科學教育學刊
2009, 第十七卷第二期, 157-177

Chinese Journal of Science Education
2009, 17(2), 157-177

# 重讀幾何思維的階層論：載體理論的啟示

吳毓瑩[1]　呂金燮[2]　吳昭容[3]
[1]國立台北教育大學　心理與諮商學系
[2]國立台北教育大學　特殊教育學系
[3]國立台灣師範大學　教育心理與輔導學系

（投稿日期：民國 97 年 7 月 21 日，修訂日期：98 年 5 月 7 日，接受日期：98 年 5 月 11 日）

**摘要**：本文以獲取知識的「媒介」，亦即載體，為理論核心，重新解讀幾何思維的階層論。我們首先提問幾何思維的發展除了階層論外，是否另有可能？由此提問再思概念發展的不同歷程，闡釋載體理論所彰顯的特性，包括社會文化動態結構、仲介思考的符號工具、以及知識與載體無法分離的性質。從載體之觀點，研究者綜合出幾種可能性：1.幾何思維的層次亦可能是性質相異之載體的不同運作；2.個體對性質相異載體的掌握可以同時並進；3.載體所導引的內隱規則會促成不同學習策略；4.幾何教學可因不同載體的利用而各有安排。最後研究者結語對於部份無法歸納在階層順序下的學習者，如果從載體理論的觀點，或可接受幾何思維具有多元與非線性的特質。

**關鍵詞**：情境認知、幾何思維、階層論、概念發展、載體理論

## 壹、前　言

幾何之學習如何促發？提出幾何學習階層論的 van Hiele 曾描述他自己1938到1951於中學教數學時，幾何學習便從公理（axioms）開始，當時的他深刻體會到孩子面對幾何的困難與無助（van Hiele, 1986, p. 2）。然而，如果不從公理開始，又要從何處著手？van Hiele 於博士進修期間，間接從 Koning（1948）有關化學的博士論文中讀到 Piaget（1927）的層次論，得到不小的鼓勵，開始漸漸形成幾何的思考階層論。van Hiele 及 van Hiele-Geldof 夫婦兩人，於1957及1958（van Hiele, 1957, 1959, 1984a, 1984b; van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958）提出幾何思維層次以及教學活動之原則。自此，過去以公理為準則的幾何教學，有了突破性的發展。一直到今日，幾何思維的五階層（視覺、分析、非形式演繹、演繹、嚴密系統），也仍是目前幾何學習、教材安排、及教法的經典理論。然自1980年代以迄二十一世紀，學習環境經過

數位時代之產業革命，已產生極大變化，提供了學習者更多元更豐富的學習場景。我們一則欣賞幾何思維的階層論，另一則也感覺到幾何的學習歷程，除了階層論外，蘊含了多種可能，值得再讀與再思。

本文之論述架構如下：首先在第貳部份「幾何思維除了階層論外是否另有可能」一節中，藉著 van Hiele 自己曾提出之說法以及研究案例，引出關於幾何思維階層論的問題。由此，我們於第參部份「概念發展的再思」論述概念學習的不同觀點，有別於古典的具象抽象發展論、階層論、以及普遍化的形式，我們提出其他可能性，包括具象抽象順序的彈性、訊息的再述、情境依賴、以及多元連結。在不同觀點的激盪中，我們於第肆部份「載體對概念發展的影響」中點出載體理論的立場，討論載體對概念發展的影響。後於第伍部份「載體理論取向的幾何思維」中結合第參部份與第肆部份，並引用過去研究成果導出我們對於幾何思維的再看，關鍵之處在將幾何學習視為一個需要符號工具來仲介的學習歷程，作為符號工具的載體將會影響學習成果，例如數位動態載體促成的學習成果將不同於符號公式之載體促成的學習成果。總此，對於目前在階層論中某些不合階層順序的現象，我們認為從載體理論來切入，為一可行的探究路徑。

## 貳、幾何思維除了階層論外是否另有可能

幾何思維的路徑與學習近年產生了許多微型理論，包括幾何的推理（Duval, 1998; Hershkowitz, 1998），空間能力與幾何學習（左台益、梁勇能，2001；Clements & Battista, 1992），幾何思維的心像運作（Duval, 1995）。然而，即使幾何學習之探究已有多種角度，大部分研究者所解讀出來的幾何思維，至今仍以五階層的階段論為依歸（van Hiele, 1957, 1959, 1984a, 1984b; van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958），研究結果環繞在 van Hiele 幾何思維階層的驗證與解釋上（左台益，2002；何森豪，2001；吳德邦、謝翠玲，1998；陳于倩、姚如芬，2002；張英傑，2001；盧銘法，1999； Mark, 1990; Mason, 1997; Mistretta & Wagner, 2000; Sharp, 2001; Teppo, 1991; van Hiele, 1999）。此模式歷經五十年的時代淘洗，依舊保有其描述學習歷程與提供教學方式的優勢。van Hiele 且進一步認為此思考層次也可以成為其他學習主題的取向，他於《結構與洞見：數學教育的理論》“Structure and insight: A theory of mathematics education”書中之前言明示（van Hiele, 1986）：

> 當年我在發展階層思考時，確實將之定位在幾何的教學與學習，然而，它可以不需如此受限。其他主題的教學與學習亦同時可以從這思考層次取向中獲致改進。（p. vii）

此思考層次的概化範圍之企圖相當大，並不受限於幾何思維，可概化到其他學習領域。就一般學習領域而言，共同原則的核心五階層為（van Hiele, 1986, p. 53）：

第一層次：視覺層次（the visual level）

第二層次：描述層次（the descriptive level）

第三層次：理論層次（the theoretical level）

第四層次：形式邏輯，邏輯律則（formal logic, a study of laws of logic）

第五層次：邏輯律則的本質（the nature of logical laws）

此五層次有階層關係，高階之達成必須

依賴低階之完成。從上述跨學習領域之共同階層結構中，關於幾何思維的特定階層乃為：

第一層次：視覺（visualization）

第二層次：分析（analysis）

第三層次：非形式演繹/抽象（informal deduction/abstract）

第四層次：演繹（deduction）

第五層次：嚴密系統（rigor）

van Hiele 曾說（1986, p. 5）他的想法來自兩個理論的啟發：1.Piaget 認為（1968）高層思維乃是結構的原型（primary），兒童在思考事物時，便具有此原型，但他自己無法察覺，往往隨著成熟與發展才能漸漸感受到。2.完形觀點認為洞見產生於人們對於自己所知所覺的整理，亦即知覺的結構化過程（structuralizing perception）（1986, p. 6）。對 van Hiele 有所啟發的這兩點，亦同時啟示我們，如果高層思維之原型已經存在，則是否某些學習歷程可以直指高層思維，無需從低層之體驗開始？另外，如果洞見來自於知覺的結構化，則結構化是否也有可能透過知覺（如視覺）本身來處理，不必然晉升到描述分析層次，是以不同的思維之間不必然有階層關係？從 van Hiele 受到結構原型以及完形的啟示，到我們所提的兩個問題之間，其中的關聯性，便是本文將於第參、肆、伍部份詳加論述之內涵。

關於幾何思維的階層關係，van Hiele 確實這麼說（1986）：

> 在幾何中，第一層次與視覺有關，而第二層次與基模思維（schematic thinking）有關，第二層次的思考來自第一層次的成熟。這是一個學習歷程的轉換（transformed）。（p. 68）

我們將焦點放在「轉換」一詞上，而非第一層次與第二層次的順序上。首先我們會看到轉換指的是一種蛻變的結果，也就是說轉變後的型態中其實看不到轉變前的形貌，例如蛹蛻變為蝴蝶。其次，轉換以後理解事物的知識結構已經改變，這亦是完形的想法。另外，van Hiele 亦曾提及：「概念之清晰乃得自於案例，而非定義。」（1986, p. 50），意指豐富案例的重要。結合此二看法，我們或可試問，當視覺圖像本身之案例豐富多元時，是否案例的靈活與變動可以促成學習者在幾何上的深度理解，因知覺的結構轉化而產生洞見，無需進階為文字描述層次？

目前的教學環境一般而言以階層論之觀點為教材安排的依據，然左台益與梁勇能（2001）以及 Gutierrez, Jaime, 與 Fortuny（1991）都發現大約15% 到20% 左右的受試者無法確定歸類於哪一個幾何思維層次。如再進一步想，在當今學習媒介這麼豐富的情境下，學習的內容、方法、與途徑相對於二十年前甚或五十年前，已大有不同。例如幾何學習可從動態幾何軟體（Jackiw, 2006）入手，亦可從 LOGO 程式語言入手（Papert, 1999）。前者為數位圖像媒介，後者為程式語言分析，皆不同於黑板與紙筆媒介。學習取徑不同，學習順序是否可能不再是由視覺到文字描述的先後關係？循此，我們重思幾何思維除了主流的階層論之外，是否有其他的可能性？

## 參、概念發展的再思

階層論的發展順序自皮亞傑以及結構論已降，確實解決了如何促進學習的問題，然就本文於上節所提，當今時代，除了人類已使用千年的紙本形式載體外，數位載體已存在於我們的環境中，我們認為學習的可能途徑，將因此而更開闊。近年來關於概念發展

或改變，已不限於階層論或結構性的說法，其中重要的觀點如下：

## 一、具體與抽象之順序具有彈性

概念的發展乃從具體到抽象，是一般研究者對於兒童認知的發展最為普遍的假設，包括 Piaget, Vygotsky, Bruner 以及 Werner 都認為知識的獲得與學習要先從具體的感覺範例開始（Rosser, 1994; Siegler, 1998），也就是說知識或學習來自具體感覺的儲存，當兒童掌握了具體的物理性質後，方能逐漸抽離出高層次原則和型態，形成抽象概念。

關於以上的假定，Keil（1998）在〈認知科學與思考和知識的起源〉一文中有不一樣的看法。他認為兒童的認知發展並非從具體到抽象，其中重要論點如下：首先，研究界會產生兒童概念發展「由具體到抽象」的說法，也許是因為對兒童而言物理現象比較容易在語言中明確的說明，討論物理的性質比非物理的性質來得具體而容易，例如描述狗與羊，比描述「生物」是什麼來得容易。而當兒童比較能夠述說物理性質（例如狗）但不容易描述非物理性質時（例如生物），研究者容易產生「具有物理性質的概念在認知上較為簡單且提早形成發展」的印象，事實上此多肇因於研究者以語言作為概念理解的測量方式。在某些關係複雜的現象中，兒童立即可得卻難以言喻時，兒童亦能對於抽象的關係產生概念，無須藉由具體物理性質的觸發，例如兒童對於親屬（如舅舅、表姊妹）的理解，來自他們與家人的關係，而非來自「這個人叫做舅舅」的物理稱呼。Simons 與 Keil（1995）關於兒童之生物概念發展的研究結果指出，當提供物件的內部構造圖，要求4歲和8歲的兒童分辨哪些是生物（如羊）與哪些是非生物（如機器）時，兒童都能夠把自然的物件與生物配對（例如腸子與羊），而人工或非生物的物件與非生物配對（如石頭與機器），可見兒童有一套抽象的概念引導他們在生物與非生物之間找出差異，此抽象概念利用了事物間的關聯性而非事物的具體物理性質。Simon 與 Keil（1995）認為在生物性思維相關領域中，相對於具體到抽象的發展順序，從抽象到具體的發展順序更能清楚掌握兒童的思維。由此論點，我們引申出先具象後抽象或是先抽象後具象的發展順序具有彈性，抽象概念不容易言說表達，並不代表概念本身較晚發展。

## 二、學習是運用不同符號工具對訊息的再述

階層論的基本主張是「學習是由目前所處的認知階層所決定」，早期驗證此一主張的研究集中在 Piaget 的具體運思期與各類保留概念習得的關聯性。此類研究的基本架構有四步驟：首先，使用前測以測得目前的認知階層（X）；其次以前測將受試者分成不同階段（具體運思期與前運思期）；第三是訓練特定的保留概念；最後，以後測了解學習成效（Y）。假若 X 與 Y 具顯著相關，即代表 X 分數相對低者（階層較低）在 Y 分數上亦較低（訓練之後仍在低階），而 X 分數高者（階層較高），在 Y 分數上則得到較高分數（訓練之後仍在高階），表示訓練對於高分者（具體運思期）有效，但對於低分者（前運思期）無效，以此結果說明學習是否有成效端賴兒童當時所處的認知階層而定。實徵上，採用此方法的研究結果，如 Beilin（1965）, Inhelder, Sinclair 與 Bovet（1974），或是 Strauss 與 Langer（1970）（引自 Brainerd, 1977）的確支持 Piaget 的主張，但 Brainerd（1977）以及其他後皮亞傑學者質疑上述研究方法有問題。這些研究對於認知階層的檢驗以及學習成效的測量採用完全相同的工

具，使得被解釋的依變項（學習成效）與解釋的自變項（認知階層）來自同一個操作型定義，落入循環論證的謬誤。亦即認知階層檢驗所得的分數與學習成效分數，二者之高相關，有一大部分來自工具本身的效標關聯效度證據，僅能作為工具有效的證明，無法論及認知階層的影響。Brainerd 將資料重作分析，以 Y 減去 X 之差異代表學習成效，重新求學習成效（Y-X）與 X（認知階層）的相關，結果大部分數據都不支持兩者有關，亦即誠然測量工具為有效（X 與 Y 有關聯）的情況下，亦無法推論認知階層的高低可以預測學習成效，因為 Y 減去 X 的差，與 X 之間沒有關聯。

卡密羅史密斯（Karmiloff-Smith, 1995/ 謬小春譯，2001）在《超越模組性》"beyond modularity" 一書中，從認知科學的發展觀點，提出皮亞傑的邏輯數學結構之階段性發展已不能完全解釋當代的學習狀況。此學說強調人類特有的獲取知識方式乃是透過「再述」，以不同的符號工具重新表達，將內隱訊息逐漸表現為外顯知識。例如對於幾何的瞭解可以利用圖像，亦可以利用語言，相互作為彼此不同符號工具的再述。交換不同符號工具之再述，將以時期性的變化，重複發生於學習過程中，一方面將內隱訊息外顯化為可運用的知識，同時達成溝通之目的，並促成學習者的內在理解。例如我們常說詩佛王維「詩中有畫、畫中有詩」，詩與畫便是不同載體，可被行動者交互使用，並相互促進理解，並沒有那一個層次較高階或較低階的問題，因而也不具有從具象到抽象的階層特徵。

## 三、概念受情境影響且動態變化

Smith 與 Jones（1993）認為認知是一種歷程，不是靜態的概念結構，亦不是基模形式與內容的調整與改變，而是一種對情境的敏銳反應所形成的推理歷程。這種對情境的敏銳推理，是動態變化的歷程，且情境特定。許多關於推理研究的立論都以領域一般性的角度探討形式推理邏輯，至於調適性的推理、以及生態或演化的觀點則鮮少被提及。Gigerenzer 與 Hug（1992）從社會契約理論（social contract theory）的角度重探推理能力的發展，指出推理並非是一般性的能力。社會契約由演化觀點提出影響推理的關鍵不是語意（例如規則的意義），而是其實用性（pragmatic），此觀點重視個體與情境線索的連結。

早期的古典概念理論或原型理論都主張概念是由概念內成員的共同屬性（attributes）與結合這些屬性的結構所組成的（Rosch, 1978），例如「單身漢」的概念符合未婚、成年、男性的條件、或是所有被稱為單身漢成員的典型範例，因此概念的抽象化與結構式的原則，可以將學習類推或遷移至不同情境。以這種觀點來看概念，概念是靜態的、與知覺相似性密切相關，然而此種看待概念的方式與知覺相似的可變性（Smith & Heise, 1992）產生矛盾，兩事物相不相似會因其所在的環境脈絡而異，那麼概念就不可能穩定不變。Barsalou（1989）對概念的不穩定性之研究顯示，某些分類的知識只有在特定的情境中才會被活化，例如當「青蛙」此詞單獨出現時，「被人吃」的概念不會出現，但是如果在「法國餐廳」的情境中，則「被人吃的」概念就會與「青蛙」此詞產生連結而被活化。這個結果顯示概念是特定情境下的當下運作，而非僅是靜態的結構而已。Jones 與 Smith（1993）研究知覺在兒童概念發展上的重要性，發現兒童對語意類別的形成，乃來自知覺、語言和其他知識在情境中多元互動的結果，因此，當下的資訊，以及個體

的情境知覺相當重要，情境的接觸影響個體的信念、意圖、感受和理解。

如上所述，概念乃情境特定，而非靜態組合。此取向促使我們體認到幾何的學習是行動者持續對情境產生反應，其中沒有固定的表達形式或通則。教學者佈置學習情境，引發學習者對情境的時空之敏覺，而形成概念並連結概念。然概念本身以及概念間的連結是動態的，隨著情境內所接觸的事物之不同，而有新的創造式調適。換言之，在紙本載體的情境下，學習者產生的概念內容與概念連結，有可能不同於其他載體（例如數位載體）所引發出來的狀況。在載體形式日漸多元的今日，我們有必要重新思考原先紙本載體下對於幾何思維階層論的描述。

## 四、概念的改變可能多元與直覺

現今訊息和知識的增長超越了人類歷史上的任何一個時期，Simons（1996）闡述理解（knowing）的意義已從記憶和複述訊息，轉向為發現和使用訊息。概念的發展或概念的改變在載體豐富的情況下，轉成多元形式，甚而有時無法事先預測。Keil（1998）提出概念改變的五種方式：1.向度特質的改變和價值的改變；2.不同特質和關係間的轉換應用；3.對特質運作表現的改變；4.理論/概念相互滲透而創造新的概念體系；5.關聯性轉變造成幻覺式的（illusory）概念改變。前四種概念的改變主要在向度與特質，而第五種概念之改變，涉及關聯性的轉變，則是對於直覺以及感受的讚許。

根據 Keil（1998），關聯性的轉變是五種概念改變方式中最難觀察與發現的，但是經由不同領域研究的累積顯示，這又是概念改變的基礎。兒童在成長發展的歷程中存有許多不同的理論，這些理論存在於兒童心中，彼此間具有特別的關聯性。兒童有時候會因為他們體認某一詮釋系統與新現象之間有關聯，而有了不同於以往的想法。例如把解釋哺乳動物的生物機制擴展到對昆蟲的解釋，或者把詮釋人類的心理機制擴展到電腦的運作。因關聯性而形成的概念改變往往很突然，擴展到新現象也相當快速（Keil, 2006）。對兒童而言，這類關聯性的轉變比從舊理論中誕生新的理論，還來得更能運用，但正因其在概念改變或新理論產生時不容易被發現，因而對研究者/觀察者而言有一種不可掌握的如同直覺一般的幻覺型態。van Hiele 曾提及（1986）：

> 如果我直接看到了一個問題的解決方式，但卻說不出結構是如何安排的，那麼這就有可能是直覺了。……人們對於直覺的排斥，毋寧是一種嫉妒。……當幾何由直覺來開展時，便同時表示我們禮讚觀察，觀察值得這樣的稱許。我們對直覺的排斥絕對是錯誤的。（p. 76）

此想法與上述關聯性的轉變之直覺歷程與看起來如同幻覺的概念形成，有相互映照之趣。

綜合上述，以往概念發展指的是個人經由學習逐漸建立態度、原則、基模、領域知識等。概念發展的研究重點在個人對知識的表徵以及思考層次，進而討論學習者的內在心智結構。Lave（1988）從人類文化學的角度批判此看法，認為這是去除了文化的個人心智歷程，無法窺探學習的實際面貌。Nespor（1994）曾言，「這些觀點把時間和空間都壓縮了」（p. 7）。此類研究脫離了實務社群的歷史脈絡，如果我們將學習任務放在學習的時空背景下，則學習者不再只是「心智的物體」，而是社會與認知的整合，學習者積極地與社會情境互動，學習不是在解決外加的工作或

問題，而是積極建構並完成實際任務與難題。換言之，「知」的歷程是在時空情境活動下的結果。概念發展乃情境相依並形成網絡交錯的關聯，「知識改變的歷程無可避免是在地的（local），且無法和所運用的工具及其包裝的形式分離」（Geertz, 1983, p. 4）。情境脈絡成為思維的一部分，無法從學習結果中分離出來，當然概念的應用與遷移，也依賴情境脈絡的存在，方能再現其意義。學習時候所運用的工具與置身所在的情境加深了學習者對學習規律的理解與應用，展現出豐富多樣的自主學習歷程。換句話說，學習者使用工具的同時，也在進行概念的發展與思考。工具與情境是學習與思考的啟動之鑰。

半世紀以來，不論學術界、產業界、或教育界，皆漸次感受到中介學習的載體，從人與人之間、人與紙本間、進入人與機之間、甚至於到機與機之間的關係，放鬆了學習環境的定義，也增加了學習發生的機會，更促成跨界的互動。載體與我們所獲取的知識之關係，相較於以往更加密切。由於學習媒材的來源益加豐富，知識的獲取及個體的改變歷程將因承載與傳達知識的媒介或工具，而有不同的面貌。當 van Hiele 聲稱：「符號定義脈絡，相同地，脈絡也定義了符號，彼此的關係是來回交互的。」（1986, p. 61）時，便也顯示了在幾何學習的討論上，無可避免的，符號或工具（例如語文描述或具體圖形）作為載體，來自情境脈絡，載體與情境二者相互結合，影響學習的結果，使得學習結果、學習過程、與學習工具（載體）糾結一起無法分離。此論點便是我們將切入探討幾何思維新途徑的載體理論之核心精神。

## 肆、載體對概念發展的影響

載體（Genre）之原意為寫作的文體，寫作者利用文體表達與溝通，本文所稱之載體泛指承載知識訊息的媒介體（Miller, 1994）。載體理論（Lave & Wenger, 1991; Miller, 1994; Vaughan & Dillon, 1998）強調不同的技術與媒介影響個人及群體之思考行為與判斷，甚而影響學習習慣的改變與學習歷程的轉換。在教室的學習情境中，載體就是課程教材、教學方法或數位科技的軟體等。就人類而言，承載知識的載體經歷千百年的演進與發展，代代傳承，促進了文明的進展。千年以來紙型載體，以紙張與文字作為溝通的媒介，造就了人類的思考文化。而今數位科技的載體進入人類生活中，與千年的紙形載體相比，不過短短半世紀，人類的生活習慣，包括購物、聯絡、訊息傳遞等，卻因此大為改變。電腦網路作為承載知識訊息的載體，對知識的傳遞、組織、與創造之影響，逐漸與傳統的紙筆載體的影響力相抗衡，甚而就新生代而言，更有凌駕於上之勢。此數位載體的興起與發展不但打破了紙筆形式載體系統的千年平衡，亦影響了知識的表達運作方式。

載體對社會文化變遷的影響，如 Cole（1995）所言：「文化和認知，彼此創造。」文化促成載體的演變，而載體改變認知，造成文化的演化。以下依據 Berkenkotter 與 Huckin（1995）對載體的定義，從情境認知的角度討論載體所提供的學習仲介之特質。

### 一、載體是社會文化的動態結構

人在社會中，乃是有行動有思考的主體。行動者對於所經歷的事物現象產生反應，並透過載體再現或重述經驗。Berkenkotter 與 Huckin（1995）認為載體其實是引導思考的動態結構，每一種載體都會有其內隱的結構，人類作為行動者，在情境中接觸到載體的內隱結構，同時將個人經驗透過載體表達

出來，而在與這內隱結構的互動中，行動者的經驗逐漸形成穩定的思維方式，並賦予獨特的意義，達至和諧的狀態。然而，行動者並非一成不變，行動者不斷改變所使用的載體，以符應行動者的情境感受以及認知需求。Yates 與 Orlikowski（1992）提出：

> 載體在特定社會歷史脈絡中湧現，並隨著時代推移而強化為一種不斷再次發生的現象（a situation recurs）…這些載體爾後改變了人類對相似情境的未來反應。（p. 305）

此句話亦呼應了 Miller 對知識的看法。Miller 認為（1994, pp. 156-157）知識的用處在於可以用來承載新的經驗，新經驗經由相互關聯且彼此相似的體認而變得熟悉；這些相似性成為類型（category）的成分，也是概念的基底。由於相似性來自經驗，因而所構成的類型是社會建構的，是情境相依的。

載體有不同形式（例如紙本載體、數位載體），可導致學習的不同結果，而學習又是社會實務整體中不可分割的一部份，因而載體也是社會文化的要素之一。我們對文化的最佳了解乃來自行動者/學習者如何詮釋與創造社會行為的知識，如同 Lave 與 Wegner（1991）所提示：

> 實務社群是知識存在的一種內在狀態，因其提供了塑義傳承所需的詮釋支架。是以學習者參與知識所存在的文化實務中，實乃為一種學習的認識論原則。（p. 98）

個體的學習歷程事實上便是掌握載體的歷程，以運用此系統參與知識的詮釋與創造，是以載體成為社會文化形成中不可或缺的要素，對知識提供了意義（making sense）和詮釋的支持。

## 二、載體是仲介思考的符號工具

關於「文字書寫」這種載體形式，蘇格拉底在《柏拉圖・斐德羅篇》中曾這麼評論過（Plato, 360 B. C.）：

> 一旦人們學會了書寫，便在靈魂中引進了遺忘。人們將不再運用記憶，因為人們信任書寫。…書寫沒有辦法幫你記憶，僅能幫你提示。書寫留給學生的僅是智慧的表象，卻不是真正的智慧。

西元前四百年間的蘇格拉底年代，書寫文字的發明，作為一種心智運作的載體，顯然也曾激起一些討論。然不可否認的是文字載體數千年來，因其可以記錄思考，使得心智的運作有更多的可能性，不侷限於對事物的記憶，得以運作更高層次的思維，且透過書寫文字，智慧可以代代相傳甚而創新。文字書寫的確改變了溝通的功能、思考的型態以及記憶的方式。Vygotsky（1978）亦提出「語言為思維的工具」，將語言或文字視為智能和情意發展歷程的仲介系統（mediated system），這也就是 Feldman（1989）所認為的：

> 我們以符號象徵來創造世界，……兒童時期的認知就是如何創造世界的一種學習，而這學習主要來自文化中的語言工具。（p. 106）

Greenfield 有一篇對墨西哥文化改變的研究（1999），探討正式教育所使用的符號工具對當地婦女編織認知技能和學習歷程的影響，符號儼然成為指引編織的工具或策

略，使得婦女可以超越原來所學，而有了新的創造。社會/歷史觀點認為學習乃是學習者在活動中與同儕共享與自我內化二者交互的歷程（Greeno, Collins, & Resnick, 1996），包括前述之墨西哥婦女或是我們自己，乃從社會互動情境中學習活動的意義、發展對於載體的了解、同時學習運作載體（如語言、符號、圖像、工具等）。例如編織情境中，婦女對於編織符號的理解、運用、進而創造作品、改進符號，或是幾何學習情境中，兒童對於圖像的運用、或是程式語言的撰寫，一則涉及內化學習，另一則亦含納社群的共享與交互。當學習者的運作表達能力成熟到可以靈活運用這些載體時，此載體就成為學習者與世界溝通的符號工具，支持學習者建立新的學習成果並促進其動機與企圖。

## 三、知識與載體置身於情境中無法分離

情境認知的觀點強調學習的實務背景不只是「置身」（situated）於時空的情境，同時還於情境中建立個體運作的模式，產生不同的學習歷程（Lave & Wenger, 1991）。在載體理論下，Brown 與 Duguid（1996）認為學習的歷程不是堆積木，學習者不是將積木一個一個疊起來；學習毋寧更像是繪畫中色彩的濡染融合歷程，每個新色彩的加入都會成為原來色彩的一部分，而在融合的過程中兩個色彩都改變了。從情境認知的角度而言，學習的情境乃在提供並支持學習者思考的脈絡，讓學習者體認在此情境中的意圖（situational intention），以產生行動的目的性與必要性。這種情境意圖有如前導組織（advanceorganizer, Ausbel, 1968）般，學生從情境意圖中採取直接的行動，甚而可以越過有意識的推理歷程與教師的引導。例如我們看到球就知道可以丟、踢、玩，看到盒子就想要看看盒蓋在哪裡如何打開，看到水溝就會自然而然跨越過去。在學習的歷程中，學習方式、學習環境與學習結果融合一體，無法切割，如同繪畫中色彩的濡染融合歷程，新色彩與舊色彩的融合，成就了另一種新的顏色。Brown, Collins 與 Duguid（1989）認為概念知識的獲得與符號工具的運用同時進行，是情境化的且從活動中逐漸發展而來：

> 個體主動運用工具並非只是了解工具而已……從運用工具以及自身成為工具的歷程中，個體對世界建立出一個逐漸豐富、無法明說的內隱（implicit）了解。對世界和工具的了解在他們互動結果中持續改變。……工具的文化和運用方式，整合為一決定了參與者觀看世界的方式，且同時，世界對他們展現的方式也決定了學習者對世界和工具的文化性了解。然而不幸的是，學生往往學會了運用領域中的工具，卻無法利用這些工具在文化中調適自身的了解。（p. 33）

學習者對載體的瞭解，乃在情境中習得，源自於活動的參與，同時，其自身也融於其中，故具有情境認知的性質。繼而所習得的知識，與載體的形式結合，在學習者所參與的文化活動中持續發展著。

# 伍、載體理論觀點下的幾何思維

在幾何思維階層上，van Hiele 強調層次一是層次二的基礎，層次二的活動又是層次三形式思維之重要基礎，這樣的思考層次如何促進學習呢？van Hiele 的幾何思維之教學五階段如下（van Hiele, 1984b）：一、訊息提供（information），二、方向性引導（guided orientation），三、解說（explication），四、

自由引導（free orientation），五、統整（integration）。幾何思維的階層結構與上述教學結構結合之後，給予教師清楚的指引，符合教師在教室中作為知識促進者之角色，同時也照顧到大多數的學習者。當學習者遇到學習困難時，可以依循理論回歸前一層次的發展，同時配合 van Hiele 所建議的教學原則交互引發以促進學習者的理解。

幾何思維階層論在此情境下，確實可以描述大部份學生學習的狀況，然而 Clements 與 Battista（1992）回顧了 van Hiele 理論後，對幾何思維所宣稱之階層論的規準提出質疑，Brainerd（1978）亦曾提及此論點。二文皆認為階層論乃一「描述性」的理論，描述學習者的狀況，尤其在目前幾何教學以階層論為主流取向之情況下，學習成果有階層現象可能大部分原因來自教學的結果。亦即教學的順序依照階層觀點：圖像、文字描述、理論、邏輯律則、到律則本質，則學生的理解自然容易呈現如此的階層關係。如果進一步問，階層論是否為一恰當的「解釋性」理論？亦即學習者的幾何思維不論在何種教學脈絡下，都依循階層性的發展順序？如果假設是的話，研究者必須將學習者置於各種不同教學環境中加以觀察，如果看到學習者不論在何種教學脈絡下，都展現出階層的學習結果，則階層論就是一個好的「解釋性」理論。反過來說，如果有某種教學脈絡可以使學生產生不同於階層關係的發展路徑，那麼階層論就不是恰當的「解釋性」理論，僅是「描述」目前較盛行的階層觀點下教學後的學習成果。

然目前為止，階層論是否為「解釋性」理論，勝過「描述性」理論？尚沒有定論。但現今的教學脈絡相較於五十年前階層論提出之時，已有很大的變化，多元媒材出現，學習環境愈加豐富、教師角色的定義更加寬廣。如同我們在第肆部份所描述的載體性質一般，學習歷程將因環境的轉變與知識仲介方式之不同有新的面貌，是以我們提出載體理論之觀點，討論幾何思維除了階層模式外，還有其他可能的面貌：

## 一、幾何思維的層次亦有可能是性質相異的不同載體之運作

階層論下幾何思維的五層次，包括圖像操作、語言描述、與嚴密公理等不同的符號工具是否乃為學習者在不同特性載體上的運作？Wilson（1990）指出六年級學生自己對長方形所下的「定義」與其所圈選的「圖形」並不一致，顯示描述層次的概念定義，與圖像層次的概念心像，常是獨立的兩種思維。我們認為每一個層次的思維有可能是學習者對於此符號工具（載體）的運用，van Hiele 亦有此想法。van Hiele 描述思維的三個層次時，便說（1986）：

> 第一層次的「語言」使得視覺觀察是可以說得出的，「語言」增加視覺觀察反應的力量。至於第二階層思維中，所觀察到的結構中之因果、邏輯、與相關，成為「語言」的一部份，透過此「語言」的運用，新結構誕生了。這些結構在第二層次的「語言」發展出來之前，是無法思考得出來的。……至於理論層次的「語言」，則又更抽象多了，包括因果、邏輯、與結構上的其他關係，是非視覺性的。幾何定理之間的邏輯關係之推理因第三層次的「語言」而發展。（p. 86）（註：引號為本文作者自加）

上述關於 van Hiele 的陳述，除了被解讀為概念階層之性質外，van Hiele 亦同時提出一重要想法：人們的幾何思維依附在據以思

考的「語言」上，van Hiele 所謂的「語言」，即為表達概念的符號工具，亦即本文所說的載體。如採用 van Hiele 的說法，每一層次的學習，都需掌握該層次的「語言」，此論點與我們的想法一致，載體（符號工具）的性質影響學習者的思維，學習的成果因學習者對於載體的熟稔與運作而異。van Hiele 認為，新層次的達成乃因新「語言」的習得，亦即學習者在習得與熟悉新的載體之前，學習是無法加速的。van Hiele 舉了一個例子，在處理2/7＋5/13的異分母加減時，老師或者可以強調分母相乘，分子跟著擴分，便可以透過通分算出答案，然這可能僅變成公式的記誦。為了促進學習者的理解，教師也許會以兩張7＊13的細格板呈現如圖1。

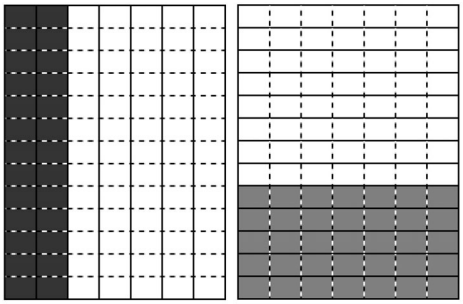


圖 1：7 與 13 通分用之細格板（包含細格板 A 與細格板 B）

教師可藉圖1說明細格板 A 之2/7（深灰色）乃是26/91，而細格板 B 之5/13（淺灰色）乃是35/91，二者相加變成了61/91。如此做的意圖在於降低思考層次，從第三層次的思維降到第一層次，亦即把「兩個異分母分數相加，必須先化為同分母」的理論原則層次，透過圖形媒介，降到視覺層次，協助學生以較低階的載體（視覺）理解之。可是 van Hiele 認為這仍是枉然，學習者在未擁有該理論層次的恰當「語言」時，即使降低層次，固然可使學習者看懂圖形，但也無法促使學習者真正瞭解2/7乃是26/91（1986, p. 87）。藉著此例，我們從載體理論便可以解釋，視覺圖像與描述語言乃是不一樣的符號工具，學習者在圖形中「看懂」不同分割方式的等量狀態，不表示就可以理解擴分通分原則。例如視覺上面積不變但增減分割線，可以幫助學習者瞭解1/2張色紙和2/4張色紙一樣大，可是如此的瞭解不等同學習者會同意數字上的1/2＝2/4。學習發生的關鍵在於學習者個人經驗與學習任務的連結以及學習者對於載體運作的熟稔，如果教師交錯載體或可促進學習者透過不同載體的媒介來重述其理解，但學習的關鍵恐不在於將不同載體的學習成果以階層順序來排列。

## 二、個體對性質相異載體的運作掌握可以同時並進

不同幾何思維層次如上述所推論，實乃不同載體之運用，則載體與載體之間亦有可能不具有階層之關係，個體對於性質相異的載體之運用能力，可能同時並進或各有順序。左台益與梁勇能（2001）之研究發現，依據 van Hiele 層次對222位國二學生分類，如以答對同一層次5題中的4題即可算此已達該層次的思考水準而言，有178（80%）位學生可正確定位其思維層次，亦即低階順利通過而達到高階層次；如以答對同一層次題中的3題，即可算已達該層次的思考水準而言者，有190位（86%）學生可正確定位其思考層次。但反過來說，在目前幾何教學以 van Hiele 的思維層次為依歸之情況下，仍有15%或20% 學生之思考層次以及運作歷程無法依照 van Hiele 的階層論正確分類，表示幾何思維除了以階層順序來習得以外，亦有學生可能出現不同的狀態。Gutierrez, Jaime 與 Fortuny（1991）針對50位受試者（包括20位準

小學教師主修科學、13位準小學教師主修幼教、以及9位13-14歲八年級學生）施以一小時的立體幾何測驗，瞭解他們的幾何思維層次。結果發現有42位受試者可以依據思維層次的高低階來定位，但有8位（16%）的表現不合階層的預期。Gutierrez 等（1991）推測以下三原因：測驗有效狀況不佳、方法診斷的缺失，或是教學策略所造成。但是他們在結論中亦提及：

> 我們觀察到並非所有學生都以單一的思維層次來推理，有好幾個學生乃是同時使用不同階層的思維，也許與題目的難易有關。這樣說並不表示推翻 van Hiele 的階層結構，毋寧更是顯示 van Hiele 理論需要調整以符應人類推理歷程的複雜性：人類並不像我們所以為的給予階層的標定那樣，依著線性順序的方法來思考。（p. 250）

對於這樣的現象，我們認為正是載體理論之核心。載體理論已顯示不同層次的運作其實乃是操作不同的符號工具以承載知識，個體對於載體的熟悉，將創造出不一樣的知識面貌。就圖像的視覺層次而言，在載體內容豐富而可以支持進一步學習的情況下，學習者不必然需要「升級」到描述層次，才得以有進一步的理解，豐富的視覺載體當可以促進學習者掌握幾何的意涵。van Hiele 自己亦提出不同的思維層次是不同的「語言」運作，如同 Gutierrez 等（1991）發現有學習者的學習結果不符合階層順序時所發出的感慨一般，人類的思考多元且多面，固然部分學習成果可以循著線性階層順序來發展，然而除了階層發展之外，我們亦不排除有其他的連結方式與路徑。是故學習者可以利用自我的長處以及情境的方便性，選擇適當的載體進行學習，因而在不同的載體上有不一樣的進程，學習進度可以同時並進。

## 三、載體所導引的內隱規則會促成不同學習策略

晚近的概念理論指出概念作為個體內在對於外在世界的表徵（represent），不是基於正例之間的相似性、或正例與非例間的相異性，而是植基於人們直覺上對於世界的知識與理論（theory-based view）（Murphy & Medin, 1985），亦即現象間相互聯繫的知識和解釋方式。例如，給一個正方形和圓形，請受試者指出有何差異？通常會得到很簡單的答案，「一個是直線組成的，一個是曲線」。但如果給一個正方形和不規則的五邊形，請受試者指出差異，卻會得到比較多的答案，如邊數不同、頂點數不同、有無平行邊、有無對稱、有無直角等。其實用這些屬性去檢查圓形，也可以說圓形沒有邊、沒有頂點、沒有平行邊、沒有直角等，但我們並不會這麼說，我們自然會用多邊形與曲線圖形最核心的差異作為答案，而忽略用來區辨不同多邊形的各式屬性。即使是兒童受試者，現象亦同（徐于婷，2005）。這代表概念不是既定的靜態內容，也不是彼此獨立的單位，會隨著情境引發相對重要的屬性或原理原則，此亦為本文第肆部份第三點所提及的「知識與載體置身於情境中無法分離」之現象。從概念形成的初始，甚至於早於視覺形式的概念之前，內隱的解釋性規則已經存在，主導學習者如何形成概念（Gopnik, Meltzoff, & Kuhl, 1999），使得概念不必然如 van Hiele 的階層觀點般循著視覺到分析的階段來發展。Ryan（1981）曾言：

> 載體的重要性……在於他們的認知和文化價值，而載體理論的目的在於呈

現載體使用者的內隱知識。（p. 112）

不同載體在殊異的情境中，帶出不一樣的內隱規則；學習者則透過載體的運作，彰顯其內隱知識。幾何知識在此觀點下，為動態狀況，與載體結合，因情境而變化。

學習者透過不同載體來學習幾何，會得到不一樣的意義，例如在電腦前自主摸索學習幾何，便和在教室中聽教師在黑板上講授幾何，有很大的差異。主因在於情境不同，所提示的情境意圖亦不同，因而學習結果與載體相互牽連。Papert（1999）發現透過程式語言的敘寫與直接的視覺支持，創造了心智結構和電腦間的橋樑。程式語言所造成的立即視覺回饋，使得學習者可以直接檢視自我心智的運作，促使心智以更彈性的方式去分析問題，語言與視覺交互運作甚而產生新的創意來解決問題。Chirwa（1997）探討國小兒童在電腦數位學習環境（如多媒體、資料庫、模擬、工作表單等）下知識習得的學習策略，結果顯示學生最常用的策略是心像、舉例、和網路，其次依序是練習、分類、和精緻化。此學習策略的順序，與紙本載體的情境已有很大的不同。

## 四、幾何教學可因不同載體的利用而各有安排

依循過往的思考方式，一般認為幾何教學順序的安排應是從具體到抽象，亦即具體的、物理性質的概念學習，排在抽象的概念學習之前。然而，具體與抽象之分類，乃是教學者（或研究者）所為，對學習者而言，概念的獲得歷程，恐怕更是「有意義的」以及「無意義的」區別。例如，現階段數學課程的安排，先教角度、後教平行，認為角度概念就表達方式而言，可以具象化，而平行概念涉及關係，比較抽象。在數學定義上，平行是以「兩直線同時垂直於第三線」來定義，其中用到了垂直，而垂直又與直角相互定義，是以，在數學概念階層中，平行概念似乎必須以直角作為基礎，提到直角又必須先學角度，使得角度相關教材之出現早於平行相關教材。然而平行概念真的比角度概念來得困難嗎？Abravanel（1977）曾以三歲與四歲幼兒為受試者，採圖形比對作業進行平行線概念的測試，研究者提供一標準圖，接著再給兩個圖形（選項 A 與選項 B），要求幼兒從 A 與 B 中選出「和標準圖比較像的圖」（如圖2）。




圖 2：幼兒平行線概念的實驗材料之一

標準圖為右上到左下傾斜的平行線，選項 A 為從上到下鉛垂方位的「平行」線，選項 B 為兩條右上到左下傾斜的「非平行」線。從線段的走向與方位等視覺效果來看，標準圖和選項 B 比較像，但就強調線段之關係的平行概念而言，標準圖和選項 A 才是同類的圖形。類似的材料有三組，研究結果顯示美國與印度的四歲幼兒在三組材料中有70% 到93% 選擇具有平行概念的圖 A，顯著高於50% 的猜測機率，而美國的三歲幼兒也在兩組材料中傾向選擇圖 A，顯示兒童能辨別兩條線是否平行，且不為線條的方位所惑，可見平行概念的形成不見得必須在角度概念之後。顯見觀察者或是教學者所看到的數學知識內容結構，不一定恰好反映出兒童習得的過程。

學習媒介的採用會影響幾何概念學習的順序。Wu, Wong, Cheng 與 Lien（2006）以

及劉宜芳與吳昭容（2008）在數位載體為介面的研究中，讓四年級學童選擇組合三角形的角度，結果學童在自我主導的實驗搭配圖形回饋的數位介面中，自行發現三角形外角性質（角1＋角2＝角3的外角）的比率顯著高於發現內角和性質（角1＋角2＋角3＝180度）的比率（兩個研究分別為53% 比12% 以及44% 比28%）。這些四年級受試者因數位載體的運用而有較高發現率的外角性質，乃是目前八年級的數學教材，而發現率較低的內角和性質則是四年級的教材。為何如此？回顧四年級課程教導內角和性質，大多是讓學習者利用紙張剪出三角形之後，再分別剪下三個角，拿來拼合成180度，因為三個角已經剪了下來，因此看不到邊的外延線而無法體會三角形的外角，當然也就不容易發現外角性質。相對的，當學習環境改採數位載體，逐步呈現角1、角2，並在學生選定角3的外角角度時，程式會將內角1的一邊翻折起來，以旋轉角的方式轉到相應的外角角度。動態呈現外角與角3關係的方式，使得外角性質的發現，在四年級成為可能。此一現象告訴我們，在學習幾何性質的歷程中，載體的改變，改變了學習的順序，亦即，數位載體能夠更靈活呈現傳統載體（例如黑板、紙板、量角器）難以呈現的幾何關係，使得不同學習載體促成了不同的學習路徑。

又例如高中幾何的軌跡問題：「給定兩圓圓心與半徑，求與之相切的切圓圓心軌跡」，學生不容易在徒手畫圖的情況下經驗到橢圓的圖形軌跡，接著隨之而來的就是無法以橢圓的相關知識進行解題。但如果在電腦環境中透過動態幾何軟體（Geometer's Sketchpad）的介面（Jackiw, 2006），則此一軌跡問題就具體多了，與橢圓知識的關係也容易提取與保存，學習者對於此概念理解的時間點將可能因為此載體的性質以及學習者在載體上的運作而有所調整。

## 陸、結　語

目前的研究結果顯示，大約80% 的學習者的幾何思維表現符合 van Hiele 的階層論，所以該觀點作為一個描述性理論的確具有一定的效力。然而，即使在幾何教材以及教法遵循 van Hiele 的階層觀點之學習環境中，仍有20% 左右的學生未能在此階層結構中被定位，例如有學生通過層次一與三，但是沒有通過層次二者；或者是學生在不同層次同時並進，無法定位屬於哪一個層次。換言之，當我們先教 A、再教 B，而學生也的確表現出先會 A、再會 B，則「先 A 再 B」的現象，僅能描述學生在目前教學狀況下的表現，但概念的發展，尚有其他的可能。如果學習環境跳脫既有的紙筆與黑板為主要載體之教室環境，而採用其他形式的載體，例如，程式語言或是動態幾何等數位環境的媒介，或者我們可能發現更為豐富的學習歷程與連結。

我們將載體理論放在幾何思維的學習上時，得到以下4點啟示：

1. 幾何概念的發展與改變歷程多元而豐富，甚或是直覺式，不容易觀察到，除了目前主流的階層觀點之外，載體理論亦可描述學習者的思維狀況。
2. 學習者所形成的幾何概念固然具有可類化的一般性特質，然則概念所發生的情境以及學習概念時的載體，往往亦具影響力，使得概念的樣貌因情境與載體之不同，而具有動態的性質。
3. 幾何思維的發展路線除了階層模式外，亦有可能發生學習者在視覺發展之後仍未脫離視覺層次，但亦能抵達理論層次。在發展歷程上，不同載體彼此之間可能

呈現時期循環的交互使用，進而相互效力。

4.幾何思維的形成過程中，學習者與載體的關係是一關鍵，例如採用何種載體來完成任務，或如何利用載體來表達學習成果。在視覺學習媒介豐富的情況下，視覺（或心像）亦可以促進理論的理解，學習的重點並不是何種載體運作比較高階的問題，而在於：(1)學習者對於載體之運用如何因情境不同而彈性調整；以及(2)何種載體對於學習者而言更具有意義且容易連結。

van Hiele 的階層論（1957）乃創發於紙筆、黑板、教科書等媒體為學習媒介的五十年前，當時知識傳播最便利的工具是可書寫在紙筆黑板等固定介面的文字與符號，且此載體已延續數千年之久。由於媒材本身的變化小，是以學習者在視覺感知之上，需要抽象出原理原則，才得以順利超越「無法隨時變化圖形」的紙筆黑板媒材。學習者越能快速超越視覺圖像進入描述以及演繹期，則越能夠在下一次取用此知識時，有效率地依循原則往下演繹，而不必依賴在媒材上的靜態圖像。此方式，在紙筆媒材時代下，確實可以簡省學習者的認知負荷，達到順利運用概念的目的。是以階層論中，文字之描述、推理、定義高於視覺圖像層次，成為幾何學習的高階成果。即使如此，van Hiele 自己亦於1986撰寫的《結構與洞見：數學教育的理論》“Structure and insight: A theory of mathematics education” 一書中，透露出各階層有各自的「語言」，階層之轉換，是完形的樣態；直覺來自於觀察與看見，而直覺對於概念產生的影響，不亞於推理與定義。可見在階層論之外，van Hiele 亦提出了其他的可能性。愛因斯坦對於自己如何思考是這樣描述的（Hadamard, 1945, pp. 142-143, 引自 Root-Bernstein & Root-Bernstein, 2006, p. 1）：

> 語言中的字句，不論是寫下來或是說出來的，對我的思路似乎都不能發揮作用。反而是物理性的實體才是我思維中的元素，如同符號與清楚的圖像一般，它們能夠自主地再製與整合。

愛因斯坦據以思維的元素是物理性質的實體，實體如同符號與圖像一般，能夠再製與整合。當我們從載體理論的觀點重讀幾何思維的階層論時，無可否認地，學習者必然要依賴一個載體來掌握學習內涵，如愛因斯坦對於實體的掌握：我們有時依賴文字（例如學習語言時），有時依賴視覺圖像（例如學習編織中國結時）。承載知識的載體將會促成學習者形成學習成果，使得學習方式、學習成果與載體性質不可分離，如同我們無法區分舞蹈與舞者一般–如果沒有舞者，就不會有舞蹈；如果沒有舞蹈，則不會有舞者。以當今數位內容與視覺符號充滿在我們生活四周的情況下，視覺圖像作為一個符號系統，比起以往的文字載體為主的學習環境，更有可能成為一個可以運作的載體。學習歷程除了階層論之描述外，學習者亦有可能透過視覺系統來進展，而無須如過去研究者所解讀的結果一般，在第一層次的視覺之後，學習者必須脫離視覺層次、升高到第二層次的語言描述、再進到第三層次的理論演繹，才得以具有彈性可類化的概念。

我們認為幾何的學習歷程，將會因為重點放在載體上，而非階層上時，導致不一樣的發現。就學習幾何而言，不同載體可以同時進行，亦可以促使學習者交錯不同載體來表達並學習，學習者有可能呈現傳統上的學習階層關係，也有可能出現學習階段混淆無法歸類的現象。Gutierrez 等（1991）認為 van

Hiele 需要調整其階層模式來符應人類學習的複雜歷程，而我們認為如果把載體理論的觀點介入幾何學習探討中，則在現今數位視覺相當易得的情境下，思維歷程將不會以階層為唯一主流的觀點。如同 Keil（2006）強調，概念之改變也會來自於環境的親近與易得。幾何學習之觀點，除了影響超過半世紀的階層論外，研究者尚可轉換不同觀點，接納幾何思維學習路徑的複雜多元性與非線性。

## 致　　謝

本論文之完成，感謝國立台灣師範大學數學系左台益教授在幾何學習上以及國立台北教育大學教傳所趙貞怡教授在 LOGO 發展上的提示，並承蒙國科會計畫之支持（96-2413-H-152-013-MY3、94-2511-S-152-006、95-2511-S-152-004-MY2 、 93-2524-S-152-001、95-2511-S-152）。審查委員以及編輯委員在思維邏輯、論述行文、文獻引用以及格式上的提問、激勵與協助，是本文今日值得一讀的推手。讀者固然可以不為我們的論點所說服，但欣賞學習狀態的多樣，是身為人類的我們所欣見。

## 參考文獻

1. 左台益（2002）。van Hiele 模式之國中幾何教材設計。**中等教育，53**（3），44-53。
2. 左台益、梁勇能（2001）。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。**師大學報：科學教育類，46**（1，2），1-20。
3. 卡密羅史密斯（Karmiloff-Smith, A）（2001）。**超越模組性：認知科學的發展觀**（Beyond modularity: A developmental perspective on cognitive science，謬小春譯）。上海：華東師範大學出版社。（原作 1995 年出版）
4. 何森豪（2001）。van Hiele 幾何發展水準之量化模式--以國小中高年級學生在四邊形概念之表現為例。**測驗統計年刊，9**，81-129。
5. 吳德邦、謝翠玲（1998）。根據 van Hiele 理論來探討國小數學實驗課程之幾何教材。**中師數理學報，2**（1），22-62。
6. 徐于婷（2005）。**國小六年級學童平面幾何屬性知覺之探討**。國立台北師範學院數學教育研究所碩士論文，未出版，台北市。
7. 張英傑（2001）。兒童幾何形體概念之初步探究。**國立臺北師範學院學報，14**，491-527。
8. 陳于倩、姚如芬（2002）。Van Hiele 幾何思考層次與 SOLO 分類法之比較。**屏師科學教育，16**，18-26。
9. 盧銘法（1999）。國小學生四邊形幾何概念之分析。**中師數理學報，3**（1），1-37。
10. 劉宜芳、吳昭容（2008）。兒童在數位式數學實驗情境下的發現學習。**師大學報：科學教育類，53**（1），87-111。
11. Abravanel, E. (1977). The figural simplicity of parallel lines. *Child Development, 48*, 708-710.
12. Ausbel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. NY: Holt, Rinehart, & Winston.
13. Barsalou, L. W. (1989). Intra-concept similarity and its implications for inter-concept similarity. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 76-121). NY: Cambridge University Press.
14. Beilin, H. (1965). Learning and operational convergence in logical thought development. *Journal of Experimental Child Psychology, 2*, 317-339.
15. Berkenkotter, C., & Huckin, T. (1995). *Genre knowledge in disciplinary communication: Cognition/culture/power*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
16. Brainerd, C. J. (1977). Cognitive development and concept learning: An interpretative review.

*Psychological Bulletin, 84*, 919-939.

17. Brainerd, C. J. (1978). The stage question in cognitive-developmental theory. *Behavioral and Brain Sciences, 2*, 173-213.
18. Brown, J. S., & Duguid, P. (1996). Stolen knowledge. In H. McLellan (Ed.), *Situated learning perspectives* (pp. 47-56). Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.
19. Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32-41.
20. Chirwa, A. S. (1997). Knowledge acquisition in computer-based learning environments among elementary children. *Journal of Educational Technology Systems*, *26*(1), 19-25.
21. Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 437-442). New York: Macmillan.
22. Cole, M. (1995). The zone of proximal development: Where culture and cognition create each other. In J. W. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition* (pp. 146-179). Cambridge: Cambridge University Press.
23. Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-127). New York: Springer.
24. Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds), *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Klu-wer.
25. Feldman, C. F. (1989). Monologue as problem-solving narrative. In K. Nelson (Ed.), *Narrative from the crib* (pp. 98-119). Cambridge, MA: Harvard University Press.
26. Geertz, C. (1983). *Local knowledge: Further essays in interpretive anthropology*. New York: Basic Books.
27. Gigerenzer, G., & Hug, K. (1992). Domain-specific reasoning: Social contracts, cheating, and perspective change. *Cognition, 43*, 127-171.
28. Gopnik, A., Meltzoff, A., & Kuhl, P. (1999). *The scientist in the crib: Mind, brain, and how children learn.* NY: William Marrow & Company, Inc.
29. Greenfield, P. M. (1999). Cultural change and human development. *New Directions in Child and Adolescent Development, 83*, 37-59.
30. Greeno, J. G., Collins, A. M., & Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 15-46). New York: Simon & Schuster Macmillan.
31. Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.
32. Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
33. Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 29-37). Dordrecht: Kluwer.
34. Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974). *Apprentissage et structures de la connaissance.* Paris: Presses Universitaires de France.
35. Jackiw, N. (2006). *Geometer's sketchpad 4.07.* (Computer software). Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

36. Jones, S. S., & Smith, L. B. (1993). The place of perception in children's concepts. *Cognitive Development, 8*, 113-139.
37. Keil, F. C. (1998). Cognitive science and the origins of the thought and knowledge. In K. A. Franklin (Ed.), *Handbook of child psychology, fifth edition* (pp. 341-413). New York: John Wiley & Sons.
38. Keil, F. C. (2006). Cognitive science and cognitive development. In D. Kuhn & R. S. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology Vol. 2: Cognition, perception, and language* (6th ed., pp. 609-635). New York: John Wiley & Sons.
39. Koning, J. (1948). *Enige problemen uit de didactiek der natuurwetenschappen in het bijzonder van de scheikunde*. Dissertation, Utrecht. Dordrecht: Petel & Felkers.
40. Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
41. Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral performance.* Cambridge: Cambridge University Press.
42. Mark, W. (1990). Measuring a van Hiele geometry sequence: A reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 230-237.
43. Mason, M. M. (1997). The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. *Journal for the Education of the Gifted, 21*(1), 38-53.
44. Miller, C. (1994). *Genre as social action.* In A. Freedman & P. Medway (Eds.), *Genre and the new rhetoric* (pp. 23-42). London: Taylor & Francis. (Original work published 1984)
45. Mistretta, R. M., & Wagner, C. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence, 35*(138), 365-379.
46. Murphy, G. L., & Medin, D. L. (1985). The role of theories in conceptual coherence. *Psychological Review, 92*, 289-316.
47. Nespor, J. (1994). *Knowledge in motion*. London: Falmer.
48. Papert, S. (1999). What is Logo? Who needs it? In Logo Computer Systems (Ed.), *Logo philosophy and implementation* (pp. IV-XVI). Montreal, Canada: Logo Computer Systems Inc.
49. Piaget, J. (1927). *La Causalite physique chez l'enfant.* Neuchatel: Delachaux & Niestle S. A. As cited in P. M. van Hiele (1986). *Structure and insight.* New York: Academic Press.
50. Piaget, J. (1968). *Le structuralisme.* Presses Universitaire de France. As cited in P. M. van Hiele (1986). *Structure and insight.* New York: Academic Press.
51. Plato (360 B. C.). *Phardrus.* Retrieved February 3, 2009, from http://classics.mit.edu/Plato/phaedrus.html.
52. Root-Bernstein, M., & Root-Bernstein, R. (2006). *Aping Einstein*. Retrieved November 3, 2008, from http://blogs.psychologytoday.com/blog/imagine-that/200808/aping-einstein.
53. Rosch, E. (1978). Principles of categorization. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 24-78), Hillsdale, NJ: Erlbaum Association.
54. Rosser, R. (1994). *Cognitive development: Psychological and biological perspectives*. Boston: Allyn & Bacon.
55. Ryan, M. L. (1981). On the why, what, and how of generic taxonomy. *Poetics, 10*, 109-126.
56. Sharp, J. M. (2001). Distance education: A powerful medium for developing teachers' geometric thinking. *Journal of Computers in Mathematics & Science Teaching, 20*(2), 199-219.

57. Siegler, R. S. (1998). *Children's thinking* (3rd Ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
58. Simons, D. J., & Keil, F. C. (1995). An abstract to concrete shirt in the development of biological thought: The insides story. *Cognition, 56*, 129-163.
59. Simons, D. S. (1996). In sight, out of mind: When object representations fail. *Psychological Science, 7*, 301-305.
60. Simons, D. S., & Keil, F. C. (1995). An abstracts to concrete shift in cognitive development: The inside story. *Cognition, 56*, 129-163.
61. Smith, L. B., & Heise, D. (1992). Perceptual similarity and conceptual structure. In B. Burns (Ed.), *Percepts, concepts and categories* (pp. 233-272). Amsterdam: Elsevier Science.
62. Smith, L. B., & Jones, S. S. (1993). Cognition without concepts. *Cognitive Development, 8*, 181-188.
63. Strauss, S., & Langer, J. (1970). Operational thought inducement. *Child Development, 41*, 163-175.
64. Teppo, A. (1991). van Hiele levels of geometric thought revisited. *Mathematics Teacher, 84*(3), 210-221.
65. van Hiele, P. M. (1957). *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*. Dissertation. Groningen, Holland: J. B. Wolters. As cited in P. M. van Hiele (1986). S*tructure and insight*. New York: Academic Press.
66. van Hiele, P. M. (1959). *Development and learning process: A study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics*. Groningen, Holland: J. B. Wolters.
67. van Hiele, P. M. (1984a). A summary of Pierre van Hiele's dissertation entitled: The problem of insight in connection with school children's insight into the subject-matter of geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 237-241). Brooklyn, NY: Brooklyn College, C.U.N.Y. (Original work published in 1957)
68. van Hiele, P. M. (1984b). A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, C.U.N.Y. (Original work published in 1957)
69. van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.
70. van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310-316.
71. van Hiele, P. M., & van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). Groningen, Holland: J. B. Wolters.
72. Vaughan, M. W., & Dillon, A. (1998). The role of genre in shaping our understanding of digital documents. *Proceedings of the ASIS annual meeting,* 559-566.
73. Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
74. Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3&4), 31-47.
75. Wu, C. J., Wong, W. K., Cheng, Y. H., & Lien, Y. W. (2006). Generating and evaluating geo-

metry conjectures with self-directed experiments. In J. Novotná, J. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 5 (pp. 401-408). Prague: PME.

76. Yates, J. A., & Orlikowski, W. J. (1992). Genres of organizational communication: A structurational approach. *Academy of Management Review, 17*, 299-326.

# Reconsidering the Hierarchical View in Geometric Thinking from the Perspective of Genre Theory

**Yuh-Yin Wu,[1] Chin-Hsieh Lu[2] and Chao-Jung Wu[3]**

[1]Department of Psychology and Counseling, National Taipei University of Education

[2]Department of Special Education, National Taipei University of Education

[3]Department of Educational Psychology and Counseling,
National Taiwan Normal University

**Abstract**

This article aimed to revise geometric thinking from the perspective of genre theory. We first criticize the following properties of geometric thinking through recent research findings of conceptual development: hierarchy, concrete--abstract formation, and generalization. Then we discuss genre theory and explore its three main points: social cultural emphasis, language/instrument system, and knowledge being mediated by genre. We then conclude some possibilities about geometric thinking under genre theory: 1. The levels of hierarchical structure might be learners' operation on different genres, 2. Learners might grasp operations on different genres simultaneously, 3. Different genres produce different implicit rules and might lead different geometric learning strategies, and 4. Geometric teaching strategies might have changed according to different genres. Genre theory may serve as another perspective to approach geometric thinking.

**Key words**: Hierarchical View in Conceptual Development, Genre Theory, Geometric Thinking, Situated Cognition