科學教育學刊
2008, 第十六卷第三期, 239-253

Chinese Journal of Science Education
2008, 16(3), 239-253

華蘅芳與《幾何原本》[1]

洪萬生
國立台灣師範大學　數學系

（投稿日期：民國 97 年 2 月 27 日，修訂日期：97 年 5 月 23 日，接受日期：97 年 6 月 3 日）

摘要：華蘅芳（1833-1902）是中國晚清數學名家，他在傳統數學主題方面，不僅擁有一些獨創的成就，而且，繼晚清一代疇人李善蘭（1811-1882）之後，他也翻譯了許多西方數學乃至於科學技術書籍。這些譯作大多是大學層次的教科用書，不過，其中也反映了華蘅芳的數學見識，儘管他當然得力於英國人如傅蘭雅（John Fryer）之合作。本文主要根據華蘅芳的兩本學算筆記本，亦即《學算筆談》與《算齋瑣語》有關《幾何原本》之評論，來說明他從這一部經典所看到的西方幾何圖像。同時，我們也將試圖連結這一段插曲與中國近代數學教育之制度化。

關鍵詞：華蘅芳、幾何原本、李善蘭、學算筆談、算齋瑣語

壹、前　言

四百年前，《幾何原本》前六卷傳入之後到1850年代之前，無論主要或次要的中國數學家所做出的回應，是中西數學知識互動乃至於一般的異文化交流的相關研究中，最精彩的篇章之一。這些研究成果，當然都直接或間接地關連到利瑪竇（Matteo Ricci）與徐光啟引進《幾何原本》時所做的論述。不過，針對偉烈亞力（Alexander Wylie）與李善蘭於1857年所引進的《幾何原本》後九卷，中國晚清算學家鮮少回應，唯一的例外，似乎是吳起潛的《無比例線新解》（1906）（王鼎勳, 2007）。在這半個世紀之間，經由李善蘭（1811-1882）、華蘅芳（1833-1902）乃至於周達（1878-1942）的傳承（李迪, 1991），中國數學逐漸現代化。要想認識吳起潛的《無比例線新解》（1906）所代表的歷史意義，應該先從理解華蘅芳的數學經驗入手。

華蘅芳應該是比吳起潛早兩個世代的數學家。徵之於吳起潛著述所表現的現代性（modernity）－譬如以解析幾何的進路來解釋《幾何原本》第十卷，華蘅芳對此之興趣，即使只是「口惠」，也很值得我們注意。這是因為在他的兩本有關學算的筆記本中，曾多次指出這第十卷過於艱深，而不適合初學者。這些提醒，應該激發了吳起潛的研究興趣才是，因此，從中國數學（教育）的現代化脈絡來看，本文之作，或許也不無價值。[2]

不過，華蘅芳也利用了《幾何原本》有關「點」的定義，說明無窮小量（或當時所

謂的「微長」)(infinitesimal)之相關概念，從而澄清微積分中譯本《代微積拾級》與《微積溯源》中有關極限之定義。這個案例，至少說明了他的部份數學見識，其中當然也反映了他對於《幾何原本》的理解與侷限。因此，在本文中，我們打算研究《幾何原本》如何影響華蘅芳的學算心得，而這當然主要依據他的兩本學算筆記：《學算筆談》與《算齋瑣語》。[3]為此，我們將舉例說明徐光啟、李善蘭分別學習《幾何原本》前六卷、後九卷的心得。此外，我們也打算簡介華蘅芳的算學生涯，藉以映照他的數學見識，譬如他對於圖說在幾何學習中所扮演的角色之瞭解。最後，基於華蘅芳這一段學算插曲之特殊趣味，我們也將論及它與近代中國數學教育制度化之關連。

針對本文所引與歐幾里得有關之文本，我們聲明如下：凡是提及《幾何原本》前六卷時，一概指徐光啟、利瑪竇合譯之丁先生改編版(Christopher Clavius's edition)；[4]又，李善蘭、偉列亞力所譯之版本，則稱為《幾何原本》後九卷。至於目前公認最可靠的Thomas L. Heath所校勘之英文版本，則稱為Heath版。[5]

貳、《幾何原本》前六卷

在這一版本中，第一卷之首先列出了界說(definitiones)三十六則、求作四則，和公論十九則。接著，再提出四十八個(命)題。

相較於 Heath 版第一冊的23個定義(definition)，本版多出了十三個，此外，它也針對界說(或定義)之必要提出說明：

凡造論，先當分別解說論中所用名目，故曰界說。[6]

在這些界說中，第三十四界相當於Heath版的定義23，敘述如下：

兩直線于同面行至無窮，不相離，亦不相遠，而不得相遇，為平行線。(歐幾里得, 1865/1993, p. 1164)

此一中譯相當符合原拉丁文。若對照Heath(1956, p. 154)版：

Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.[7]

則我們可以發現：丁先生乃至於利瑪竇與徐光啟等人，都將副詞 indefinitely 譯為「無窮」(infinitely)了。請參看本版「公論」第十一論，它在 Heath 版中原列為第五設準(postulate)，請先看前者：

有二橫直線，或正或偏，任加一縱線。若三線之間同方兩角小於兩直角，則此二橫直線，愈長愈相近，必至相遇。(歐幾里得, 1865/1993, p. 1165)

對照 Heath(1956, p. 155)版，此一中譯相當忠實：

That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.[8]

其中，同一個副詞 indefinitely 顯然未被翻譯成為「無窮」。這個不一致，若考慮即使就拉丁文的某些含混性而言，無論是克拉維斯或利、徐兩人，大概都很難察覺。這是一個與希臘無窮概念有關的問題，甚至於現代數學家都會忽略，不過，在此我們無法顧及。[9]

以上是有關第一卷的界說問題。接著，我們考察「求作」。所謂「求作」(postulata)，《幾何原本》前六卷加註：「求作者，不得言不可作。」第一至三求，與 Heath 版之設準1-3相同。原 Heath 版本的設準4、5，則分別被《幾何原本》前六卷移到「公論」第十、十

一論。[10]至於第四求，則完全是丁先生的增訂：

設一度于此，求作彼度，較此度或大或小。

此一「求作」之後，有一顯然屬於利瑪竇、徐光啟之註解，引用了《莊子・天下篇》所謂的「一尺之棰，日取其半，萬世不竭」，藉以說明「度者，可以長，亦可以短。長者增之可至無窮，短者減之亦復無盡。」為什麼呢？利瑪竇、徐光啟接著說：

自有而分，不免為有。若減之可盡，是有化為無也。有化為無，猶可言也。令已分者更復合之，合之又合，仍為尺棰。是始分之初，兩無能并為一有也。兩無能并為一有，不可言也。[11]

這一求作在本書中似乎未見引用，[12]目前筆者尚無從得知丁先生何以做此增訂。不過，由於這一註解涉及點的界說：「點者無分」，所以，明末之後的中國數學家如何反應，才會引起我們的好奇。在本文中，我們將討論華蘅芳如何利用相關概念說明無窮小量。

參、250 年的幾何歷程：徐光啟 vs.李善蘭

在《幾何原本》前六卷出版後，徐光啟撰寫了《勾股義》，意在利用《幾何原本》的邏輯推理方法，來分析中西測量方法的異同，並且論證中國古代的勾股方法。[13]

儘管如此，針對《勾股義》第7題：

勾股，求容圓

法曰：甲乙股，六百。乙丙勾，三百二十。求容圓。以勾股相乘得一萬九千二百，倍之，得三萬八千四百，為實。別以勾股求弦，得甲丙弦六百八十。并勾股弦為法，除實，得容圓徑乙子二百四十。（徐光啟, 1983, pp. 5-9）

徐光啟的「論曰」就花了將近九頁篇幅，企圖證明他所「計算」出來的「辛壬」或「乙子」邊，果然是「容圓徑」（參考圖1）！（徐光啟, 1983, pp. 5-9）。為此，他還必須證明這

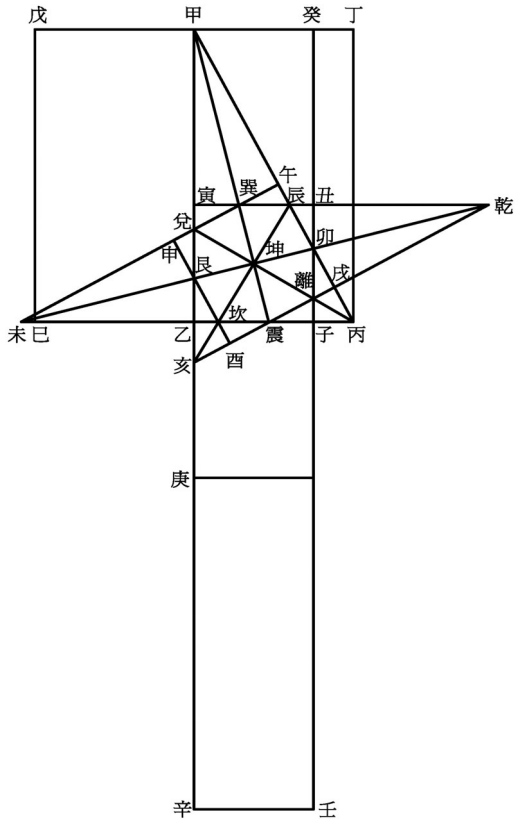

圖 1：徐光啟《勾股義》第七題「勾股容圓」附圖

一容圓（內切圓）與勾股形三邊之相切，以及這勾股形三角之平分線交於一點。不過，最終他並未成功地完成證明，儘管他訴諸金元李冶《測圓海鏡》中的『勾股步率』（以其專論直線與三角形故也），而不是中國傳統數學家對圖形的割切移補（譬如劉徽的「出入相補」）（Engelfriet, 1998, pp. 293-295）。

相對於徐光啟的無法掌握幾何作圖之意義，李善蘭的表現則是非常耀眼，令人刮目相看。比如說吧，在他的《天算或問》中，李善蘭不僅利用了獨特的方法，證明了海龍公式（Heron's formula），[14]同時，他也運用了顯然是自創的方法，提出正五邊形的尺規作圖及其證明。茲先引述如下：

或問曰：《幾何原本》作圜內五邊形法，似覺太繁曲，不知更有簡法否？

答曰：亦嘗思一法，先作一切線，等於半徑之半，即作一割線。次以切線端為心，切點為界，旋規分割線為二分。次自圜心作半徑之垂線，末自切點作線過割線，分點至垂線，即五等邊形之一邊也。（李善蘭, 1867, pp. 20-21）

緊接著，李善蘭進一步證明此一所作圖形即為所求：

又問曰：願聞其理。

答曰：凡理分中末線，小分、半大分和之正方，五倍半大分之正方《幾何原本》十三卷三題半徑為大分，切線為半大分，割線即小分、大分和也。以切線減之，則餘為小分。自圜心至末所作線之半徑垂線，與割線減餘等亦為小分，因割線上兩三角相似，皆有兩邊相等也。凡理分中末線以圜內六邊形之一邊即半徑為大分，則必以十邊形之一邊為小分十三卷九題，故垂線為十邊形之一邊。凡圓內五邊形一邊之正方，等于六邊形十邊形各一邊之正方和十三卷十題。今以半徑為股，垂線為句，而末作線為其弦，則必等于五邊形之一邊矣！（李善蘭, 1867, pp. 20-21）

其中，李善蘭還利用了《幾何原本》十三卷中的命題三、九和十，才完成這一個所求圖形的證明。由此可見，他對於後九卷的熟稔程度。

肆、華蘅芳的數學經驗

華蘅芳是中國清末江蘇金匱人。他幼年讀書並不出色，七歲時背誦《大學》，每日僅得四行。十四歲開始習作八股文，全篇幾乎無一字不被塾師修改。[15]但在另一方面，華蘅芳十五、六歲時，「偶於故書中撿得訪坊本算法，心竊喜之，展玩不數月而盡通其意」，他父親「見其癖嗜此學，必是性之所近，遂為之購求算學之書。」（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）這是他自學算學的開始。

這些書籍包括《周髀算經》、《九章算術》、《孫子算經》、《五曹算經》、《張邱建算經》、《夏侯陽算經》、《緝古算經》、《海島算經》、《益古演段》以及《測圓海鏡》。其中「除《益古（演段）》、《（測圓）海鏡》二書以外，其為常法所能通者，馭之無不迎刃而解。惟於天元之術，則格格不相入者幾及一年，始得渙然冰釋。」（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）他這一段面對天元術「困而學之」的經驗，後來在遭遇西方代數、微積分時，歷史幾乎重演，或許這是他在學算筆記如《學算筆談》與《算齋瑣語》中，[16]提供很多篇幅討論這些方面學習心得的一個原因吧。

接著，華蘅芳又繼續搜得《數書九章》（南宋秦九韶撰）、《梅氏曆算叢書》（清梅文鼎家族撰）、《觀我生室全集》（清羅士琳撰）（郭慶章, 2005）、《李氏遺書》（清李銳撰）、《董立方遺書》（清董祐誠撰）、《衡齋算書》（清汪萊撰）、《里堂學算記》（清焦循撰）以及《游藝錄》（清駱騰鳳撰）（陳鳳珠, 2001），「始知算學有古今中西之異同。」（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）至於他「能通幾何之學」，乃是他二十歲（1852）閱讀《數理精蘊》（康熙皇帝敕編）的結果，[17]因為「《幾何原本》當時尚未譯全，其前六卷世無單行之本。」不過，他最終對《幾何原本》的理解與重視，應該也僅止於前六卷而已，請徵之於他的自白：「是書第十卷之理甚深，非初學所能通曉，但觀其前六卷可也。」（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）儘管如此，他似乎頗能體會此一典籍的嚴謹邏輯結構：

幾何之界說及各題，字字齊著力，其釋題之語，無一字不周到，無一句無來歷，學者讀慣此書，其心思自能縝密，則看各種算學之題，如禹鼎燭奸，可以無遁形矣。（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）

一八五二年左右，當華蘅芳前往上海墨海書館拜訪李善蘭時，[18]《幾何原本》後九卷雖然尚未著手翻譯，但是，李善蘭當時正

與偉烈亞力對譯《代數學》與《代微積拾級》，立即對他大力推薦代數與微積分：

此為算學中上乘功夫。此書一出，非特中法幾可盡廢，即西法之古者，亦無所用矣！（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）

華蘅芳「於是知天元之外，更有代數、微分、積分之術」。（華蘅芳, 卷五, 1897, p. 1）儘管譯事尚未完成，華蘅芳仍從其譯稿錄得數條帶回，結果始終不得其「用意之處」。幾年之後，華蘅芳獲贈譯本，然而「批閱數頁外，已不知其所語云何也。」他自承「其格格不入者，猶之初讀《（測圓）海鏡》時也。」在李善蘭的鼓勵下，他「反覆展玩不綴，乃得稍有頭緒。」（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）華蘅芳以下列比喻描述他對西方代數的「漸進」瞭解：

譬如傍晚之星，初見一點，旋見數點，又見數十點、數百點，以致燦然佈滿天空。（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）

而不像他早年學習天元術，「不悟則已，一悟則豁然開朗也。」至於其原因，則是他認為「代數之術，其層累曲折多於天元」，也正是如此，所以「其致用之處亦比天元更廣。」於是，「從此以後，無時不究心於代數。」（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）無論如何，華蘅芳希望有志於學算者分享他的「困而學之」，必定是他著述《學算筆談》的動機。同時，他的「困而學之」也表現在他研讀《代數學》與《代微積拾級》的共同經驗。其實，這也是他後來與傅蘭雅（John Fryer）合作翻譯西算的主要考慮。因此，1872年開始，他們兩人合作翻譯了《代數術》、《微積溯源》、《三角數理》、《代數難題解法》以及《決疑數學》等書。[19]其中除了《決疑數學》之外，其他所涉及之理論似乎不多，完全著重在算法上，譬如《代數術》的編排方式，就頗有編序式學習（programmed learning）之特色，亦即一個方法接著一個方法，並儘可能以算則（algorithm）形式表達每一個方法。如有必要對某些定理加以「證明」，則多半先從幾個具體實例入手，再歸結為寥寥數語「結論」。[41]這大概也可以很好地解釋他相當工具性理解（instrumental understanding）數學之傾向。

1874年，江南製造局出版《代數術》及《微積溯源》。同時，華蘅芳也應邀到上海格致書院教授數學，直到1887年他應聘天津武備學堂教習為止。（李儼, 1955）在這兩所學校教數學，雖然內容都僅限於初等範圍，但是以西算風格為主，殆無疑問。他的《算法須知》與《平三角測量法》，理應分別反映了他在這兩所新式學校的教授內容才是。

根據他自己的說法，《算法須知》「專為初學算法之人而作」。事實上，這本書包括自然數、分數及小數等加減乘除四則運算，開方及比例法，「於尋常算法，已幾賅備，設題演數，尤甚簡明。」它的體例與內容頗為類似《學算筆談》的前四卷，「皆為算學中最淺而最要之事」。因此，他認為「學者苟能于此書之各法，習之純熟，則心中必自有領悟，再取他種詳備之算書觀之，如幾何、代數、微分、積分等術，必能漸通其義。蓋其術雖極精深，仍不外乎加、減、乘、除、開方等法所積累變化而成，故可漸得其解也。」（華蘅芳, 1897b, p. 1）顯然，華蘅芳在此並未提及藉以過渡到西方代數的「天元術」，所以，本書極有可能是他為格致書院學生所寫講義。不過，《學算筆談》前六卷於1882年出版，同年華蘅芳也自序《算法須知》（1897b），因此，內容雷同自是情理之事了。

伍、圖說與幾何學之定位

華蘅芳相信「一切算法皆從條段之理而生，

故算學中淺近之理，皆可以幾何之法明之。」（華蘅芳, 卷五, 1897a, p.4）。因此，「算學中惟條段之理能使人深信而不疑。凡圖之所能明，數之所可核者，無非依條段以求之也。故初學之人宜先從條段入手。」（華蘅芳, 1896a, p. 6）有關幾何圖說之評論：

古之算書每不多作圖。《九章（算術）》中惟有勾股之圖，[21]以青出朱入明勾股兩冪之和等於弦冪而已。其餘各術無有以圖明之者。自《幾何原本》譯入中土，而象數之學乃得大顯于世。其妙處在于用甲乙丙丁等字，以代手之指，而點線面體之形象，乘除加減之曲折，莫不可按圖索之，此算理所以易明也。（華蘅芳, 卷十二, 1897a, p. 2）

不過，他也注意到：

以圖顯算理，祇能至立方而止，多乘以上不能作圖，則非圖之所能顯，故算學家又創立代數之術，一切條段莫不可以算式明之，于是昔之所非圖不明者，今可不必用圖矣！昔之所不能作圖者，今可以代數之式，代其圖之用矣。余之算書皆不作圖者，亦因用代數式之故。（華蘅芳, 卷十二, 1897a, p. 2）

而這當然就很好地解釋了他對於《九章算術》卷五「商功章」的圖說之評論了：

余以為臺錐之術，[22]以圖說解其立術之理，不如以代數解之為便。夫斜解立方為兩塹堵，斜解塹堵為一陽馬、一鼈臑，此故非圖不明者也。剖全臺之積為一立方、四塹堵、四陽馬，此亦非圖不明者也。既明乎此，則可將臺之高廣長各數，從代數之術求其立方、塹堵、陽馬之積，而合之即可得臺之全積，且亦得求台積之本術。凡商工〔功〕之題，皆可用此法馭之。堆垛亦然。（華蘅芳, 卷十二, 1897a, p. 3）

總之，圖說固然於算理不可或缺，然而，華蘅芳認為利用代數表徵，才是最終的學習目標，這是因為不如此則無以學習微分這種「至精至密之法」了。

然則華蘅芳如何評論《幾何原本》？請引述他的《學算筆談》卷四：

《幾何原本》為西法中最古之書，不言法而言理，不言數而言象。蓋徹乎立法之源，凡九章所不及者，無不賅也。不讀幾何則不能明點、線、面、體之理，而於加、減、乘、除之用，終不能了然於心目之間。（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 1）

還有，《學算筆談》卷十二也指出：

《幾何原本》為學者最易明之書，且於此書之理無不深信。然至第十卷則不易明且心中不能無疑，此因數中有等、無等，有比例、無比例，非圖所可明也。以代數釋幾何，幾乎可以廢圖，然至第十卷亦不能盡明，因代數式中不能顯有等、無等，有比例、無比例之事也。余以為後日必能有一種算術其式中專能顯此各事，而後幾何之第十卷乃有大用。（華蘅芳, 卷十二, 1897a, p. 3）

其次，我們再引述《算齋瑣語》的類似看法：

《幾何原本》為專言條段之書，觀其前數卷中論平行之線、方圓之面、三角之形、各邊各角各積、極錯綜變化之奇，無一語不歸實在，無一款不有來歷。讀者讀之，見處處皆是條段，自然深信不疑。第五卷論比例之理，圖之已屬勉強，然有數可核，第十卷論無比例幾何，其事非象數所能明，則覺毫無把握矣！（華蘅芳, 1896a, pp. 6-7）

事實上，他的理解之切入點，無非是「以數核之」，請再參考他與李善蘭（壬叔）的對話：

又憶讀《幾何原本》至六卷以下，以數核之顯覺不合。壬叔怫然曰：「此幾何也，烏可以數核之哉！」余當時大不以為然，今乃見壬叔之言良是！[23]

他真正在乎的，顯然是幾何與天元術乃至於代數的相互為用：

既明算理之人，于書中所有之各題，可不必觀其術曰如何，自能立術以馭其題，其所立之術或與本書之術吻合，或出於本書之外而能殊途同歸。惟但明幾何而未習天元之人，其所立之術必

枝枝節節而為之，不能有一以貫之之理，故其用心也苦，而用力也勞。（華蘅芳, 卷五, 1897a, p. 3）

這當然也解釋了他念茲在茲的第十卷之代數解讀。不過，他對於解析幾何之意義是否可以掌握，[24]恐怕就很難說了。

至於學習幾何的好處，則一方面著眼於方法論之訓練，於是「學者讀慣此書，其心思自能縝密」。另一方面，對他而言，幾何乃是學習天元術之憑藉，從而是學習代數、微積分不可或缺的基礎。換句話說，幾何學只是循序漸進學習的階梯而已，並沒有獨立學門的意義。這或許也解釋了何以在他的數學著作，或這兩本筆記中，他從未單獨論述幾何學。[25]

此外，這或許也可以歸因於翻譯西書與西書翻譯對他的影響。由本文第參節有關他的數學經驗（mathematical experience）來看，他所合作翻譯的西算書籍如《代數術》、《微積溯源》、《三角數理》及《代數難題解法》，完全與代數、微積分與三角學有關，無法凸顯幾何知識的獨立價值與意義。尤其，對比李善蘭之譯著，華蘅芳所譯書較少「闡發新理」，[26]因此，數學知識的結構性面向（structural aspects）之考量難免有所不足，從而，幾何學本身的問題意識，當然也就難以凸顯了。

其實，這一特色也反映在他的《臺積術解》上，其中他完全「以代數之式明之」（華蘅芳, 1896h, pp. 13-14）。至於他提供二十餘圖證明畢氏定理的《青朱出入圖說》（華蘅芳, 1896I, pp. 15-26），也缺乏實質的幾何論述。還有，他的《拋物線說》（1852/1892）雖然論及一些相關的幾何性質（華蘅芳, 1896b, pp. 15-32），然而，他的目的主要關乎火砲射擊，因此，也看不出其中蘊涵的幾何意義，請徵之於本書的後記。

右《拋物線說》一帙，憶余二十餘歲時，閱《代微積拾級》，粗知拋物線之梗概，而《重學》中《圓錐曲線說》尚未譯出也。李君秋紉以所著《火器真訣》見示，余覺未能滿意，因以積思所得者，筆之於書，徐雪村為余作圖，遂成此帙。置之秘篋，未以示人，迄今四十年矣。偶然檢及，批閱一過，未忍棄去，故錄而存之。（華蘅芳, 1896b, pp. 31-32）

陸、華蘅芳如何說明無窮小量？

《學算筆談》與《算齋瑣語》雖然是筆記體的論述，然而，目的無非是循序漸進，從數學（按即算術）、[27]盈不足術而天元、代數、最後微分、積分之重要性。其中，幾何的重要性往往與天元條段並論，正如本文第參節所述，無法凸顯其獨立學門之價值。

儘管如此，華蘅芳倒是利用了他所瞭解的《幾何原本》之知識，「從人所最易明之事實，指出微分為何物」！他首先指出：

夫幾何之所以能使人易信者，因其所論之事，分為點、線、面、體四部也。天元之所以能使人無疑者，因其未知之元與已知之數其條段有相當之理也。然天元中立之元，有為線者，有為面者，亦有為體者，是其元能兼線面體三者之用也，惟不能為點耳。（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 1）

相形之下，他認為：

微分則可以兼點、線、面、體四者之用，故以點、線、面、體釋之，而微分之式自明。（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 1）

接著，他就以相差甚微的兩線、兩面、兩體為例，說明何謂微分，其中，他特別指出「兩線之所差者雖甚微而不能以數計，究不能謂其兩線相等也。若將此兩線齊其彼端，而揣其此端，必有一點不齊也，所以，可云點者，線之微分也。」（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 1）比如說，「如天之微分為亻天，即溢出之一點也。」[28]針對點在此一關連中的特性，華蘅芳還進一步強調說：

面有長有廣而無厚，線有長而無廣，點則無長短廣狹厚薄。所以，線可以點乘之，以明其細，面可以點乘之，以明其薄。此幾何之理，亦即微分之理也。觀此說而仍不知微分為何物者，蓋未之有也。（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 1）

顯然，華蘅芳相信幾何之理是理解微分之理的關鍵。

不過，華蘅芳還認為「凡論微分者，不能不論其變數，又不能不論其變數原式中之天所成之函數。」換句話說，微分必須針對函數之變數而言。他分別引述《代微積拾級》與《微積溯源》之相關說法，先看前者：

《代微積拾級》云：任以微長之數辛加于自變數，求得函數之同數，以原式減之，又以辛約之，乃令辛為0，而求比例之限，所得即微係數。（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 1）

以現代符號翻譯，上述說法就相當於：[29]

若 $f(x+h)=f(x)+a_1h+h^2(a_2+a_3h+...)$ ，則 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a_1+h(a_2+a_3h+...)$ 。若含 h 之項令為0，則剩餘的項 a_1 即為微係數。此一運算近於今日極限式：

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{dy}{dx}$ ，其中 $y=f(x)$ 為一函數，h 為微長之數（即上文中的辛），$\frac{dy}{dx}$ 則是微係數（differential coefficient）。

茲再引《微積溯源》之定義如下：

《微積溯源》云：無論天之任何函數欲求微分者，則以天加辛代其原式中之天，而詳之依辛之整方數，自小而大序之，取其初有辛之項，而以彳天代其辛即得。（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 1）

以現代符號翻譯，上述說法相當於：

給定 $y=f(x)$ 。以 $x+h$ 代替 x ，將 $f(x+h)$ 展開，依 h 的乘冪由小至大排列，取第一次出現 h 之項，以 dx 代替 h 即可得到微係數。[30]

亦即：

若 $f(x+h)=f(x)+a_1h+h^2(a_2+a_3h+...)$ ，則 a_1 就是微係數。

嚴格說來，《微積溯源》之嚴密程度並未優於《代微積拾級》。儘管華蘅芳認為前者「何以必待以辛約之之後，方可令其右邊各項中之辛為0，而其左邊以辛為分母者，則不令其為0，而以彳天代之，此拾級之說所以令人費解也。」（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 1）不過，《微積溯源》「變其說為取其初有辛之項，則其以後之各項雖不必化之為0而已截去不用矣！然其所以乘此各項之故則未明言，又令人疑竇叢生。」（華蘅芳, 卷十, 1897a, pp. 1-2）

針對後者，華蘅芳提及當 h 為無窮小量時，h^2, h^3 等等當然都可以忽略不計，「然如是說法乃演算時簡略之法耳，以算理論之不當如此也。」因此，他認為「其所以化之為0者，必其中有真等於0之理也。其所以截去不用者，必其中有必須去之之故也。不將此事澈底究明，則微分之術終不能共明于天下。」（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 2）於是，他開始求助於《幾何原本》之界說：

幾何之例云：點者無分，言其無長短、廣狹、厚薄也。線有長無廣，面者止有長有廣而無厚，所以，依幾何之例，以點加點，其點不能增大；以點加線，其線不能增長；以線加面，其面不能增廣；以面加體，其體不能加鋸也。點與點相乘，則仍為點也。點與線相乘，則仍為線也。點與面相乘，則仍為面也。點與體相乘，則仍為體也。其點之不能續而成線，線之不能廣而為面，面之不能厚而為體，體之不能增而為多一乘之體者，因點無長短、廣狹、厚薄也。由是推之，則知點之平方與點無異也，點之立方亦與點無異也，點之任若干乘方仍與點無異，則凡以點之各方與線、面、體相乘者，其線、面、體之形，仍未嘗稍變也。學者既知此例，始可與言微分術之天與

辛。（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 2）

華蘅芳最後舉證說明：

夫辛者，點也。辛之各方，亦點也。天者，線也，天二者，面也，天三者，體也，天四以上，多乘之體也。所以，天之各方與天+辛所成之各方，其相較之式，皆可以此證之。（華蘅芳, 卷十, 1897a, p. 7）

一旦將「微長」辛（h）視為點時，則這微長的每個乘冪都可視之為點。如此一來，「天之各方與天+辛所成之各方，其相較之式」，譬如 $(x+h)^2-x^2=2xh+h^2$ 中之 h^2 亦可視為點，於是，當然可以忽略。至於 $2xh$ 一項，由於「點與線相乘，則仍為線也」，因此，$2xh$ 與 $2x$ 無異，於是，華蘅芳認為「皆可以此證之」。

柒、結　論

總之，對華蘅芳而言，幾何學只是一種工具，並不具有獨立學門的意義，這與他的數學經驗（學算、譯書與教算）息息相關！其實，華蘅芳的《學算筆談》與《算齋瑣語》著述之初衷，無非是引導讀者學習西方數學之最上乘工夫—微積分（Horng, 1993），於是，任何他認為是學習微積分之預備知識，似乎都只是工具或過渡而已。這可以解釋何以他特別凸顯如上文所述這些預備知識如數學（按即算術）、盈不足術、天元術、代數、微分和積分的「術」（算則或計算方法）之意義。當然，他的諄諄善誘與循序漸進之手法，[31]也反映了他融會貫通中西數學的數學素養。

另一方面，他利用幾何之理說明微分之理，從今日觀點來看，也無法成立，但卻頗能自圓其說！[32]華蘅芳針對第十卷的「以數核之」夢想，最後則為吳起潛所完成。然而，後者的《無比例線新解》的完成，恐怕也是向第十卷乃至於整部經典的告別之作。正如它在西方數學中的文本地位一樣，《幾何原本》除了還具有教學意義之外，已經轉變成為單純的歷史文獻了。今日數學家仍然繼續研讀它，不過，其目的完全不在於研究題材之發掘，而是由於它仍然充滿了數學經典的深刻洞識（Harthorne, 2000）。

不過，本文所提供的華蘅芳之學算插曲，如何關連到中國數學的現代化呢？我們不妨先將李善蘭（1811-1882）、華蘅芳（1833-1902）與周達（1878-1942）並列，來考察中國數學現代化的進程。

中國數學的現代化，無疑是1852年李善蘭進入墨海書館翻譯《代數學》、《代微積拾級》等書，而揭開了序幕。後來，他與華蘅芳進入曾國藩安慶大營，都與此有關（洪萬生, 1991）。大約二十年後，華蘅芳也進入江南製造局翻譯《代數術》與《微積溯源》等西算書籍，則是強化了現代化的力道。他們兩人還分別進入現代化學校教授數學，為中國數學制度化奠定基礎。此外，他們兩人的數學研究，除了李善蘭早期的數學著作全集如《則古昔齋算學》之外，則主要採用西算的問題意識與研究方法。

至於周達，則在揚州成立了「知新算社」（1900年），這是中國最早的民間數學團體，以學習外國先進數學為創社主要目的。周達曾代表該社，在1902年訪問日本，接觸現代數學家如上野清與長澤龜之助等人，回國後總結算學舊稿，宣示告別傳統中國數學（李迪, 2005），開始引進現代化的日本教科書如《新幾何學教科書：平面》（1909），[33]同年，他也在揚州了校刻《決疑數學》（李兆華, 2005, pp. 207-208），足見中國數學（教育）現代化之勢，在1903年頒佈癸卯學制的推波助瀾下，已經沛然莫之能禦了。

無論周達是否熟悉吳起潛的《無比例線

新解》，他所翻譯的《新幾何學教科書：平面》（1909），連同稍早由日本留學生仁和允所引進的《平面幾何學》（菊池大麓編纂, 1898），都完全以《幾何原本》前六卷內容為依歸，同時，也都在各書中提出「普通公理」（common notions）或「幾何公理」（postulates），不過，《幾何原本》第十卷的內容當然不可能納入了。這種情況在英國也不例外，因為前述菊池大麓的編著「是以英國幾何學教授法改良協會編纂之幾何學書為主」，此外，他也「參酌英、法、德諸幾何學書編成此冊」（魏庚人, 1987, pp. 65-69）。可見，《幾何原本》第十卷老早退出數學（教育）史的舞台了。

儘管如此，在這些最新引進的中學數學教科書中，幾何學的內容卻恢復了獨立的地位，不再只是華蘅芳所議論的工具或過渡而已。《幾何原本》在現代數學教育制度化過程中，所扮演的核心地位，由此可見一斑。華蘅芳的這一段學算插曲，顯然佐證了一個事實，那就是：數學知識的教育價值，密切地關連到數學教育的制度化。

註　釋

1.本文之撰寫，得到國科會的贊助（計畫編號：NSC 96-2511-S-003-021-），謹此致謝。本文初稿曾在「利瑪竇與徐光啟合譯《幾何原本》四百週年紀念研討會」（2007 年 11 月 10-11 日，台北：中央研究院數學研究所）報告。又，本文曾寄請徐義保（Xu Yibao）教授指教，獲益良多，也在此申謝。不過，文責當然都由筆者自負。

2.有關華蘅芳在中國數學現代化過程中所扮演的角色，可參考 Horng（1993）；或歐秀娟（1995）。至於在專業化與制度化兩方面都貢獻卓著的，則是李善蘭。後者請參考洪萬生（1991）；或 Horng（1991）。

3.在 Horng（1993）一文中，筆者也曾觸及此一主題，不過，未及深入。

4.馬若安（Jean-Claude Martzloff）惠贈之拉丁文複印本，為 1591 年出版。

5.David Joyce 的網頁版 http://www.math.clarku.edu/~djoyce 是據 Heath 版編輯而成，值得參考。

6.利瑪竇針對本書之結構，有如下之說明：「題論之首，先標界說，次設公論，題論所據。次乃具題，題有本解，有作法，有推論。先之所徵，必後之所恃。十三卷中五百餘題，一脈貫通，卷與卷、題與題、相結倚，一先不可後，一後不可先，纍纍交承，至終不絕也。初言實理，至易至明，漸次積累，終竟乃發奧微之義。若暫觀後來一二題旨，即其所言，人所難測，亦所難信，及以前題為據，層層印證，重重開發，則義如列眉，往往釋然而失笑矣！」據此，他還進一步對比中算之得失：「竇自入中國，竊見為幾何之學者，其人與書自不乏，獨未睹有《原本》之論，既闕根基，遂難創造。即有斐然述作者，亦不能推明所以然之故。其是者，己亦無從別白，有謬者人亦無從辨正。當此之時，遽有志翻譯此書，質之當世賢人君子，用酬其嘉信旅人之意也。」引自利瑪竇，〈幾何原本原序〉，歐幾里得（1865/1993），p. 1153。

7.“produced indefinitely”的對應拉丁文為“infinitum producantur”，後者參見 1591 年拉丁文版第一冊定義 XXXIV。

8.“produced indefinitely”的對應拉丁文為“infinitum producetae”，後者參見 1591 年拉丁文版第一冊公論 (communes notions)XIII。

9.其實，目前很多數學普及書籍論及此一設準時，也難以避免此一謬誤。不過，徐義保教授（Xu Yibao）也提醒我：在主要的英文字典中，這兩個副詞交換使用十分寬鬆；同時，無論從丁先生的拉丁文版、或者徐、利中譯版，我們都很難從上下文推測他們是否在乎此一分辨。

10.第十論稱：「直角俱相等」。至於丁先生何以作此更動，我們還無從得知。不過，由於 Heath 版中的五個設準中，前三個（亦即幾何原本前六卷的前三求）都涉及圖形（如線段、直線與圓）之存在假設，至於後兩個則是敘述圖形所具備之性質。參考Bunt, Lucas N. H., Phillip S. Jones, Jack D. Bedient（1998）, pp. 146-147. 或許正因為如此，所以，丁先生才將後兩者移到公論之中。

11.根據安國風（Peter M. Engelfriet）的研究，丁先生補上此一求作，其目的在於排除物質的原子論性質。參考 Engelfriet（1998）, pp. 122-123。

12.根據黃俊瑋的調查，第四求始終未被引用。

13.徐光啟對於勾股術的興趣，可能源自明中葉算家如顧應祥乃至於其後之算家。有關顧應祥之研究，請參考王連發（2002）。另外，有關明中葉之後中算家有關的勾股術之研究，可參考黃清揚（2002）。

14.參考蘇俊鴻客座主編，《HPM 通訊》第九卷第四期，2006 年 4 月。參考 http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm。

15.參考華蘅芳，〈行素軒時文自序〉（1881）。感謝李迪教授（內蒙古師範大學）慨贈此一文獻複印本。

16.有關這兩本筆記的簡單比較，請參考歐秀娟（1995）。

17.按康熙主編的《數理精蘊》中，收入了〈幾何原本〉（納入卷二到卷四）一節，其內容之底本為法國耶穌會士巴蒂（Pardies）所編著之 *Elemenus de geometrie*。參考韓琦（1993）。又，在卷二〈幾何原本一〉中，也提及平行線之定義與性質，如第十九條：「凡二線之間，寬狹相離之分俱等，則此二線謂之平行線也。」第二十條：「平行二線雖引至於無窮，其端必不能相合。蓋兩線相離之度，各處遠近俱為相等故也。」引郭書春主編（1993），p. 26。

18.參考李儼（1955）；或杜石然主編（1998），pp. 350-365。有關李善蘭在墨海書館之活動，請參考洪萬生（1995）。

19.有關這些中譯的（可能）英文原版，可參考 Horng（1993）。

20.有關《代數術》與李善蘭、偉烈亞力合譯《代數學》之對比，可參考洪萬生（1999）。

21.此說不然！按劉徽注《九章算術》時，他的「解體用圖｜並不僅僅出現在卷九「勾股章」而已。在卷一「方田章」、卷五「商功章」也有附圖，只是，現傳本都失傳了。

22.華蘅芳著有《臺積術解》一書，參考華蘅芳（1896h）。這是有關《九章算術》「商功章」的長方台體積公式之驗證，華蘅芳利用了代數方法。

23.引華蘅芳（1896a），p. 19。又，針對此一見解，吳起潛曾評論說：「無比例十三線，雖隸於幾何，實通於代數。在幾何為有等，在代數為有公約。在幾何為無等，在代數為無公約。在幾何為有比例，

在代數為可通度。在幾何為無比例，在代數為不可通度。幾何之僅正方有等，即代數二次不盡根也。幾何之同宗線，即代數共軛數也。昔李壬叔論此線曰：幾何也，烏可以代數通之。斯蓋遇其識力所難明，故至固於名而失其實。學者不可因此而自畫進境也。」引吳起潛（1906），卷首，p. 1。（按：本書承劉鈍教授致贈複本，謹此申謝）。

24.在羅密士譔，李善蘭、偉列亞力合譯之《代微積拾級》（1859）十八卷中，解析幾何稱之為代數幾何，共有九卷。卷一主題為「以代數推幾何」：「凡幾何題理，以代數號顯之，簡而易明。代數號幾何匪淺，故近時西國論幾何諸書恆用之。幾何題中用代數之位，覺甚便，準之作圖，能顯題之全，所設所求諸數，俱包其內。法用代數已知未知諸元，代題已知未知諸數，視圖中諸段有連屬之理者，依幾何諸題推之。本題有若干未知數，須推得若干代數式。既有若干式，以代數術馭之，即得諸數。」針對前引倒數第二句，李善蘭也提出案語：「此即四元法，立天、地二元，則必用二式，立天、地、人三元，則必用三式也。」引李善蘭、偉烈亞力（1859）卷一，pp. 1-2。

25.華蘅芳曾指出：「若于古書中摘取數十題，每題以數學、幾何、天元、代數各演一草，則此書最有益初學者。」引華蘅芳（1897a），卷十二，p. 2。儘管如此，他的主要目的，還是方法之精進。

26.華世芳（華蘅芳之弟）曾提及辜鴻銘曾向他說明：「西國算書約分三家：一為專門家著書創術，闡發新理；二為輯錄彙集成編，足資考證；三為教授家階級層升，便於講解。今中國設立學堂，宜多譯教授之書，則事半而功倍。」於是，他「聞其說而諱之，嘗以所聞，證諸所見。西書如棣麼甘之《數學理》、《代數學》，專家之書也。華里斯之《代數術》、《微積溯源》；海麻士之《三角數理》，接皆輯錄家之書也。其中非無奇妙之理、精深之詣，而欲令學者憑此以通諸術，則苦其難而中輟者多矣。惟狄考、潘慎文、赫士、求德生輩所譯各書，綱舉目張，有條不紊，列法問以為之程式，設習題以練其工夫，洵為教授之善本矣。」引華世芳，〈代數發蒙序〉，收入華蘅芳〈傳包〉，台北：故宮博物院圖書館。

27.偉烈亞力曾撰有中文著作《數學啟蒙》（1853）一書，介紹西方算術。該書之英文題銜為“A Compendium of Arithmetic”，晚清算家多半稱算術為數學（數目之學）。事實上，這也是李善蘭與偉烈亞力將 algebra 譯為代數的原因之一，蓋以符號代替數目故也。

28.引華蘅芳（1897a），卷十，p. 1。其中亻天即 dx。至於亻字則取自微之偏旁。

29.注意：李善蘭與偉列亞力所據以翻譯之微積分課本，亦即羅密士（E. Loomis）所著的 *Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus*（1850）所使用之符號與今日微積分課本相當接近。故此處所說之現代符號，乃是相對於此一中譯本而言。上引說明當然並未完全契合此一導數定義，而比較像是費瑪（Pierre Fermat）的進路。

30.此一說法應該來自 Lagrange，參考 Grattan-Guinness（1987）。只是，我們不知《微積溯源》之相關來源為何？

31.譬如他認為學習中國天元術乃至於西方代數學之前，必須先熟習中國《九章算術》中的〈盈不足術〉。又，此一觀點與荷蘭 HPM 學者 Barbara van Amerom

之看法不謀而合。請參考 Van Amerom（2002）。

32. 其實，華蘅芳的說法也頗有認知之趣味，他的論證頗符合人類學家所指出的「思想自主性」(autonomy of thought)。一般史家的「同情的瞭解」或心理學家的「同理心」之進路都與此相近，但是，認知的意義卻顯得不足。

33. 本書作者正是長澤龜之助，日文版撰於 1906 年。根據魏庚人等人研究，「本書內容，簡明清晰，便於初學，令人愛不釋手，是一本好的教科書。」參考魏庚人主編（1987），pp. 67-69。

參考文獻

1. 王鼎勳（2007）：**從《幾何原本》第十卷到《無比例線新解》**。台北市：國立台灣師範大學數學系教學碩士論文（未出版）。
2. 李兆華主編（2005）：**中國近現代數學教育史稿**。濟南：山東教育出版社。
3. 李迪(1991)：我國現代數學的先驅者周達。李迪：**中國科學技術史論文集**（pp. 255-275）。呼和浩特：內蒙古教育出版社。
4. 李善蘭（1867）：天算或問。收入李善蘭：**《則古昔齋算學》十三**。南京：金陵書局。
5. 李儼（1955）：華蘅芳年譜。收入李儼：**中算史論叢**，第四集（pp. 362-367）。北京：科學出版社。又收入杜石然主編（1998）：**李儼錢寶琮科學史全集**，第八冊（pp. 350-365）。瀋陽：遼寧教育出版社。
6. 吳起潛（1906）：**無比例線新解**。上海：文明書局發行。
7. 洪萬生（1991）：同文館算學教習李善蘭。載於楊翠華、黃一農主編：**近代中國科技史論集**（pp. 215-259）。南港：中研院近史所/新竹：清華大學歷史所。
8. 洪萬生（1995）：墨海書館時期的李善蘭。載於中國科技史論文集編輯小組編：**中國科技史論文集**（pp. 223-236）。台北：聯經出版公司。
9. 洪萬生（1999）：《代數學》：中國近代第一本西方代數學譯本。收入洪萬生：**孔子與數學**（pp. 205-239）。台北：明文書局。
10. 徐光啟（1983）：勾股義。載於蘇步青編：**徐光啟著譯集（八）**（pp. 1-11）。上海：古籍出版社。
11. 郭書春主編(1993)：**中國科學技術典籍通匯・數學篇**，第三冊。石家莊：河南教育出版社。
12. 郭慶章（2005）：**羅士琳及其算學研究**。台北市：國立台灣師範大學數學系教學碩士論文（未出版）。
13. 華蘅芳（1896a）：算齋瑣語。華蘅芳：**算草叢存**，卷八（pp. 1-25）。上海：文海書局石印版。（按：本書由黃一農教授惠贈，謹此申謝）。
14. 華蘅芳（1896b）：三角測量說。華蘅芳：**算草叢存**，卷一（pp. 1-14）。上海：文海書局石印版。
15. 華蘅芳（1896c）：臺積術解。華蘅芳：**算草叢存**，卷四（p. 14）。上海：文海書局石印版。
16. 華蘅芳（1896d）：青朱出入圖說。華蘅芳：**算草叢存**，卷四（pp. 15-26）。上海：文海書局石印版。
17. 華蘅芳（1897a）：學算筆談。收入華蘅芳：**華氏中西算學全書**，卷十二（全卷）。上海：慎記書莊石印本。
18. 華蘅芳（1897b）：算法須知。收入華蘅芳：**華氏中西算學全書**，卷一。上海：慎記書莊石印本。
19. 華蘅芳、傅蘭雅合譯（1896/1897/1909）：**決疑數學**。上海：格致書院。
20. 歐秀娟（1995）：**《清史稿》最後一位疇人**

－華蘅芳。新竹：清華大學歷史研究所科技史組碩士論文（未出版）。
21. 歐幾里得（1865/1993）：《幾何原本》十五卷。收入郭書春主編：**中國科學技術典籍通匯・數學篇**，第五冊（pp. 1145-1500）。石家莊：河南教育出版社頁。
22. 韓琦（1993）：〈數理精蘊提要〉。郭書春主編：**中國科學技術典籍通匯・數學篇**，第三冊（pp. 1-10）。石家莊：河南教育出版社。
23. 魏庚人（1987）：**中國中學數學教育史**。北京：人民教育出版社。
24. 羅密士（E. Loomis）譔，偉烈亞力口譯、李善蘭筆述（1859）：**代微積拾級**。上海：墨海書館。
25. Bunt, L. N. H., Jones, P. S., & Bedient, J. D. (1988). *The historical roots of elementary mathematics*. New York: Dover Publications, INC.
26. Clavius, C. (1591). *Euclidis elementorum libri XV*. Coloniae.
27. Engelfriet, P. (1998). Euclid in China: The genesis of the first Chinese translation of Euclid's elements books I-VI (Jihe yuanben; Beijing, 1607) and its reception up to 1723. Leiden/ Boston/Koln: Brill.
28. Engelfriet, P. & Keung, S. M. (2001). Xu Guangqi's attempts to integrate western and Chinese mathematics. In C. Jami, P. Engelfriet, & G. Blue (eds.), *Statecraft and intellectual renewal in late Ming China: The cross-cultural synthesis of Xu Guangqi* (1562-1633) (pp. 279-310). Leiden/Boston/Koln: Brill.
29. Grattan-Guinness, I. (1987). What was and what should be the calculus? In I. Grattan-Guinness (ed.), *History in mathematics education* (pp. 116-135). Paris: Belin.
30. Harthorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond*. New York: Springer-Verlag.
31. Heath, T. L. (1956). *Euclid: The thirteen books of the elements*. New York: Dover Publications, INC.
32. Horng, W-S. (1991). *Li Shanlan: The impact of western mathematics in China during the late 19th century*. Unpublished doctoral dissertation, City University of New York.
33. Horng, W-S. (1993). Hua Hengfang (1833-1902) and his notebook on learning mathema-tics: Xue Suan Bi Tan. *Philosophy and the His-tory of Science: A Taiwanese Journal*, *2*(2), 27-76.
34. Jami, C., Engelfriet, P., & Blue, G. (eds.) (2001). Statecraft and intellectual renewal in late Ming China: The cross-cultural synthesis of Xu Guangqi (1562-1633). Leiden/Boston/Koln: Brill.
35. Martzloff, J.-C. (1997). *A history of Chinese mathematics*. Berlin/New York etc.: Springer-Verlag.
36. van Amerom, B.A. (2002). Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Unpublished doctoral dissertation. Utrecht: Frendenthal Institute.

Hua Hengfang and Euclid's Elements

Wann-Sheng Horng

Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Abstract

Hua Hengfang (1833-1902) was a notable mathematician in late Qing China. He had made contributions to some subjects basically in terms of traditional Chinese mathematics. By following Li Shanlan's (1811-1882) step, he also translated, in collaboration with English missionaries such as John Fryer, several mathematics and science treatises. These translations which were mainly textbooks used in college in contemporary Great Britain and United States might very well reflect his mathematical expertise. Nevertheless, his mathematics notebooks, *Xue Suan Bi Tan* and *Suan Zhai Suo Yu*, should have also evidenced his own reflections on how the *Ji He Yuan Ben* was read. In this article, I will elaborate on the two texts to explain how Hua Hengfang perceived the picture of the Western geometry as manifested in the mathematical classic, Euclid's *Elements*. Meanwhile, I will also attempt to link this episode with the institutionalization of modern Chinese mathematics education.

Key Words: Hua Hengfang, Ji He Yuan Ben, Li Shanlan, Xue Suan Bi Tan, Suan Zhai Suo Yu