序以建立證明。Sriraman（2004）觀察五位數學家如何運用他們的創意思維後發現，數學創意的激發符合形態模型（Gestalt model）的四階段論（Hadamard,1945）：預備期（preparation）—醞釀期（incubation）—洞見期（illumination）—證實期（verification）。而且互動、想像、啟發、直覺、和證明是數學創意的共同要素。因此依 Ervynck（1991）的觀點和 Sriraman（2004）的研究來看，本研究中學生對數學創意的覺察只在最後結果的呈現部份，至於對數學創意的過程與要素都只有表層的理解，也因此影響他們發展更深入認知的機會。雖然本研究中教師無論在教室互動、教材安排、與作業的選擇方面都積極想要觸發學生對於數學直覺與創意的認知，但很明顯的其成效並不顯著。

在學生關於數學知識的觀點方面，從文字與口語資料看來，無論學前與學後，「數字」、「計算」、與「工具」三者一直是學生對於數學知識的整體印象。從他們的數學自傳中可以看得出來，從小到大的整個數學學習過程中，這三個印象早已根深蒂固地植立於他們心中。不過除此之外，從資料中也發現學生們在學期末對於數學知識內涵的論述顯得較為多元。首先，許多學生指出數學是一個需要動腦且具創意思考的學科，宛如藝術般地將複雜的東西以簡單的形式表達出來。當然由前一節的說明可以知道學生對於創意思考的內涵瞭解得並不深入，因此這種說法也只是反映表象的認知。不過由於在學前資料中鮮少見到這種將數學知識與數學思考做連結的說法，所以似乎可以看到在他們體驗過和見識過一些同儕和歷史上數學家的解題策略後，也引發他們開始注意數學知識的發展元素。也因此在對於數學知識的產生與歷程方面，學生的論述開始強調數學家所扮演的角色。再者，學生的學後觀點也呈現

出他們理解到數學知識承先啟後的階段性過程。他們堅信數學知識始終隨著人類與社會的需求而增長，不過部份學生注意到這種「量」的累積因為發展時空、動機、與目的的不同，所以也伴隨著「質」的變化。如鈞燕所言：「數學的發展是由原本的需要轉變成探索」。

學生對這兩個現象的關注也顯示他們開始注意到「人」在數學歷史發展中的關鍵地位，而這也是所謂「人文數學」（humanistic mathematics）的精神。人文數學主張數學不僅僅是概念的創造與事實的探索，也是一門充滿人類觀點與歷史的學科，而這樣的精神則要透過教育的方式傳達，因此在教學上必須讓學生體驗到人類在數學探索上所經歷的智識冒險（White, 1993）。人文數學學者所要達到的目標是破除公眾對數學的四個迷思印象（Hersh, 1997）：單一性（unity）、統一性（universality）、客觀性（objectivity）、和確定性（certainty）。本研究發現即使學生們意識到人類在數學發展歷程中所扮演的角色，也體認到數學發展過程可能發生的謬誤，到了學期末認為數學知識是被發現的真理的學生卻也大幅增加，也就是並未打破對於數學確定性的迷思，並不完全符合人文數學學者的期待。不過這種現象的發生一來可能是由於他們對這個問題無法完全掌握，所以沒辦法做完整的論述；二來可能學生們談到對數學的印象時，部份學生心中想到的是它最後所表現出來的外在形式（符號、公式、定理），而有些人則聯想到它內在蘊育的歷程（假設、測試、證實）。而這兩種印象的糾結導致我們很難觀測出他們內心真正所抱持的觀點。數學究竟是被發現或被發明的這個充滿爭議的哲學議題在教育上是否有任何價值呢？雖然從這次研究所得到資料並不夠明確，不過依據初步觀察的心得，在此仍要提出一個假設，那就是假使學生認為數學是由人類所建構與發明的，則他們對於數學思考與數學知識可能會抱持著一種較為動態與活潑的信念，因此在數學學習上會較為主動與積極；反之，若覺得數學是早就存在的真理，其過程與結果毋庸辯駁，那他們對於數學思考與數學知識的觀點也許較為固定與僵化，而在數學學習上則顯得較為被動與觀望。當然，這個假設有待未來持續的觀察研究去證實或證偽。

二、歷史導向課程特徵與學生數學觀點

本研究透過比較學生學前學後的文字與口述資料發現，部份學生的數學觀點確實發生某種程度的「轉移」，而且這些數學觀點的轉移與課程設計的內容特徵有相當程度的關聯，茲分述如下：

(一)不少學生指出，課程中所指定的一些與歷史問題相關的作業迥異於一般傳統的課本習題，確實激發出他們對於數學解題的進一步思考，而非單純地套用公式。

(二)在課程中見識到歷史上的數學家如何思考與處理數學問題，他們也意識到數學思考是一種邏輯推理與做合理性分析的過程，並將對於數學家解題情境的想像投射到數學思考的認知上。

(三)無論是歷史問題的作業或課程中所介紹的數學家的解題策略，都使得學生對於數學思考的論述變得比較具體與多樣，也引發他們對於數學知識的理解變得較為豐富，不再認為數學只是一門與數字計算有關的學科。

(四)由於在本歷史導向課程中瞭解到數學概念的歷史演化與進展，學生更能體會數學知識承先啟後的延續性，瞭解數學確為人類文化的智慧結晶，和數

學研究動機的轉變。

另外在學前階段學生對數學的闡述絕大多數偏向直覺經驗主義，只有極少數學生的觀點類似於推論經驗主義，但沒有出現推論形式主義的主張。歷經一學期的歷史導向課程後，仍見不到任何推論形式主義的論述，不過屬於直覺經驗主義的論述明顯減少了，而其中只有一部份轉換為拉卡托斯觀點的推論經驗主義。然而仍有部份學生的信念似乎無法歸類到 Sierpinska（1987）的三個主張當中。若仿照 Sierpinska（1987）的分類標準，本研究發現這些學生的數學觀點應該被歸屬到另一個新的類型—直覺形式主義，也就是獲得知識的方法主要是藉由練習與模仿，數學知識的可靠性建立在邏輯推演上、但也必須在直覺上能接受。抱持直覺形式主義的學生對數學知識仍抱持一種工具化的認知，不過也認為抽象數學的存在具有自身的意義與目的。直覺形式主義的數學觀雖不若直覺經驗主義般地天真或素樸（naive），但由於缺乏對於「假設—試驗—證實」這種數學思考過程的意識與對抽象數學體系的瞭解，在接觸到較高階的數學時，往往就容易產生學習認知上的障礙。

不過必須提醒讀者的是由於並無控制組的比對，本研究中學生數學觀點的轉移絕對不能斷言一定是受本研究中歷史導向課程的影響。所發現的證據只能確立課程特徵與學生數學觀點轉移的相關性，但不能解釋為因果性。再者，學生數學觀點的轉移絕不能視為他們的數學觀點已改變，只能解釋為他們前後對於數學思考與數學知識的論述焦點有所不同。因此為使這方面的研究與理論的基礎更為穩固，在此對未來的相關研究提出三點建議。第一，進行相關的實驗性研究，納入對控制組的觀察，以瞭解歷史導向課程與發展學生數學觀點之間的因果關係。第二，進行長期與追蹤性的觀察，以釐清影響學生數學觀點演化的變因。第三，觀察學生數學觀點與學習行為的互動情形，以分析學生的數學觀點如何誘發或制約其學習行為，又數學觀點的演化對其學習行為的發展是否產生一定的效果。如 Presmeg（2002）指出，學生對於數學本質的認知與其衍生出的相關信念是他們在數學學習上的關鍵元素。唯有以長期且多角度的觀察研究，方能清晰地描繪出學生數學觀點與學習取向兩者關係的輪廓。

國內已有不少研究探討科學史與科學教學相互間之關聯（許良榮和李田英, 1995; 廖麗貞、林寶英和洪振方, 2000; 蕭碧茹和洪振方, 2000），但在數學教學方面則相對地較少見到類似報告出現於正式發表的文獻之中，本研究便是在這方面的一個初探，希望能吸引更多的學者關心這個議題。

參考文獻

1. 洪萬生（2000）：《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點。**科學教育學刊**, **8**(3), 215-224。
2. 許良榮和李田英（1995）：科學史在科學教學的角色與功能。**科學月刊**, **179 期**, 15-27。
3. 廖麗貞、林寶英和洪振方（2000）：將達爾文演化論發展史融入大學生命科學通識課程之研究。**科學教育學刊**, **8**(2), 179-198。
4. 蕭碧茹和洪振方（2000）：以歷史認知分析法探究科學史及其在科學教育上的意涵。**科學教育月刊**, **235 期**, 2-14。
5. American Association for the Advancement of Science (1990). *Science for all Americans*. New York: Oxford University Press.

6. Avital, S. (1995). History of mathematics can help improve instruction and learning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 3-12). Washington, D. C.: Mathematics Association of America.
7. Barbin, E. (1996). The role of problems in the history and teaching of mathematics. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica* (pp.17-25). Washington, D.C.: Mathematics Association of America.
8. Boud, D., & Feletti, G. (1991). *The challenge of problem based learning*. New York: St. Martin's Press.
9. Carlson, M. P. (1999). The mathematical behavior of six successful mathematics graduate students: Influences leading to mathematical success. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 237-258.
10. Cifarelli, V., & Goodson-Espy, T. (2001). The role of mathematical beliefs in the problem solving actions of college algebra students, *Proceedings of the 25th Conference on The International Group for The Psychology of Mathematics Education, 2*, 265.
11. Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School, 27*(4), 25-32.
12. Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53), Netherlands: Kluwer Academic Publishers
13. Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 55-61.
14. Gall, M. D., Borg, W. R., & Gall, J. P. (1996). *Educational research*. White Plains, NY: Longman Publishers.
15. Hadamard, J. (1945). Essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton, NJ: Princeton University Press.
16. Hersh, R. (1997) *What is mathematics, really?* New York, NY: Oxford University Press.
17. Horng, W.-S. (2000). Euclid versus Liu Hui: A pedagogical reflection. In V. J. Katz (Ed.), *Using history of mathematics in teaching mathematics* (pp. 37-48). Washington, D.C.: Mathematics Association of America.
18. Horng, W.-S. (2004). Teacher's professional development in terms of HPM. *Proceedings of HPM 2004 Meeting,* 261.
19. Katz, V. J. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 62-63.
20. Kline, M. (1980). *Mathematics*: *The loss of certainty*. New York: Oxford University
21. Kloosterman, P., & Stage, F. K. (1991). Relationships between ability, belief and achievement in remedial college mathematics classrooms. *Research and Teaching in Developmental Education, 8*(1), 27-36.
22. Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations,* Cambridge: Cambridge University Press.
23. Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs*: *A hidden variable in mathematics education?* The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
24. Liu, P.-H. (2002). *The relationship of a problem-based calculus course on students' views of mathematical thinking*. Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University, Corvallis City, Oregon.
25. Liu, P.-H. (2003). Do teachers need to in-

corporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher, 96*(6), 416-421.

26. Liu, P.-H., & Niess, L. M. (2006). An exploratory study of college students' views of mathematical thinking in a historical approach calculus course. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 373-406.
27. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
28. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
29. Presmeg, M. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practice. In G. C. Leder, E. Pehkonen, &, G. Törner (Eds.), *Beliefs*: *A hidden variable in mathematics education?* (pp. 293-311). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
30. Rodd, M. (1993). Students' views on the nature of mathematics. *Mathematics Teaching, 143*, 8-10.
31. Ruthven, K., & Coe, R. (1994). A structural analysis of students' epistemic views. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 101-109.
32. Schoenfeld, A. H. (1985). A framework for the analysis of mathematical behavior. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 11-45). New York: Academy Press.
33. Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 338-355.
34. Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
35. Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-75). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
36. Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.
37. Siu, M. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on *Jiu Zhang Suan Shu*. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 345-357.
38. Siu, M. (1995a). Euler and heuristic reasoning. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 145-160). Washington, D.C.: Mathematics Association of America.
39. Siu, M. (1995b). Mathematical thinking and history of mathematics. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 279-282). Washington, D. C.: Mathematics Association of America.
40. Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The mathematics educator, 14*(1), 19-34.
41. Swetz, F. J. (1995). To know and to teach: Mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics. 29*, 73-88.
42. Torp, L., & Sage, S. (1998). *Problems as possibilities*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
43. White, A. M. (1993) (Ed.). *Humanistic mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

附錄一　歷史導向微積分課程大綱

週別	主題	授課內容（每週四小時）
一	微積分發展簡介	微積分之發展；極限概念；芝諾悖論；如何求圓面積（劉徽、阿基米得、和關孝和的方法）。
二	求不規則之區域面積 定積分	以極限概念求曲線下之區域面積；卡瓦列瑞原理（祖氏原理）；黎曼和與定積分之定義。
三	數列與級數	數列及其極限；費波納西數列；級數；無窮級數之收斂與發散性。
四	切線、切線斜率	如何求作曲線上之切線（費馬與笛卡爾）；切線的極限概念；函數極限的直覺概念；無限小量。
五	變化率	平均與瞬間變化率的概念。
六	函數極限的定義	函數極限的嚴格概念；單邊極限；函數極限之運算性質；函數之連續性。
七	函數的導（函）數	導（函）數定義、公式；三角、指數、對數函數之導（函）數。納皮爾之對數；歐拉對 e 的計算。
八	連鎖法則、隱微分	連鎖法則；隱函數微分；反三角函數之導（函）數；對數微分法；相關變率及其應用。
九	期中考	
十	函數的極值	極值定理；相對極值與絕對極值；費馬與萊布尼茲的方法；凹性；反曲點。
十一	函數的極值（續）	二階導數判別法；函數圖形；最佳化；費馬的光學原理。
十二	羅必達法則	不定型極限；羅必達法則與約翰伯努利。
十三	微積分基本定理	反導函數；微積分基本定理的發展（費馬、巴羅、牛頓、萊布尼茲、科西）。
十四	微積分基本定理（續）	微積分基本定理（續）；代數代換法。
十五	兩曲線間之面積	卡瓦列瑞原理（祖氏原理）。
十六	體積	截面積法；牟合方蓋、劉徽與阿基米得的方法。
十七	體積（續）	阿基米得求拋物線體體積；旋轉體體積；圓盤法；圓殼法。
十八	期末考	

附錄二　課後作業所使用之歷史問題

1.設計一套方法證明半徑為 r 的圓面積為 πr^2。

2.求拋物線區域面積（阿基米得）。

3.費波那西數列之計算與其前後項比值之極限。

4.計算無窮級數1–1+ 1–1 + 1–1+ 1…之值。

5.Euler 對無窮級數 $...+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+...=0$ 之證明。

6.利用 Fermat, Descartes, and Barrow 的方法求切線斜率。

7.利用 Napier 的對數定義證明對數性質

8.利用 Fermat 的方法求絕對極值。

9.證明無窮級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ 為發散。

10.Perrault 的拖曳線方程式。

11.阿基米得對圓柱體與其內接圓球之體積與表面積比值之證明。

12.設計一套方法求出圓球體積公式（不用祖沖之與阿基米德的方法）。

Exploring the Relationship between a History Oriented Calculus and the Development of Students' Views on Mathematics

Po-Hung Liu
National Chin-Yi University of Technology

Abstract

To explore the relationship, between a historical calculus course and students' views on mathematics, the one-group pretest-posttest design was adopted in which an open-ended questionnaire, students' mathematics biographies, a history oriented teaching material of calculus, students' self-reports, and the follow-up semi-structured interviews were served as the tools. The results indicated that most of the students considered mathematics thinking as the processes involved calculation and formula at the very beginning, nonetheless expressing different viewpoints after finishing the course. They attempted to connect the context of mathematicians' problem solving with the characteristics of mathematics thinking. On mathematics knowledge, students st-rongly held a consistent instrumentalist view on mathematics, before and after the course. However, at the end of the course, they were more likely to recognize mathematics as the continuity and in-heritance knowledge and the role of mathematicians on its development. Furthermore, this study also emphasizes the importance of students'understanding of the nature of mathematics.

Key words: Calculus, History of Mathematics, View on Mathematics, Nature of Mathematics