科學教育學刊
2009, 第十七卷第三期, 203-231

Chinese Journal of Science Education
2009, 17(3), 203-231

運用提問方法促進中學生對代數式中文字符號語意理解之研究：提問模型建構

陳彥廷[1]　**柳　賢**[2]

[1]國立編譯館

[2]國立高雄師範大學　數學系

（投稿日期：民國 97 年 10 月 29 日，修訂日期：98 年 6 月 24 日，接受日期：98 年 7 月 2 日）

摘要：本研究旨在探究十五位七年級個案學生在提問引導教學情境中，對代數式中文字符號語意理解的改變；進而提出促進學生對文字符號語意理解改變的教學提問方法模型。首先，研究者從 76 位參與「文字符號語意測驗」施測七年級的學生中依得分高低，從高、中、低三個層次中分別抽取 4 位、7 位、4 位（共 15 位）學生，進行一系列相同順序的問題解題，從個案學生的解題回應中，不斷地以「提問」的方式促進他對代數式文字符號語意角色與列式、運算技巧的理解。研究結果發現，促進三個層次學生對文字符號語意理解的提問方法包括「前進式提問」、「聚焦式提問」與「回顧式提問」；而本研究也提出促進不同層次學生對代數式中文字符號語意理解改變之提問方法模型。

關鍵詞：文字符號、代數學習、提問、語意理解、數學理解

壹、緒　論

郭汾派、林光賢與林福來（1989）指出，文字符號在數學的解方程式、應用題等題材上都需要，因此是重要的數學概念。而美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）的《學校數學課程與評鑑標準》也將文字符號的理解與使用，作為五至八年級的數學教學目標。可見，文字符號的理解與使用的熟練，對學生能否成功由算術學習邁入代數學習扮演重要的角色。然而，Kieran（1991）指出，學生在中學代數學習的主要困難之一在於文字符號意義之不理解。戴文賓與邱守榕（1999）亦指出，學生初入代數領域時，對代數中的基本符號與名詞（如文字符號與英文字母）、合成運算、運算符號及運算規則常無感覺，因而未能分辨其差異。可見，思考如何引導學生強化對文字符號有意義的理解是件重要

的工作。

其次，教師「提問（questioning）」也是課室中影響學生思考的重要關鍵。Artzt（2002）指出，提問能促進師生、同儕有效互動，擴展學生思考。教室裡有許多老師所提問的問題幾乎無法促進學生思考。只有有技巧地提問，才能協助學生發展數學的想法、知識（Martino & Maher, 1999）。可見，教師能否適切運用提問方法引導學生進行數學思考，是值得重視的議題。有鑑於此，本研究的目的有二：

一、在一對一教學引導的環境中，發展適切的提問方法來協助不同文字符號語意理解層次學生對文字符號語意的理解改變。

二、統整每一次教學引導所發展的提問方法，建構促進學生對代數式中文字符號語意理解改變的提問方法模型。

貳、文獻探討

本段主要介紹文字符號的語意/情境觀點、教學提問的意義與類型、數學理解的意義與評鑑方法。

一、文字符號的語意/情境觀點

Wagner（1981a）於第五屆數學教育心理學會（PME）中提出一個探究學生對於「文字符號」概念理解的分析架構，他認為文字符號在數學中有許多使用方式，依據它們出現的情境和所指的元素，有不同的名稱（如未知數、一般數、不定數、常數等）。在數學文字符號中，符號和指示對象決定其語意角色；而符號和情境決定其語法角色。陳彥廷與柳賢（2009）依此觀點並綜合 Kuchemann（1981）與九年一貫課程綱要，建構一個七年級代數式中文字符號語意、情境的架構。架構中，文字符號的語意角色包括「特定數」、「特定未知數」與「一般數」三個類別；而文字符號的情境則分為「多項式」與「方程式」兩個類別，每一類別下又分為「一元一次式」與「二元一次式」等子類別，而每個子類別下又有「列式」、「單一運算」、「混合運算」以及「代換」等細項。根據上述的構念，建構出「文字符號語意測驗」。其中，KR-20信度為 .9531；難度0.15~0.9；鑑別度0.2~0.9；並經四位數學教育學者審閱。

本研究即運用此工具提供76位七年級學生受測，從受測成績中挑選15位學生（4位高層次學生；7位中層次學生；4位低層次學生）作為研究對象，進行後續之提問引導教學。

二、教學提問的意義與類型

1990年代關於學生如何建構數學概念的研究都指出，教學過程中不同因素（例如：教材、環境…等）都會影響學生概念改變（Maher, 1998; Maher & Martino, 1997; Maher, Martino, & Davis, 1996; Martino & Maher, 1999）。初始，學者認為教室環境應讓學生有時間進行探究與反思，而教師則應在此情

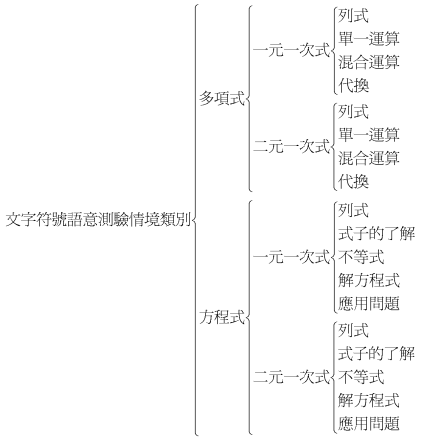


圖 1：文字符號語意測驗情境類別分析架構圖（陳彥廷、柳賢，2009）

境中鼓勵學生表達思考與想法（Martino & Maher, 1999）。而提問則能在教室中引發他人產生心智活動，並作反應的語言刺激。Davis 與 Maher（1990）也提到，提問是探究、質疑、挑戰或澄清定義最常用的方法之一。NCTM（2000）強調，老師必須扮演好提問的角色。可見，提問是促進學生思考的教學策略之一（Perry, Vanderstoep, & Yu, 1993）。那麼，提問在教學上有哪些功能呢？張玉成（1999）認為，提問可以引發學生的學習動機。Holliday 與 Benson（1991）提到，提問可以有效引導學生專注於教學內容。Marlowe（1986）指出，透過提問與回答過程，可引導學生提取舊經驗或回憶上課內容，進而加以整理、分析、歸納、判斷，逐步深層思考、精緻化想法，Holliday 與 McGuire（1992）也呼應此想法。

鑑於提問具有引導學生進行高層次思考的功能，Mason（2000）提出數學提問包括探索式（inquiring）提問、聚焦式（focusing）提問、檢驗式（testing）提問等三種類型。探索式提問提供學生一個思考方向，由學生自己去發現新的知識，目的在於幫助學生理解教學內容，刺激學生思考。而此探索式提問的功能，與 Ainley（1987）所提出的導引式（directing）提問有相同之功能。在教學過程中，教師需要提醒學生注意數學的規律性（pattern）、一般性（generality）、特徵（feature），則使用聚焦式提問。目的在讓學生注意教師要強調的議題或概念，與 Bauersfeld（1994）所提的漏斗式（funneling）提問具相同功能。然而，當教師欲瞭解學生對數學概念的理解狀況時，若學生只是回應答案而未說明理由，則會使用檢驗式提問以檢視學生是否真正理解。Robinson 與 Bartlett（1995）認為，這種提問方式伴隨著教學，能讓教師隨時偵測學生對所教數學概念的理解。然而，師生互動時，教師要使用什麼類型的提問？其實，並沒有特定答案。教師通常須由教學的目標以及學生的反應來做適度的修正與調整。因此，提問類型的差異，並無法從問題本身而得知，它通常從學生的反應來做決定。本文，即希望在對15位個案學生完成提問教學引導後，分析過程中所使用之提問方法，進而建構一個提問方法模型。

三、數學理解的意義與評鑑方法

近年來，有許多關於數學理解的研究（Pirie & Kieren, 1992）。Skemp（1971）綜合 Mellin-Olsen, Backhouse, Byers, Herscovics 與 Buxton 的說法，歸結出三類數學理解型式：1.工具性理解（instrumental understanding）；2.關聯性理解（relational understanding）；3.邏輯性理解（logical understanding）。從 Skemp（1971）的觀點來看，邏輯性理解在本質上與關聯性理解並無太大差異。因此，嚴格來說，數學理解可分為工具性理解與關聯性理解兩類。工具性理解之下，認知個體所產生的知識，是片段而沒有連結的。這與 Anderson 與 Bower（1973）所提人類聯結記憶（Human Associate Memory [HAM]）模式中，只具節點（nodes）而未具關係的連線，不具完整知識網絡的觀點一致。而關聯性理解與邏輯性理解下的認知個體，所產生的知識，則兼具節點與連線的完整知識網絡，各個概念間有一套完整而有結構的關係。這符應 Davis（1984）, Putnam, Lampert 與 Peterson（1990）所述，數學理解是獲得一套強而有力的符號或系統，以表徵數學概念，並且能以多重表徵來代表某概念，並能在不同形式的表徵系統間轉換。

而 Pirie 與 Kieren（1992）基於建構主義觀點，認為理解是學習者建構（building）與重構（re-organization）知識創造的本質。而

其發展的數學理解理論則是在一個動態（dynamic)、有層次但非線性（leveled but nonlinear）及可折迴（recursive）過程的架構下，所看見理解成長發生的理論。Pirie 與 Kieren（1992）將數學理解定義成一個動態、階段性、非線性、可折回的過程，並且是一個組織知識結構的過程。數學理解的成長是發生在個體與其他人（如老師或同學互動情境）的內在與外在互動（Pirie & Kieren, 1989）而產生。在 Pirie 與 Kieren（1992）所提的「數學理解成長模型」中，共有八個理解層次（圖2），其內涵如表1所示。

在此模式中，任意理解的層次包含其內部的層次，並被外部層次所包含。他們視理解成長為藉由「折回–前進（back-and-forth）」形式，在層次間移動。因此，理解是個動態的歷程。當學生在任何一個理解層次中，面對新問題無法立刻解決時，他會折回至內部的層次活動，以便擴充個人對此主題不充分

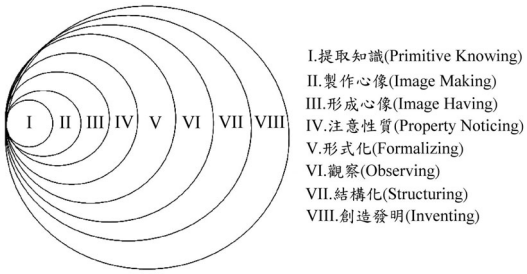


圖 2：數學理解成長模型圖（Pirie & Kieren, 1992, p. 246）

表 1：數學理解層次內涵說明

層次	名稱	內涵
I	提取知識（Primitive Knowing）	原始（primitive）並非意指低層次的數學，而是開始的地方。即是一個觀察者（通常是老師）在給予一個新作業時，假定學習者「在他頭腦中」已存有的知識，即先備知識。
II	製造心像（Image Making）	學習者透過特定的作業或活動，產生關於主題概念的想法。「製造心像」是理解的開始，必須與學習者以前擁有的能力有所不同，甚至是超越。
III	形成心像（Image Having）	學習者具備一個與數學概念有關的心像或心物（mental object）。並能看見所經驗的所有例子的規律（pattern）且能明確清楚地說出來。
IV	注意性質（Property Noticing）	在形成心像後，學習者開始檢視這些心像的區別（distinction）、組成（combination）或聯結（connection），而且能將這個關係明確地記錄下來。
V	形式化（Formalizing）	學習者能對層次 IV 所注意到的性質作有意識的思考，抽取出共通性。並且，個體能夠察覺到像類別般的心理物件（a class-like mental object），也就是學習者經能依據他在層次 IV 所注意到的性質，將其心理的物件歸類（class-like），形成群集。
VI	觀察（Observing）	學習者能觀察個人形式化的過程與組織的這些觀察的項目，也會和先前所注意到的性質、先前心像的特徵去做比較。
VII	結構化（Structuring）	學習者能夠以邏輯結構的順序解釋個人形式化的觀察。這意味著學習者能察覺到自己的假設及觀察的結果，且符合邏輯地建立它們之間的相互關係；而且個體能在一個公理的結構中安置自己的想法，並使用形式化的證明。
VIII	創造發明（Inventing）	學習者具備充足的結構化知識，從所有先備概念中離開而帶來完整的理解與生成完整的問題致生成新的概念。

（資料來源：整理自吳淑琳，2001，pp. 15-16；Pirie & Kieren, 1992, p 246）

理解的內容。這種回到內部層次活動，在理解的意義、內涵上，與早期在同一層次內對相同主題的理解並不同。這個折回內層的理解將因外層理解介入而精緻化。因此，要擴展學習者對某主題或概念的理解，不只是在一個固定層次行動，或由裡面的層次擴展到外面層次的理解，而應包括藉由折回至內部層次重構知識，因而拓展對外部層次的理解。

那麼，折回如何發生？Pirie 與 Kieren（1992）提出三種介入（intervention）型態：確認介入（validating）、推前介入（provocative）與拉回介入（invocative）。從教師觀點來思考，確認介入是讓教師知道學習者為何如此思考。推前介入是嘗試拓展學生的理解層次至新的情境（cases）或外部層次。拉回介入是對學習者的理解提出障礙而促使學習者回到內部層次的活動，甚至回到製造心像的層次。這些介入類型將作為本文提問引導教學的參考。

然而，如何落實 Pirie 與 Kieren（1992）所提的數學理解層次到本研究？則須操作性定義或舉隅。以下，茲針對各層次進行舉例說明（見表2）。

本文將依此數學理解模型對學生進行代數文字符號語意理解分析。

參、研究歷程與分析

一、研究架構

本研究由從參與「文字符號語意測驗」的76位學生中挑選15位高、中、低層次學生，在一系列問題的情境脈絡、提問引導教學下，運用 Pirie 與 Kieren（1992）的「數學理解成長模型」為分析工具，剖析這15位學生對代數式中文字符號語意之動態理解改變歷程，期能從中梳理促進不同層次學生對代數式中文字符號語意理解之提問方法，進而建構教師提問引導教學的提問方法模型（本文架構見圖3灰色底部分）。

二、研究方法

本文屬個案研究。涉及的方法為晤談法。過程中，研究者針對每位學生對文字符號語意理解的表現安排一系列問題進行提問引導教學。教學過程中不斷以提問的方式，讓學生能理解代數式中文字符號的相關概念。

三、研究工具

本文涉及之工具，包括提問引導教學的一系列問題，以及分析學生理解改變之數學理解成長模型。

(一)提問引導教學的一系列問題

首先依文字符號「語意/情境」架構形成一系列問題（附錄一）。依個案學生位處的文字符號語意認知類別，以一系列問題引導，探究他們對文字符號的語意理解改變。而引導的順序為「1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4」。舉例來說，若個案學生對文字符號的語意認知類別在「將文字符號代表特定數」較為穩固，對其他類別的理解較不穩固，則依2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4的順序進行提問引導。

解題時，研究者會根據學生的解題行為表現進行提問。而提問目的在於協助學生1.了解題意；2.澄清該代數式中文字符號的語意角色；3.釐清文字符號的運算規則；4.確認解題方法的正確性；5.了解題意並進行列式。

(二)數學理解模型

基於數學概念理解是一個動態而遞迴歷程的理念，與 Pirie 與 Kieren（1992）的目的

表 2：數學理解層次操作性概念舉隅

層次	名稱	操作性概念舉隅	
		學生回應	研究者分析
I	提取知識（Primitive Knowing）	某校新生編班，若每班編 38 人將多出 26 人，若每班編 42 人則不夠 14 人，問新生多少人，先設新生有 x 人…….這一題想不出來。	在他既存的先備知識中，無法解決此問題情境。
II	製造心像（Image Making）	那就假設 38x+26	在研究者引導思考後，學生能理解例子中各個已知數量與未知數量間的關係，並產生關於如何假設未知數量的想法。
III	形成心像（Image Having）	學生總人數是不是就等於 38x+26？這個就可以表現出學生的總人數，那第二種分法也如此寫上去。	此時，學生已能從研究者與他共同討論的經驗中看見如何假設未知數量的規則，並明確地說出來。
IV	注意性質（Property Noticing）	都代表新生的總人數	學生在已能檢視題目中已知數量與未知數量間的區別，並明確的指認文字符號所代表的意義。
V	形式化（Formalizing）	用 x 未知數，去表達一個量跟未知數表達另外一個量，用相等的情況去解出我要的答案。	分析：學生能對先前的兩個問題作進一步的思考，找出它們之間都是運用同一未知數量不同的表徵方式而進行解題的共通性。
VI	觀察（Observing）	應該是先假設班級數的量，因為它就是整數。	學生能對他先前所經驗的兩種解題方式進行比較其難易性。
VII	結構化（Structuring）	方程式最重要的是等號的左邊跟右邊，一定代表某二個相同的量。左邊如果是學生總人數；右邊也一定是學生總人數，如果左邊是班級數；右邊也一定是班級數。	此時，學生已能較有系統地去表徵例子中未知數量的關係，並予以表徵。他已對此類型的例子有一套自己的想法，並以形式化的方式進行思考與表徵。
VIII	創造發明（Inventing）	--	--

註：「--」表本研究中個案學生的表現幾乎難以達到，故未提出舉例提供參考。

相同。因此，本文採「數學理解模型」作為探討學生對代數式中文字符號語意理解改變的工具（內涵已於文獻中說明）。而本文將「從低層次移至高層次」稱為「進階理解」；「從高層次移至低層次」稱為「降階理解」。

四、研究參與者

參與本研究的學生是由台南縣市國中各一個班級參與「文字符號語意測驗」的76位學生群中，從得分較高的前27% 學生中挑選4位（H1, H2, H3, H4）；得分較低的後27% 學生中挑選4位（L1, L2, L3, L4）；其餘的46% 學生中挑選7位（M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7）共15位，作為個案學生。15位學生提問引導教學前的狀態與研究所施行的問題如表3所示。藉此，研究者期望從這15位學生的

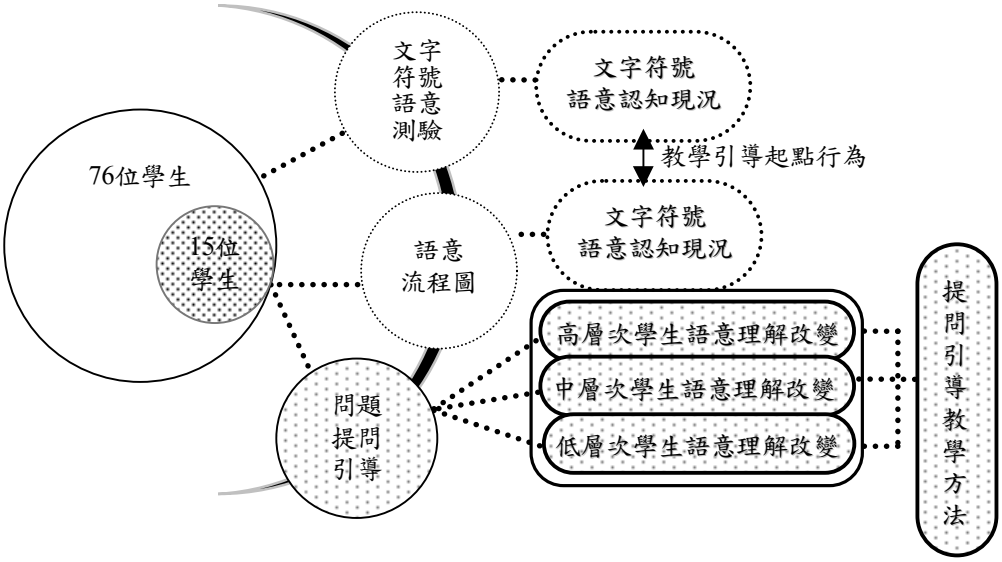


圖 3：研究架構圖

解題過程中，釐清促進他們「進階理解」與「降階理解」的提問方法，進而提煉出促進學生對文字符號語意理解改變的提問方法模型。

此外，研究者（R1）邀請協同研究者（R2）進行資料分析、比對。R2為數學教育碩士，具有十一年中學數學教學經驗。資料分析期間，他不斷提出教學上的經驗提供 R1與他判斷學生概念理解的參考，顯示積極的態度。

五、資料處理與分析

本文資料分析分為原案分析與進階分析。原案分析是依據原始語料進行檢視獲致的結果；而進階分析則是依據原案分析結果繼續整理所得之訊息。

(一)原案分析

本文以錄音帶轉錄之語料為材料，根據 Pirie 與 Kieren（1992）的理解內涵，以內容分析法（Content Analysis）將學生的解題行為、理解情形做分析。首先，依語料順序繪製語意理解改變圖。繪製順序舉例如下（以H1為例）：

1.區分學生對代數式中文字符號的理解層次

首先，R1將語料放置於「說話者」與「談話內容」二欄；其次，再與 R2一同將對話內容分段；再分別對每一段語料進行「特色描述」與「理解層次判定」（詳見表4）。當 R1與 R2各自完成對個案學生語意理解改變層次的判定後，隨即進行評分者信度統計。接續，R1與 R2再進行比對與討論。當兩人達成共識後，即為本文結果。

2.繪製學生對代數式中文字符號語意理解改變圖

透過語意理解改變圖的繪製，能使讀者利用圖形表徵，看出學生對文字符號理解改變之動態歷程。在確認上一步驟的理解層次區分後，研究者對照層次區分的結果，將學生的概念理解發展標示於 Pirie 與 Kieren（1992）的數學理解模型中。在圖中，箭號指示學生的思維流動方向，實線箭號表示「進階理解」；虛線則表示「降階理解」，讓概念理解的改變更具象（圖4為 H1在問題2-1中的語意理解改變圖）。

表 3：本研究個案學生所處狀態與研究所佈的問題情境

學生	文字符號穩定類別	問題情境
H1	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
H2	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
H3	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
H4	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
M1	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
M2	*	1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
M3	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
M4	*	1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
M5	*	1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
M6	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
M7	文字符號代表特定數	2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
L1	*	1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
L2	*	1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
L3	*	1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4
L4	*	1-1→1-2→1-3→1-4→2-1→2-2→2-3→2-4→3-1→3-2→3-3→3-4

(二)進階分析

完成原案分析後，再依據結果做進一步比較與整理。此部份內容目的在於1.比較促進不同層次學生「進階理解」與「降階理解」提問方法的差異性；2.從提問方法中再做歸類形成提問方法，建立促進學生對代數式中文字符號語意理解改變之提問方法模型。分析步驟如下：

1.提問策略命名

研究者（R1、R2）閱讀原案分析時，會為每一個促進個案學生理解（進階、降階）改變時所介入的「提問策略」命名。茲舉例說明：

（H2：3-1：6）

H2：這一題應該是錯的。

晤談者：為什麼呢？你覺得這樣合理嗎？你能說說看理由嗎？

H2：它說一支3元的鉛筆買 x 枝，一支7元的的原子筆買一支，付500元。請問找回多少錢？一支3元的鉛筆買 x 枝，所以總共是3x。一枝7元的原子筆買一枝，就是加7。它們加起來就是3x+7。那它問付500元找回多少錢？所以是把剛剛算出來的那些數字先括號，前面再寫上500 – (3x + 7)＝500 – 3x – 7，那麼 493-3x 但是它題目說是7x+3，所以不符合。

當個案學生（H2）面對問題時，他會列出數學式子來表徵。研究者會提出「你認為這樣的表示合理嗎？」「你要再檢查一下嗎？」等提問，請他重新檢視式子的合理性。因此，便將它命名為「要求檢視」的提問策略。

2.繪製促進學生對代數式中文字符號語意理解改變的提問方法模型

當完成每位學生的「提問策略」分析後，再將同屬性的提問策略歸為一類，進而提煉為本文之提問方法，並繪製成「促進學生對代數式中文字符號語意理解改變

表 4：個案學生 H1 的語意理解改變次區分表（2-1：特定未知數）

段	說話者	談話內容	特色敘述	層次判定
1	晤談者	下面，我將問你關於分數的不同類型問題。你有問題就可以問，這不是考試！		
	H1	看得出答案，但是就不知道怎麼解釋		
	晤談者	那你就可以一個一個說。比如說你第一個小題說以下桃子有多少個，你可以把第一小題你怎麼寫，答案是多少，然後它最後的答案又是多少？不是 7x+3 你就可以去判斷，你怎麼判斷的？一個一個，你一定是第一個第二個第三個第四個去判斷。那如果你從第一小題開始判斷，你可以看它的答案是多少，它是不是等於 7x+3 然後你可以開始說明。		
	H1	從第一小題來看，一箱桃子分給 x 個學生，每個人分七個剩三個，請問桃子的個數？那麼假如要算出一箱桃子的話，必需先知道學生有多少個，學生是 x 個，每個人分七個，就是七乘以 x 然後剩三個，加上剩下的三個，7x+3 就是等於一箱桃子的個數。	H1 具備部分-整體的概念的心像並能看見所經驗的例子的規律且能明確清楚地說出來。	形成心像（III）
2	晤談者	你想想看喔，在這個題目裡面，你覺得 x 怎麼變化，代什麼值進去。它可以代什麼值？		
	H1	什麼意思啊？		
	晤談者	就是說這個式子中的 x，可能有什麼答案。		
	H1	嗯….不知道。	H1 並未思考文字符號語意角色	提取知識（I）

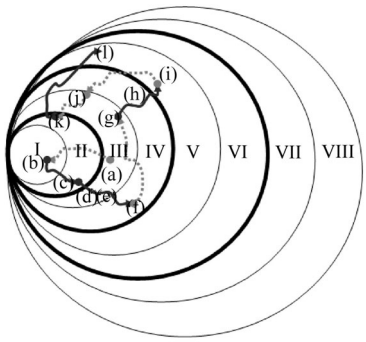


圖 4：個案學生（H1）在問題 2-1 晤談中對代數式文字符號的理解改變圖

的提問方法模型」。

六、研究的信度

本研究結果包括透過對個案學生文字符號語意理解路徑分析，獲得促進不同層次學生對文字符號語意「進階理解」與「降階理解」提問方法差異性比較以及提問方法模型之建立。所涉信度考驗說明如下：

(一)理解層次的信度考驗：評分者信度

透過學生對語意理解層次改變的分析，可以獲得學生「進階理解」與「降階理解」的轉折次數，進而釐清提問策略。而在理解層次判定部分，本研究以評分者信度進行考驗。即是兩位分析者（R1、R2）對相同語料內容進行判讀，所得結果在「語意理解層次」判定的相似度。

首先，R1與 R2共同研讀 Pirie 與 Kieren（1992）「數學理解成長模型」各層次的內涵；其次，再共同為每位學生其解題歷程的語料進行分段；接續，分別為每一個段落進行「理解層次」判定。若 R1對學生某題的「理解層次」判定數為 Y1，而 R2的判定數為 Y2，兩人所呈現相同的判定數為 Y3，則「語意

理解層次」判定的相似度＝2Y3/(Y1 + Y2)。舉例來說，R1對 H1在問題2-1的解題表現做了12個理解層次的判定，而 R2做了10個理解層次的判定，我們相同的理解層次判定數為10。因此，我們的「語意理解層次」判定相似度＝2 × 10/(12 + 10)＝0.91。而本文在每道問題的「語意理解層次」判定相似度介於0.81~0.93。

(二)語意理解改變的差異性與提問方法模型信度考驗：分析者三角校正

針對促進不同層次學生語意理解改變的提問方法差異性比較與提問方法模型建立的分析，以分析者三角校正作為信度考驗。當R1完成分析後，隨即交由 R2重新審視，以判斷研究者論述與主張的合理性。若有意見相左之處，R1即與 R2進一步針對論點相左之處進行溝通、磋商，以達意見一致。

肆、研究發現

本段首先描述促進學生對文字符號「進階理解」與「降階理解」的提問方法以及學生反應；接著，進一步將提問策略分類、提煉為提問方法，進而建構促進學生對文字符號語意理解的提問方法模型。

一、促進不同層次學生對文字符號語意理解改變的提問策略與學生反應分析

本段，先介紹 R1促進不同層次學生「進階理解」與「降階理解」所使用的提問策略與學生反應；其次，再綜合分析這些提問策略的異同性。

表5是各層次學生在「進階理解」與「降階理解」中「研究者提問策略」、「學生反應策略」的整理。這些「提問方法」與「反應策略」部分，如果該層次學生其中有任一人發生，皆納入計算。

以下，先從促進「進階理解」與「降階理解」的提問策略與學生反應進行說明；其次，再針對各層次學生所使用之提問策略進行分析：

(一)促進「進階理解」的提問策略[1]與學生反應

1.「是非型」的提問與學生反應

研究者提出「此題是不是可以代…某些數值？」問題時，目的在提供學生從多次判斷經驗中建構不同問題情境中文字符號的不同語意角色。而藉由這些練習，學生逐漸建構「文字符號在不同情境中扮演不同角色」的想法。舉問題2-1的解題為例，H2將四個子問題一一列出式子後，選出正確的選項。接續，研究者問他：「我問你喔！你知道一箱等於7x+3對不對？那 x 可能代什麼值？它有沒有可能代1，x 代1？」，他回答：「有可能！」。研究者繼續問：「可不可能代2？」，他回答：「也有可能」。接著，研究者問：「可不可能代-1？」，他回答：「不可能」。因此，研究者依循提問的思維，引導 H2思考此題文字符號的語意角色：

> 我們發現到 x 是不可能代負數的，它有可能代什麼？有可能是整數裡面的正整數，那它也不可能代分數，所以這個答案，有可能是無限多個還是有限多個？

H2回答：

[1]表中促進學生「進階理解」的策略：「詢問題意」乃指研究者請個案學生針對題目之文意進行說明；「詢問運算技巧」乃指研究者請學生解釋如此計算（例如：為什麼 $x(y + z)=xy + z$？）的理由；「以特定數值讓學生確認」乃指研究者詢問某個數值是不是該問題解的引導。由於此三種方法較為淺顯，故不在文中闡述。

表 5：促進不同層次學生對代數式中文字符號理解改變的提問策略分析

理解類型		研究者提問策略	學生反應策略	高層次	中層次	低層次
進階理解	1	詢問題意	傾聽			∨(4/4)
	2	詢問運算技巧	傾聽			∨(4/4)
	3	以特定數值讓學生確認	直觀判斷	∨(1/4)	∨(7/7)	∨(4/4)
	4	是非型	直觀判斷	∨(4/4)	∨(7/7)	∨(4/4)
			–			∨(1/4)
	5	選擇型	直觀判斷	∨(4/4)	∨(4/7)	∨(4/4)
			逐步推理	∨(1/4)	∨(4/7)	
	6	確認型	直觀判斷		∨(3/7)	∨(4/4)
			逐步推理	∨(1/4)	∨(4/7)	
			敘說陳述	∨(2/4)	∨(4/7)	
			刪去法	∨(1/4)	∨(1/7)	
			–			∨(1/4)
	7	逐步引導型	直觀判斷	∨(1/4)	∨(2/7)	∨(4/4)
			逐步推理	∨(3/4)	∨(4/7)	
			–	∨(1/4)	∨(2/7)	∨(1/4)
	8	要求說明理由	敘說陳述	∨(4/4)	∨(5/7)	∨(4/4)
			–		∨(2/7)	∨(1/4)
	9	協助轉譯表徵	逐步推理	∨(4/4)	∨(3/7)	
			依指示書寫			∨(4/4)
			–		∨(4/7)	∨(2/4)
降階理解	1	詢問可能數值	直觀判斷	∨(1/4)	∨(1/7)	∨(4/4)
			逐步推理		∨(3/7)	
			刪去法	∨(1/4)	∨(1/7)	
			猜測			∨(1/4)
			–	∨(3/4)	∨(3/7)	∨(4/4)
	2	提供新情境	逐步推理	∨(1/4)		
			–	∨(3/4)	∨(7/7)	∨(4/4)
	3	逐步引導	逐步推理	∨(1/4)		
	4	要求檢視	逐項檢視	∨(2/4)	∨(2/7)	
			敘說陳述	∨(1/4)	∨(3/7)	∨(1/4)
			直觀判斷	∨(1/4)	∨(3/7)	∨(4/4)
			–		∨(2/7)	∨(1/4)
	5	回憶經驗	敘說陳述	∨(3/4)	∨(5/7)	∨(2/4)
			–		∨(2/7)	∨(3/4)
	6	數學算式的運算	–			∨(4/4)

＊註：上表（＊/＊＊）表示（發生此情形的個案學生數/該群組中學生總數）

無限多個！因為一箱桃子的數量你跟本不可能知道有幾個，學生的數量也不確定，這兩個值可以隨便你代。

他在「是或不是」的提問引導下，逐漸建構文字符號的語意角色。

而 M2也選出正確的答案。研究者同樣

問他：「在第1個選項裡，x 可不可以代1？」，他回答：「嗯，可以。」。接著，研究者問：「那 x 可以代2？」、「可以代3？」…，目的讓 M2 理解本問題情境中文字符號代表的語意角色。而 M2都直覺地回答：「可以！」，以「直觀判斷」方式回應。相同地，L1也在研究者「x 可不可以代1？」、「可以代2？」、「可以代3？」引導下，回答「嗯…可以！因為可以代進去。」，以「直觀判斷」的方式回應。

面對「是非型」提問，三層次學生均使用「直觀判斷」的策略回應。「因為你問我某個數是不是題目的答案時，我只要直接代入就知道啦。（1102H3001）」，可見，此提問策略能讓學生釐清文字符號在問題中的語意角色。

2.「選擇型」的提問與學生反應

研究者也用提供選項的方式讓學生從選擇答案的過程中建構對該題文字符號語意角色的理解。舉 H3在問題2-1的解題為例，研究者問他：「這個 x 是等於無限多個數，還是有限的？」，他回答：「有限的正整數！」。研究者繼續提問：「為什麼？」，目的在了解 H3是否真正理解其意義。H3回答：「因為人沒有辦法活無限多歲！」，可見 H3以生活經驗「逐步推理[2]」文字符號的語意角色。而研究者也針對本題作綜合提示：

> 雖然它 x 能代表很多的正整數進去，但它的題目的情境裡面，它代表是一個年齡，而我們的事實上，年齡是有一個限度，它不會是無限量的一直大，所以這題，做起來，雖然父親的 x 也是7x+3，但這個 x 卻只能代有限的，不是像這個題目是無限的。

同樣地，研究者亦對中、低層次學生提問：「第3小題中，x 是代表無限多個數，還是有限多個數？」，以 L3為例，他回答：「無限多！」，以直觀的方式回應。但是，M6便回答：「無限多！…等一下！他只有500元…所以應該有限制！所以…應該是有限多個數。」。

面對「選擇型」的提問，三層次的學生都使用「直觀判斷[3]」的策略回應，「因為我就直接判斷哪一個答案最有可能就回答啦。（1102L3017）」。而中、高層次學生會以「逐步推理」策略，檢視每個答案的合理性，再回答問題，「因為一個一個去看，才能確定哪一個才是答案。（1113M2022）」可見，較高層次學生使用的問題解決策略較縝密。

3.「確認型」的提問與學生反應

有時，研究者會提出「這是答案嗎？…為什麼？」的提問，目的在提供學生再一次思考、檢驗答案，並偵測支持他所持答案的理由。以 H2在問題2-2解題為例，研究者問他：「這個題目最主要是 x 跟 y 你覺得它代表的是什麼？是有限的數？還是無限的數？」，他回答：「有限的正整數！」。研究者繼續追問：「為什麼？」，他回答：

> 照常理判斷的話，是有限的，它等於正整數，假如我們照一般去想嘛，漢堡一個不可能賣幾分之幾，雞塊也是一樣，然後它也不可能等於負數，假如你去買個漢堡，它還要貼給你錢，這樣也不可能。而且它說，應找回多少錢，那就是有找嘛。所以就是說4x+9y 會小於500。

可見，H2使用「逐步推理」的回應策略：

[2]本研究所指「逐步推理」為學生透過「臆測→驗證」過程決定答案的行為。

[3]Van Hiele（1986）指出「直觀」是「以直接觀察為基礎所得到的結論，是以視覺結構為基礎而無推理思考介入的結構延伸（the continuation of a structure）」。本研究界定「直觀判斷」為學生運用他的直覺未經計算、推理等再次確認而回應的表現。

> 因為老師的提醒，會讓我再去想一下到底答案對不對。這樣會讓我以後做完題目後，再重新檢查答案（1102H2044）。

而以 H3同樣在問題2-2的解題來看，他以「敘說陳述[4]」的回應策略回答：

> 那麼，漢堡一個2x 元嘛，那買2個漢堡就是2x 乘2，再加上雞塊一個3y 元，買三個就是3y 乘3，之後要把它括號起來化簡，變成500 – (4x + 9y)＝500 – 4x – 9y 這就是答案。…因為老師用疑問的方式問我，會讓我懷疑我的答案到底對不對。所以，我會再從題目、算式一步一步的檢查，然後試著說服我自己這樣是不是合理（1109H3015）。

面對相同在問題2-2「你確定這是答案嗎？」、「為什麼？」的提問，M2則回答：「我直覺是這樣。2x 代表漢堡的錢，3y 代表雞塊的錢，所以答案就是500-2x-3y」。而 L1則回應：「我不知道耶！我用猜的」。可見，M2與 L1運用了直觀判斷的方式回應。

4.「逐步引導型」的提問與學生反應

有許多問題，使學生無法思考出解題路徑而感到束手無策。因此，個案學生會直覺地說「不知道」、「不會解」。以 H3在問題2-3的解題為例，H3讀題完畢後，即回答：「這一題想不出來！」，因此，研究者將此題的「問題空間」切割成數個步驟進行提問引導。研究者提問：「在這個題目當中，編班的方式有幾種？」，他回答：「有5種。」，研究者繼續追問：「編班的方式有5種？怎麼說？」，H3回答：

> 它說每班編38人，然後第2項又說每班假如編42人，那麼它也可以編成38人、39人、40人、41人、42人。

為了釐清 H3的想法，研究者依序引導：

> 這個題目有告訴我們39人、40人、41人、42人的編班方式？它有說這樣的編班會剩下或不足多少人？…在這題目裡面，只告訴我們每班編38人，最後會剩下26人；每班編42個人，便會不足14個人。它怎麼編班的，一班有幾個人，最後的結果都告訴你了。…可是呢？39、40、41或許它可以這麼編，但是它最後會剩下還是不足多少人都沒有告訴你！所以如果用39人去編班，你也沒辦法去思考最後的結果。40人、41人都一樣！

研究者逐步引導 H3從「瞭解題意」至「擬出策略」進而「進行解題」。上述這種「逐步推理」的回應策略，多發生於中、高層次的學生。此外，三個層次學生在此類型的提問策略下，也都曾使用「直觀判斷」的回應方式：

> 為什麼我會用直覺去判斷？是因為我就用直覺去想，它可能的答案是多少。可是，好像答案錯的比較多（1109L2008）。

而高層次學生則認為：

> 我覺得老師一步一步的引導我去思考，會讓我知道原來題目的解法，我以後遇到類似問題的時候，就會依照這種方式去想，一步一步的推，對我的幫助很大（1109H3036）。

[4]本研究所指「敘說陳述」為學生能順暢地將題意轉化成數學式表徵，並透過運算順利地解題獲得答案。它相較於「逐步推理」來說更為精熟。

5.「要求說明理由」的提問與學生反應

當學生將問題轉化為數學式時，研究者會提問：「你怎麼想到這樣寫？」，以確認他是否真正理解所列式子的意義。以 H3在問題3-1解題為例，H3完成列式後，研究者問：「你怎麼想到這樣子寫，你是從這個數字的關係找到這個答案，還是你就直接去思考？」，H3回答：

> 我是用例題來想，它說有一個三位數少寫一個6的話會得到 y，那麼我就想說，既然是 y，那 y 乘以10倍加6的話，那麼一定會等於三位數 x。

同樣的提問，M6則說：

> 我先隨便用一個三位數去想。比如說，256少寫一個6會得到25，那麼25乘以10再加上6就會得到256。用這樣去推就可以得到答案了。

至於 L2則說：「我是找一個數字，代進去看哪一個才是答案」。三個層次的學生，都曾使用「敘說陳述」的方式將他列此式的理由加以說明。

> 因為你問我為什麼要這樣列式，所以會幫助我去回想當時的想法。我就會再重新去思考，一步一步的把想法講出來（1109H3047）。

可見，教師若能在教學過程中適時地要求學生說明理由，能有效地促進學生進行思考。

6.「協助轉譯表徵」的提問與學生反應

有時，個案學生無法直接將問題中的文字敘述表徵成數學式。研究者會逐步將每一句話語（如 x 是 z 的1.5倍）引導學生去表徵（x＝1.5z）。以 H3在問題3-2解題為例，H3遇此問題時，無法列出數學式。因此，研究者提出：

> 那我們來想一個問題：我是你的幾倍？6是5的幾倍，要怎麼算？如果我們要用比的觀念？你會用什麼算式來寫？

H3回答：「6除以5」，研究者繼續引導：

> 6除以5對不對，6是3的幾倍，是不是6除以3就可以知道倍數了對不對？那今天你看喔，x 是 z 的1.5倍，x 會等於1.5z，y 是 z 的1.2倍，y 等於1.2z 那今天它問你說，x 是 y 的幾倍的時候？你會用 x 去除以 y，還是 y 去除以 x？6是3的幾倍，你是用6除以3還是3除以6？

H3回答：「6除以3。所以說，x 是 y 的幾倍的時候，就是用 x 去除以 y，就得到倍數了！」，H3繼續說：

> 所以，x 是1.5z，y 是1.2z，那把 x 去除以 y，z 消掉，就可以算出15除以12就可以化簡，就可以得到答案。

在研究者協助 H3理解題意並表徵數學式後，H3接著自行進行運算，完成解題。相同問題，中層次學生也在研究者逐步引導下，以「逐步推理」的方式將問題轉譯成數學式，並進行運算。

> 我覺得數學有一個很難的地方，就是有時我不會把問題的意思列成計算式。當老師從題目的意思一個字一個字解釋給我聽，再引導我去列式的時候，我會比較知道列式的訣竅，也學

到這種技巧（1109H3055）…這樣會幫助我以後解題（1109H3057）。

而低層次的學生，以 L1為例，則在研究者逐步引導，並指示列式下，完成解題。「老師解釋完後，我還是不太會列式子，所以還要老師指導我要怎麼寫才會。（1109L1082）」。

綜合對各層次學生提問引導教學的經驗，本研究的提問引導教學脈絡逐漸形成。初始，研究者會要求學生「讀題」，若學生能「瞭解題意」並「擬定計畫」，則給予時間進行解題工作。對於學生所列的數學式，研究者都請學生「陳述列該數學式的理由及思考方式」，以確認他真正理解其意涵。

然而，當學生無法解題時，研究者會「將解題程序切割，逐步引導」，在過程中，「以特定數值讓學生確認是否可能為文字符號的值」或「讓學生以『是』與『不是』確認文字符號語意角色」，逐步建立他對文字符號在每個情境中語意角色的概念。當學生已會使用「是」或「不是」的方式判斷，研究者會繼續「讓學生以『選擇』的方式確認文字符號語意角色，並詢問理由」，目的在於建構學生對文字符號在不同情境中的語意角色理解。再者，當研究者逐步引導學生解題過程中，會「協助學生將文字敘述轉譯成數學式的表徵」，並讓「學生再一次確認，並說明理由」。接著，再進行文字符號的運算。但有時卻又發生個案學生（例如：L1）不會將「$(a+b)^2$」乘開，甚至會將「$a \times (b-c)$化成$ab-c$」（例如：L1，L2，L3，L4）。研究者便以「$(a+b) \times (a+b)$」逐步引導，促進個案學生對文字符號的運算規則的熟悉。最後，當完成「解題」並理解「文字符號在問題情境中的語意角色」後，則結束該題的提問引導教學。這些促進學生建立以前未建構的相關知識或解題技巧，即所謂「進階理解」。

(二)促進「降階理解」的提問策略與學生反應

1.「詢問可能數值」的提問

在引導學生解題時，研究者會提問「你覺得在這個題目中，x 可能是哪些答案？正整數？負整數？整數？分數？…」。而個案學生的反應也不盡相同。以 H2在問題3-2的解題為例，研究者提問：「在這個題目裡面，x, y, z 有沒有可能是有限的答案，還是無限的？」，H2回答：「是無限個數的答案」，研究者繼續提問：「但是 z 有條件的限制，z 不可以是什麼數？」，H2則回答「z 不可為0」，最後，研究者綜合論述：

z 不可為0，不為0的其他數，都可以是它的答案，所以呢，你就會發現到說，在這個題目裡面 xyz 代表無限多個可能。

可見，H2在研究者引導下，使用「直觀判斷」的策略回應提問，「因為老師你問的問題如果沒有很複雜的時候，我就會憑我的直覺去回答。（1102H2057）」。

面對相同的問題，H3則回答：「它有可能是整數、分數、小數…嗯，但 z 不可以為0！因為 z 是分母，所以 x，y，z 是無限的答案」，他使用「刪去法[5]」進行判斷：

我心中一開始會想到幾個可能的答案，然後在心裡面一個一個去試，看答案對不對，將不對的刪除，最後就會得到答案了。（1109H3061）

然而，也有部分學生（例如 L2）使用

[5]本研究所指「刪去法」為學生心中已有一些可能性的答案，經由逐一檢視，最後確認答案過程中的行為表現。

「猜測[6]」的回應策略，「遇到不會的問題，我以前的習慣就會亂猜（1116L2027）」，「我亂猜當然是沒有什麼原因，就是隨便找答案而已（1116L2029）」。但大多是不完整或失敗的答案。

2.「提供新情境」的提問

當個案學生面對新問題情境時，舊有已建立對文字符號的概念與解題技巧似乎無法完全遷移至新的情境中。因此，造成他對文字符號理解層次的降低。但是，理解層次的降低，並非意謂學生對文字符號理解能力喪失。反而他會將其所學的技巧重新拿出來使用，逐步精緻化他對文字符號的認識與問題解決技巧的成熟度。

3.「要求檢視」的提問

為了釐清學生是否真的理解數學式的意義，以及所列式子是否合理，研究者會提問「你認為這樣的表示合理嗎？你要再檢查一下嗎？」，請學生重新檢視他所列的式子，找出哪裡有問題，並說明理由。以問題2-3為例，M2在列完式子後（詳見圖5），研究者要求他檢視式子的合理性，他以「不知道」回應：

> 因為我只是將我知道的寫下來，要我找出哪裡有問題，我就一直檢查不出來，所以就說不知道了。（1116M2039）

而 M7則在研究者提示後，找到其列式的不合理之處並以「敘說陳述」的策略回應：

> 我會一步一步再讀一次我列的式子，是不是有計算錯誤？還是不合理？然後去找到錯誤的地方。（1116M7029）

[6]本研究所指「猜測」為學生心中並無任何關於解題的想法，只是隨意提出一個答案，無法說出為何選擇此答案的理由。

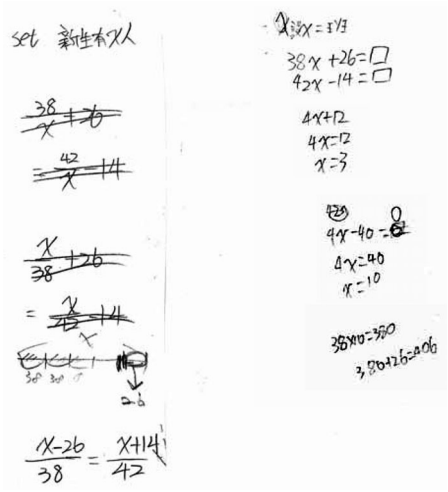


圖 5：問題 2-3 個案學生的表徵

再以問題2-1為例，H2在研究者「為什麼這題是錯的呢？你能說說看理由嗎？」的提問下，使用「逐項檢視」回應策略：

> 它說一支3元的鉛筆買 x 枝，一支7元的的原子筆買一支，付500元。請問找回多少錢？一支3元的鉛筆買 x 枝，所以總共是3x。一枝7元的原子筆買一枝，就是加7。它們加起來就是3x+7。那它問付500元找回多少錢？所以是把剛剛算出來的那些數字先括號，前面再寫上500 – (3x + 7)＝500 – 3x – 7，那麼493–3x 但是它題目說是7x+3，所以不符合。

H2面對此提問時，「我會去檢查我列的式子，一項一項的看是不是有問題，然後找到錯誤的地方。（1102H2068）」。H3則使用「直觀判斷」的策略：

> 它說一支3元的鉛筆買 x 枝，一支7元的原子筆買一支，付500元。所以很明顯一定會出現3x 的項，不會有7x 的項，所以是錯的。…因為問題很容易能看

得出來，所以我一看就能回答。（1109H3029）

而 H4則使用「逐項檢視」策略：

它的答案是7x+3。這代表一枝7元的原子筆買 x 支，還有一支3元的鉛筆買1枝。這和題目一支3元的鉛筆買 x 枝，一支7元的原子筆買一支不一樣，所以是錯的。…我通常都會一項一項檢查，這樣比較能找到有問題的地方。（1116H4028）…當我找到錯誤後，以後就比較知道哪裡會犯錯，盡量去避免。（1116H4030）

可見，學生面對相同問題時，所使用的策略不一定相同。因此，讓學生在面對問題情境時提出自己的想法，能使學生學到同儕間不同的思考路徑。

4.「回憶經驗」的提問

當學生完成解題後，研究者會提問：「你認為在這道問題中文字符號所代表的值為何」，目的在讓學生統整過去與現在的經驗，瞭解文字符號在每一個情境中扮演的不同語意角色。以問題3-4為例，當研究者提問：「我問你喔，F 這個符號它有範圍限制，它是代表有限的數，還是無限的數？」，個案學生（例如 H4）則以「敘說陳述」的方式回應：

無限的數，因為它一定要大於或等於77，小於82.4，所以它在中間的數，都可以當做它的答案。

同樣地，中、低層次學生也都曾使用「敘說陳述」回應：

我會試著去說出理由回答老師你的問題，這樣也比較能讓我自己去想自己為什麼要這樣列式的理由。（1116H4058）

綜合來說，當學生具備某些關於文字符號的認識與問題解決技巧時，研究者會詢問「適合 x 的可能數值為何」，讓學生在沒有任何提示下，「提取」他已建立關於文字符號的語意角色認知。當他覺察自身所建構關於文字符號的認知不足以回答研究者的問題時，他會在研究者引導下，重新「精煉」原先已建立關於文字符號的概念。再者，研究者也會請學生「重新檢視他所列數學式子的合理性」，以偵測學生是否真的理解數學式的意義。最後，也提供學生「回憶過去已建立關於文字符號的語意角色」，以便與當下的問題情境相互比較，建立更完備的文字符號語意角色的認識。但是，和高、中層次學生不同的，是研究者有時必須向低層次學生說明「數學式的基本運算[7]」，以補他們在運算技巧的不足。

上述所提問的問題，通常都使得學生感覺到自身所建構關於文字符號的相關知識不完備，而導致「降階理解」，進而重構文字符號的相關知識。

綜合上述結果，茲提出以下發現：

1.不同問題情境提問引導思考能促進學生對文字符號語意角色的理解

個案學生在解題過程中，研究者都會提問關於該問題情境中，文字符號所扮演的語意角色，提供學生思考。例如：

嗯，那這裡的 x 所代的值是有限的，還是無限的，還是只有固定幾個值？這個題目最主要是 x 跟 y 你覺得它代

[7]本研究所指「數學式的基本運算」為代數文字符號運算之規則，由於意思淺顯，故不在文中提問方法中詳述。

表的是什麼？是有限的數？還是無限的數？

在此引導下，學生逐漸地理解文字符號在各問題情境中扮演不同的語意角色。過去，數學課室中老師花許多時間教學生如何解題，而學生所學到的只是關於文字符號的解題技巧。但是，對於文字符號在不同問題中的語意角色，便很少交待。這造成學生對「同樣是『x』的符號但它們的語意角色不同」的概念不清楚。因此，教師若能在解題後提供學生進行思考，相信可在教師引導思考的過程中逐漸強化對文字符號語意角色的理解。

2.問題情境的複雜度會影響學生「進階理解」與「降階理解」

在解題過程中，個案學生發生「進階理解」的次數比「降階理解」次數多。這象徵個案學生能透過提問引導建構先前知識結構中未曾擁有的知識內涵。此即是 Piaget 所說「基模的同化」；而「降階理解」也意謂個案學生能重回原先所擁有的知識，更加穩固原先的知識結構。然而，從分析中發現，情境的複雜度愈高（一個文字符號：2-1，2-3，3-1，3-3；二個文字符號：2-2，2-4，3-2，3-4），學生發生「進階理解」的次數愈高。這是因為較多學生在此情境中無法獨立進行思考與解題。此時，自然落入較低的理解層次。則教師的介入與引導就會愈多，「進階理解」自然就愈多。

因此，當學生位處較熟悉的問題情境中，教師應多提供學生反思的問題，讓學生產生「降階理解」，進而精煉、穩固原有的知識結構；而當學生不熟稔問題情境時，教師應以引導的介入方式，協助學生建構相關知識，進而達成「進階理解」。

當個案學生面對促成「進階理解」的提問時，他們採用(1)傾聽、(2)直觀判斷、(3)逐步推理、(4)敘說陳述、(5)刪去法、(6)沒有回應（或答「不會」）等回應策略。而這些個案學生中，文字符號認知較不佳[8]者（例如：M2，M4，M5，L1，L2，L3，L4），他們多使用「直觀判斷」與「敘說陳述」等以「個人經驗」為主的回應策略。而文字符號認知較佳者（例如：H1，H2，H3，H4，M1，M3，M6，M7），則使用「逐步推理」回應策略。

而面對促成「降階理解」的提問時，他們採用(1)直觀判斷、(2)逐步推理、(3)敘說陳述、(4)刪去法、(5)猜測或(6)沒有回應（或答「不會」）等回應策略。明顯地，中層次學生在研究者企圖強化他們已具有的知識時，表現出的反應，大多出現「沒有回應（或答「不會」）」的現象。且低層次學生也常在引導下才依指示完成列式的工作。此顯示他們對於文字符號相關的解題技巧或語意理解都不穩定。整體來說，低層次的學生在問題情境中，多在研究者的講解、說明下，逐漸建構文字符號的「語意理解改變」以及「問題解決技巧」。和前二個層次學生相較，低層次學生在文字符號的運算技巧上較不熟悉，而對於問題情境的解決策略或文字符號的語意理解也多憑直觀判斷或毫無策略。因此對文字符號理解的改變大部分是知識建構的「進階理解」。

(三)促進不同層次學生語意理解提問策略之比較分析

本研究對各層次學生實施提問引導教學過程中，基於「經驗」積累，提問策略形成了脈絡。因此，提問策略有其相同性。然而，對於中、低層次學生而言，研究者所架構適合高層次學生使用的提問方法或有不適應的

[8]在本研究中介定「文字符號認知較不佳」的學生是指該位學生落於「文字符號代表特定數」較不穩定者。

情況。因此，研究者便增加合適的提問策略以協助他們解題。以下，研究者以圖6表徵三個層次學生間，造成「進階理解」提問的異同性分析。

圖6顯示，研究者對高、中層次學生的提問，除部份逐步引導學生無法解決的問題情境外，其餘提問多以讓學生「理解文字符號在該情境中的語意角色」為主。然而，對低層次學生來說，除了像前二層次學生外，多了「題意講解」與「運算技巧說明」。

而結果顯示，促成學生「進階理解」提問中，以「是非型」提問最有效。其次，則為「選擇型」提問；以及「要求說明理由」提問。這顯示教師透過給予學生部分「提示」或「思考方向」的引導，更容易使學生產生理解改變。

圖7顯示，同時造成三個層次學生「降階理解」的提問策略，包括「詢問可能數值」提問、「提供新情境」提問、「要求檢視」提問以及「回憶經驗」提問等較屬「後設判斷」的提問。然而，對低層次學生來說，「文字符號相關運算技巧」也讓他們產生「降階理解」。

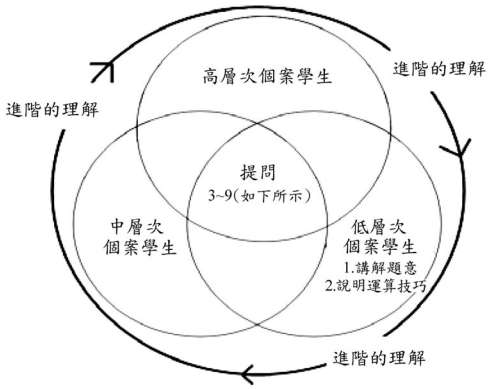
二、促進學生對文字符號語意理解改變的教學提問方法模型

本段，將基於前面的提問策略與學生反應策略分析，建構促進學生對代數式中文字符號語意理解改變的提問方法模型。此模型包括「提問方法：介入因子」以及「促進理解方向：進階理解、降階理解」等二個成分。以下，首先呈現促進學生對文字符號語意理解的「介入因子」分析；其次，根據這些「介入因子」所造成的「進階理解」與「降階理解」，建構促進學生對文字符號語意理解改變的提問方法模型。

(一)促進學生對文字符號語意理解的「介入因子」分析

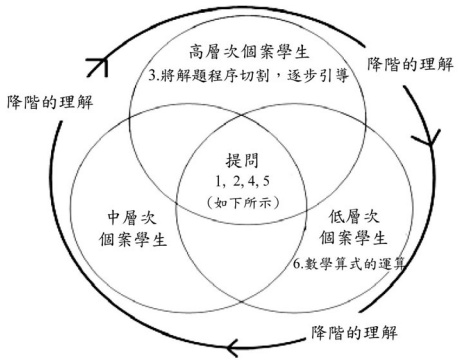
研究者針對語料，找到形成「進階理解」或「降階理解」時，研究者的提問方法，進而將語料依內容性質進行意義的歸類，再依該類別之特性給予標籤。此運作目的，在企圖找到促進學生對文字符號語意理解之「提問方法」，希望藉此建構促進學生對文字符號語意理解改變的模型。

經語料分類後，釐出促進「進階理解」的提問方法包括「正向提問」、「逐步引導」、「整合提問」、「反駁提問」、「整合詮釋」、「自我反思」、「類比詮釋」與「表層詮釋」等八項；而促進個案學生「降階理解」之提問方法包括「正向提問」、「整合提問」、「反駁提問」、「整合詮釋」、「情境改變」與「逐步引導」等六項。以下，首先將這些標籤與前段



註：
3.以特定數值讓學生確認
4.「是非型」提問
5.「選擇型」提問
6.「確認型」提問
7.「逐步引導型」提問
8.「要求說明理由」提問
9.「協助轉譯表徵」提問

圖 6：造成各層次學生「進階理解」提問策略的異同性分析



註：
1.「詢問可能數值」提問
2.「提供新情境」提問
4.「要求檢視」提問
5.「回憶經驗」提問

圖 7：造成各層次學生「降階理解」提問策略的異同性分析

研究者的提問作對應，彙整如下表（表6）所示：

1.「正向提問」可促進個案學生「進階理解」

所謂「正向提問」是指「研究者根據對學生現在能力的判斷，提出跨一步能力的問題，提供學生思考並予以回答」。舉例來說，在研究者提問引導過程中，研究者會「以特定數值讓學生確認」，該特定數值是否合於該問題情境中文字符號的值？藉此，讓學生感受文字符號的語意角色。在研究者所佈置不同情境的問題中，「正向提問」都協助學生前進至高階的理解層次，使其增加對文字符號相關知識內涵的理解。

2.「整合詮釋」與「整合提問」亦能促進學生「進階理解」與「降階理解」

所謂「整合詮釋」是指「研究者與學生完成一個段落的對話後，透過研究者引導，針對剛才的對話內容重新表述與說明」。而「整合提問」則指「研究者在與學生完成一個段落的對話後，請學生針對剛才的對話內容重新表述與說明，進而再問提供學生進行思考並予以回答」。大部分的「整合詮釋」與「整合提問」，多能促進學生對文字符號的相關知識推前至更高階的理解層次。但是，少部分的「整合詮釋」與「整合提問」也會拉回學生對文字符號的相關知識，至較低階的理解層次。

表 6：「提問方法」與「研究者的提問問題」之對應關係

提問方法	促進「進階理解」的提問	促進「降階理解」的提問
正向提問	以特定數值讓學生確認	
逐步引導	將解題程序切割，逐步引導	將解題程序切割，逐步引導
整合提問	「選擇型」提問	「回憶經驗」提問
反駁提問	「是非型」提問	「詢問可能數值」提問
整合詮釋	「協助轉譯表徵」提問	「要求檢視」提問
自我反思	「確認型」提問 「要求說明理由」提問	
7 表層詮釋	講解題意 說明運算技巧	數學算式的運算
8 情境改變		「提供新情境」提問

3.「表層詮釋」、「逐步引導」與「反駁提問」促進學生「進階理解」與「降階理解」

所謂「表層詮釋」是指「研究者就問題的題意進行說明，讓個案學生能夠理解題意或字面上的意義」。此作法多能讓學生理解題意，進而思考解題策略。而所謂「逐步引導」是指「研究者以築鷹架的方式，在學生

的實際發展水準與解題目標間畫分數個步驟，依序引導學生進行理解」。此作法大多引領學生逐步地往高階理解層次邁進。而所謂「反駁提問」是指「學生的回答中顯示答案未盡周延而有瑕疵或錯誤，研究者針對這些地方提出反駁的答案或問題提供學生進一步思考」。研究者提出「反駁提問」目的，在於希望個案學生能夠對於他所提出的答案或回應，做再一次的確認。此作法大多穩固、強化學生對於此概念的知識。但是，此作法有時也造成學生降階理解。也就是看到學生先前已建立概念的不穩固，以致於他必須重新回到較低階的理解層次再行思考。

4.「自我反思」促進學生「進階理解」

所謂「自我反思」是「學生透過自身的重新思考而彙整出關於數學概念較完整架構的想法」。此作法通常發生在研究者拋給學生一道問題，在不給予任何提示的情況下，讓學生自我思考而彙集出答案。此時，教師的角色扮演「論證仲裁者」的角色，提供學生確認自己的思考是否為真的參考。

5.「情境改變」會造成學生「降階理解」

「情境改變」是指「本研究所鋪陳的不同問題」而言。從個案學生的解題過程中，透過對話多能提升其對於文字符號相關知識的理解層次。從個案學生在解題過程中，有多次情境改變（有些例子含若干小題），讓個案學生的理解層次拉回至較低階的理解層次。此現象意味學生對於數學概念的理解會隨著問題的情境而有所變化，這是一種動態的理解過程。而且，任何的數學概念，也絕非達某一理解層次後即不再拉回。而且，理解層次的拉回也並非意味學生的理解能力降低。

整體而言，透過「問題情境的經營」，以「正向提問」、「逐步引導」、「整合提問」、「反駁提問」、「整合詮釋」、「自我反思」、「情境改變」與「表層詮釋」對話活動的介入型態，有效地促進了學生在文字符號相關概念與語意的理解改變。此為促進學生對文字符號語意理解的「提問方法」。

接續，再從「提問方法」中繼續分類。試圖將上述「逐步引導」、「正向提問」、「整合詮釋」、「整合提問」、「反駁提問」、「自我反思」、「情境改變」與「表層詮釋」等八項提問方法，依其促進學生思考方向的類型進行區分。若從學生接受老師提問後的反應來說，學生接受提問後思考的方向可分為三類：1.前進式提問：這是指學生在接受教師的提問後，能幫助他繼續往前深入思考的提問類型，包括「正向提問」、「逐步引導」、「表層詮釋」等三類提問方法；2.聚焦式提問：這是指學生在接受教師的提問後，能幫助他釐清、穩固當前所遇到的概念與運算之提問類型，包括「整合提問」、「整合詮釋」、「自我反思」等三類的提問方法；3.回顧式提問：這是指學生在接受教師的提問後，能幫助他回憶過去的經驗，以便與現在所學的概念結合，包括「反駁提問」、「情境改變」。茲以下圖（圖8）表徵。

當學生面對情境時，他能「正確」、「清楚」表達其思考時，研究者會持以「前進式提問」以促進他繼續往下思考；當他「無法正確」表示問題解決策略時，研究者則會持以「回顧式提問」以促進他先整合過去所學



圖 8：「提問方法」的再精煉

的經驗與現在所學的關係；當他「模糊」呈現其思考時，研究者則會持以「聚焦式提問」以促進他釐清概念的理解。

(二)促進學生對文字符號語意理解改變的路徑分析

從15位學生的理解路徑來看，他們的理解路徑可分為「只有進階」、「先進階後降階」以及「先降階後進階」三個類型（語意理解路徑詳見圖9）。事實上，對於相同問題，不同層次學生的理解路徑也可能不相同。以下，將以不同層次學生在同一問題（以問題3-4為例）的理解詮釋三種理解路徑的內涵。

1.類型 I：只有「進階」

學生（M1）在讀題後，便回答：「不知道」。接著，由研究者逐步引導、講解，協助他完成解題的「只有進階」理解路徑（詳見圖9-1）。在解本題時，M1讀完本問題後，隨即展開計算（$\frac{9}{5}\times 25+32, \frac{9}{5}\times 28+32$），結果分別得到77, 61.8（$\frac{5\times 28+9}{5}+32$）。因此，他寫出「$77 < F < 62$」。顯示出 M1具備關於求不等式範圍的心像，但在處理計算的能力尚不完備（a）。因此，研究者提示他由剛才的列式中進行檢查。結果，H1能檢視這個心像的組成，找到這些處理的問題並說出來（b）。接續，研究者想知道 M1是否能理解本問題文字符號的語意角色。因此，提問：

> 我問你喔，F 代表？F 是一個符號嘛，對不對？那這個符號它有範圍限制，它代表有限的數，還是無限的數？

M1回答：「無限的數」。顯示 M1對於層次IV的性質能找到其特性，並將 C 與 F 的範圍各形成心理物件（c）。但是，研究者想知道 M1是否真能知道本問題文字符號的語意角色，因此，又追問：「為什麼？」。而 M1繼續回答：

> 因為它是無限的數，但是它還是有限制，它一定要大於或等於77，小於82.4，所以只要是在這中間的數，都可以當做它的答案。

可見 M1能有邏輯性地解釋個人的形式化思考（d）。研究者再提問：「那中間的數有可能是什麼？」，而從 M1的回答：「有可能是小數、分數、或正整數」，研究者便確認 M1能有邏輯性地解釋個人的形式化思考。

2.類型 II：先「進階」後「降階」

學生（H4）在讀題後，出現「先推前後拉回」理解路徑（詳見圖9-2）。首先，H4依

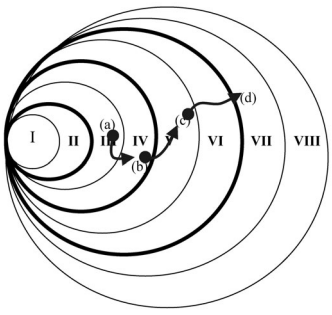


圖9-1 類型 I

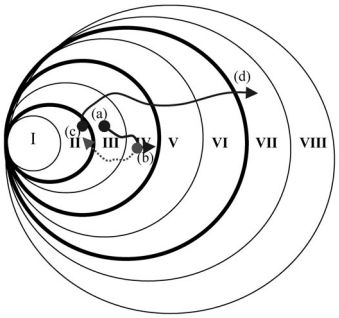


圖9-2 類型 II

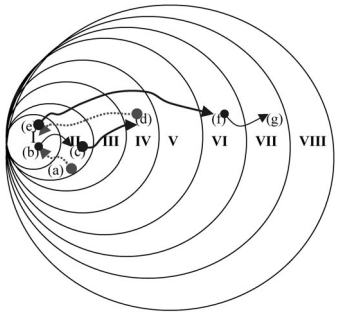


圖9-3 類型 III

圖 9：學生的理解路徑類型

序列出「$25 \le C < 28 \rightarrow 25 \times \frac{9}{5} \le \frac{9}{5}C < \frac{9}{5} \times 28 \rightarrow 45+32 \le \frac{9}{5}C + 32 < \frac{252}{5} + 32 \rightarrow 77 \le F < 83.4$」，可見，H4已形成心像（a）。因此，研究者問他：「為什麼你一開始要從 C 的範圍開始做？」，H4回答：「因為 F = $\frac{9}{5}$C +32，表示 C 決定了 F 的值」，H4已能理解組成這數學式中的文字符號 F，C 的關連性（b）。接著，研究者問 H4：「那你覺得這題的答案是多少呢？」，H4回答：「77, 78, 79, 80, 81, 82。」，可見，他以整數的思維看待本題中文字符號的語意角色（c）。因此，研究者提問：「你覺得這個題目，C 有沒有可能是分數或小數？」，H4回答：「嗯…有！」，「那 F 呢？」，「也是！」。「所以你覺得這題目 F 的可能答案是有限多個還是無限多個？」，H4思考後回答：「應該是無限多個！」。研究者繼續追問：「為什麼？」，H4回答：「因為在77和83中間的分數和小數是無限多個。」。可見 H4能有邏輯性地解釋個人的形式化思考（d）。

3.類型 III：先「降階」後「進階」

學生（L2）在本題呈現「先拉回後推前」理解路徑（詳見圖9-3）。L2看完題目後，隨即將26，27兩個數字代入 F = $\frac{9}{5}$C +32算式中（a）。此時，研究者提問：「為什麼你要代26和27的值進去呢？」，L2回答：「因為題目說溫度不小於25度，且未滿28度」，研究者繼續提問：「你認為不小於25度的意思應該要包括25度還是不要呢？」，L2思考一下說：「嗯！應該要。」（b），此時，L2重新回想不等式的經驗，提取先備知識回答研究者的提問。接續，研究者再提問：「那這裡說，溫度不小於25度，且未滿28度，有沒有可能是25.1度？25.2度？…」，L2思考後回答：「嗯！有可能」。L2重新思考關於本題所指攝氏溫度的可能數值，超越先前整數系的思維（c）。研究者提問：「所以你認為介於25度至28度的可能答案有幾個？是有限多個？還是無限多個？」，L2回答：「應該是…無限多個」。顯然，L2建構出合於本題文字符號的語意角色（d）。其次，研究者繼續引導：「那你要怎麼列計算式？」，L2回答：「不會！」。因此，研究者逐步指示他列式，「這裡說溫度不小於25度，且未滿28度，如果用不等式的方法來列式，應該怎麼列？」，L2想了想，寫出「$25 \le C < 28$」。研究者再問 L2：「那麼怎麼讓這個式子慢慢轉成 F 的表示呢？」研究者指示他：「你看！F 是不是可以表示成 $\frac{9}{5}$C+32？所以你要把上面 C 的不等式轉變成 $\frac{9}{5}$C+32的不等式，懂嗎？」，他逐步寫出：「$25 \times \frac{9}{5} \le \frac{9}{5}C < \frac{9}{5} \times 28 \rightarrow 45+32 \le \frac{9}{5}C + 32 < \frac{252}{5} + 32$」（f），再轉成「$77 \le F < 83.4$」答案（g）。

綜合來說，同一個問題情境，同一種提問方式，對於不同層次學生而言，可能產生不同的理解路徑。而本研究之結果，將提供教師提問方法的選擇。但該如何持續提問，將依學生的反應而有所變化。

最後，本文再將上述結果進一步繪製成「促進學生對代數式中文字符號語意理解改變的提問方法模型」（見圖10）。

圖10的模型，乃結合「問題語意情境」、「理解活動」、「提問介入」等三者一體，促進學生對文字符號語意理解之動態提問模型。「問題語意情境」蘊含「文字符號代表特定數」、「文字符號代表特定未知數」與「文字符號代表一般數」等三類。「理解活動」則包括學生的三類理解路徑：「只有進階理解」，這是圖10中橢圓的「上半圓」部份。第一類的理解路徑是當學生完成「讀題」後，即從橢圓中心內層向上出發，進行「進階理解」。在研究者引導下，持續進階理解後，完成解題工作以及語意認識，最後，再由左右方進入橢圓內層。此現象反應學生持續進

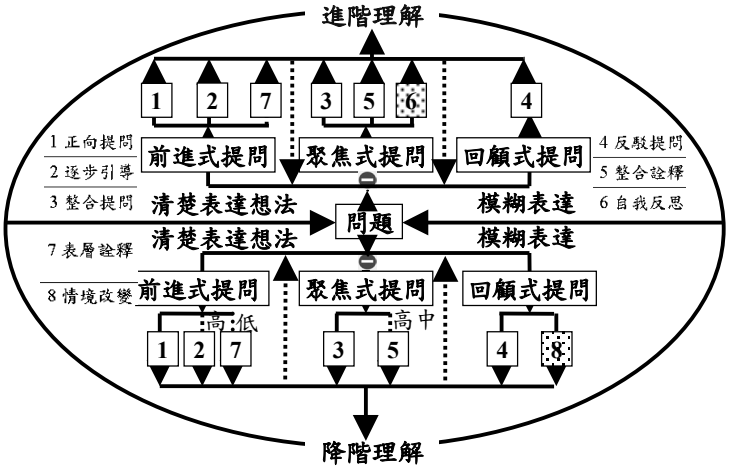


圖 10：促進學生對代數式中文字符號語意理解改變的提問方法模型

行「知識建構」的工作。第二類理解路徑是「先進階、後降階…的理解」，這是從圖10中橢圓的內層向上出發，先執行上半橢圓的「進階理解」，再由左或右方進入橢圓中心進入的「降階理解」，依「理解的歷程」不斷地在橢圓圈轉動。第三類理解路徑是「先降階後進階…的理解」，這是從圖10中同心圓裡的最內層向下出發，先執行下半橢圓的「降階理解」，再進入上半橢圓的「進階理解」，依「理解的歷程」不斷地在橢圓轉動。圖中的「理解活動」，詮釋了本模型的動態特性。至於「教學介入」，則蘊含了研究者在促進不同層次學生對文字符號理解時，所使用促進「進階理解」的「正向提問」、「逐步引導」、「整合提問」、「反駁提問」、「整合詮釋」、「自我反思」與「表層詮釋」等七項教學介入方式；以及促進「降階理解」的「正向提問」、「逐步引導」、「整合提問」、「反駁提問」、「整合詮釋」、「表層詮釋」與「情境改變」等七項教學介入方式。

伍、結論與建議

參與本研究的15位學生依序在問題情境、提問引導的過程中完成文字符號的解題及語意理解。在選擇分析個案學生的理解工具時，研究者秉持「理解是一種動態歷程」觀點，因此，採用 Pirie 與 Kieren（1992）所開發的「數學理解成長模型」作為本文詮釋學生對文字符號理解改變的工具。而分析面向，則包括學生對文字符號理解改變「造成進階、降階理解所使用的提問方法」、「面對進階、降階理解的提問，學生使用的策略」等面向。研究結果發現，由於研究者自身「經驗」的影響，因此對學生的「引導」逐漸形成了一套「脈絡」。在引導過程中，研究者先讓學生在該問題情境中執行「問題解決」工作，而學生在執行過程中，研究者適時予以「提問」、「反駁」、「強化」學生對文字符號解題技巧的熟悉度，並且，逐步以「是非」、「選擇」、「獨立判斷」方式讓學生建構對該問題情境下文字符號的語意角色。然而，不同層次的學生面對研究者提問時，以「同中有異」的策略回應。這些策略中，高層次學生除了使用以「經驗」為基礎的直觀判斷外，他們還使用屬於「後設認知」監控的「逐步推理」、「逐項檢視」等方式進行對文字符號的理解；相較下，低層次學生則大多使用「直

觀」的判斷方式，或以「不知道」回應。因此，需要研究者較多的解釋與說明。再者，從學生的理解層次來看，也發現透過提問引導的教學，學生都能從原先的理解現況「進階理解」至較高的理解層次；或「降階理解」精緻化原先具備較不完備的文字符號相關知識。

從15位學生對文字符號的理解改變歷程中發現，學生對文字符號相關知識的理解，是無法從情境脈絡抽離的。文字符號的語意角色，必須存在「情境」下才有意義。這呼應了 Wagner（1981a）的說法。因此，當教師希望學生學習文字符號的「運算」、「語意理解」，則應該從不同的「情境」著手，提供學生不同「情境」的經驗，才能讓他們對「文字符號」有感覺，進而達成有意義的理解。而教師能夠協助的，除了上述「提供不同的情境」外，必須「提供多元的提問」，刺激他們進行思考、判斷，並且「提供同儕交流策略的分享」，便能促進學生對文字符號的理解改變。這些途徑與方式，也在本研究的研究發現下獲得支持。

再者，本文所獲致的提問模型中，提問的類型包括前進式、聚焦式以及回顧式等三種提問類型。而 Mason（2000）的研究將教師的提問類型分為探索式（inquiring）、聚焦式（focusing）與檢驗式（testing）等三類。其中探索式提問目的在幫助理解數學概念，刺激學生進一步思考。這種提問類型呼應本文所發現的前進式提問。聚焦式提問是要學生注意數學的樣式（pattern）、一般性（generality）或特徵。這種提問類型與本文的聚焦式提問一致。而檢驗式提問是為了瞭解學生真正的理解情形，而請學生進一步說明理由。這種提問類型恰與本文所獲得的回顧式提問。換言之，本文的結果呼應了 Mason（2000）的研究結果。

然而，如何判定本文所獲得的提問模型是良好的呢？陳淑娟與劉祥通（2001）提出了四個判準：1.達成教學目標；2.考量學生個別差異；3.沿著概念主軸追問；4.提出好的問題。而本文所建立之提問模型乃是站在不同層次學生的師生對話的基礎上，逐步建構一個能引導學生達成對文字符號語意理解的提問模型。過程中乃以達成對文字符號語意理解為主軸，而學生也能在教師不斷提問下回應問題，進而達成理解。因此，在此判準衡量下，值得第一線教師參考使用。

但是，若從一般教師的教學經驗中可以覺察，似乎提問方法促進學生進階理解或降階理解的路徑尚有不足。例如：學生形式化一元二次方式的公式解後，其再重新思考配方法時，其思維可能又不只是配方法的型式，還有在公式解中的使用時機。這屬於透過自我反思來達成降階理解。但在本文中的模型卻未發現。這可能的原因有二：一是本文的個案學生只有15人，因此可能並未全然反映出教學現場的全貌。建議未來可將此模型落實於一般課室中，再進行模式之精煉；二則是本文只針對代數式中文字符號語意理解的部分進行探究，因此，其他單元或議題可能產生的現象為在本研究中出現。建議未來可將此模式施行於其他單元或議題中，充實並比較提問模型之異同。而此觀點也可能隱喻了教學方法因領域獨特性（domain specific）而有所不同的想法。

致　謝

本研究蒙國科會專題計畫補助，計畫編號 NSC 97-2511-S-273-001-MY2，特致申謝；文中所提論點純屬作者個人意見，並不代表國科會之立場。作者衷心感謝總編輯暨兩位審查委員對本文所提供之寶貴建議，由

於您們的協助，方能使本文能夠修改得更加完善。

參考文獻

1. 吳淑琳（2001）。**國中生線型函數概念發展之個案研究**。國立台灣師範大學數學系碩士論文，未出版，台北市。
2. 陳彥廷、柳賢（2009）。中學生對代數式中文字符號之語意理解研究：不同管道的探討。**科學教育學刊，17**（1），1-25。
3. 陳淑娟、劉祥通（2001）。國小教師進行數學討論活動困難之探討。**教育研究資訊雙月刊，9**（2），125-146。
4. 郭汾派、林光賢、林福來（1989）。**國中生文字符號概念的發展**。行政院國家科學委員會研究計畫成果報告（NSC 76-0111-S003-08，NSC 77-0111-S003-05A）。台北市：國立台灣師範大學數學系。
5. 張玉成（1999）。**教師發問技巧**。台北市：心理出版社。
6. 戴文賓、邱守榕（1999）。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。**科學教育，10**，148-175。
7. Ainley, J. (1987). Telling questions. *Mathematics Teaching, 118*, 24-26.
8. Anderson, J. R., & Bower, G. H. (1973). *Human associative memory*. Washington, DC: Winston.
9. Artzt, A. F. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher*. Lawrence Erlbaum Associates, London.
10. Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspective s on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. S straber, B. Winkelmann (Eds.), *The didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 133-146). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Nether land.
11. Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. New Jersey: Ablex.
12. Davis, R. B., & Maher, C. A. (1990). What do we do when we learn mathematics? In R. B. Davis & C. A. Maher (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 53-69). Reston, VA: NCTM.
13. Holliday, W. G., & Benson, G. (1991). Enhancing learning using questions, adjunct to science charts. *Journal of Research in Science Teaching, 28*(6), 523-535.
14. Holliday, W. G., & McGuire, B. (1992). How can comprehension adjunct questions focus students' attention and enhance concept learning of a computer-animated science lesson. *Journal of Research in Science Teaching, 29*(1), 3-15.
15. Kieran, C. (1991). The learning and teaching of school algebra. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan. 390-419.
16. Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.
17. Maher, C. A. (1998). Constructivism and constructivist teaching–can they co-exist? In O. Bjorkqvist (Ed.), *Mathematics teaching from a constructivist point of view* (pp. 29-42). Finland: Abo Akademi, Pedagogiska Fakulteten.
18. Maher, C. A., & Martino, A. M. (1997). Conditions for conceptual change: From pattern recognition to theory posing. In H. Mansfield (Ed.), *Young children and mathematics: Con-*

cepts and their representations (pp. 58-81). Durham, NH: Australian Association of Mathematics Teachers.

19. Maher, C. A., Martino, A. M., & Davis, R. B. (1996). Young children's development of mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 81-112.
20. Marlowe, C. E. (1986). Questioning and Peer Collaboration as Techniques for Thinking and Writing About Personality. *Teaching of Psychology*, *13*(2), 75-77.
21. Martino, A. M., & Maher, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in Mathematics: What research practice has taught us. *The Journal of Mathematics Behavior, 18*(1), 53-78.
22. Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology, 31*(1), 97-111.
23. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
24. Perry, M., Vanderstoep, S., & Yu, S. (1993). Asking questions in first-grade mathematics classes: Potential influences on mathematical thought. *Journal of Educational Psychology, 85*(1), 31-40.
25. Pirie, S. E. B., & Kieren, T. E. (1989). A recursive theory o mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(4), 7-11.
26. Pirie, S. E. B., & Kieren, T. E. (1992). Watching Sandy's understanding growth. *Journal of Mathematical Behavior, 11*, 243-257.
27. Putnam, R. T., Lampert, M., & Peterson, L. P. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. In C. B. Cazden (Ed.), *Review of research in education* (Vol. 16, pp. 57-150). Washington, DC: American Education research Association.
28. Robinson, G. E., & Bartlett, K. T. (1995). Assessing mathematical learning. *Teaching Children Mathematics*, *2*(1), 24-26.
29. Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics* (1st ed.). Harmondsworth: Penguin.
30. van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. London: Academic Press.
31. Wagner, S. (1981a). An analytical framework for mathematical variables. *Proceedings of the 5th annual conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 165-170). Grenoble, France: PME.

附錄一 文字符號語意/情境架構下的問題內容

編號	語意層次	情境	內容
1-1	特定數	一元一次多項式	若 $n=2000$，求$(n+1)(n+2)-(n+1)(n+4)$的值 註：本題最後的形式為$-2n-2$
1-2	特定數	二元一次多項式	計算 $\sqrt{(19.19)^2+(39.19)^2-38.38\times 39.19}$ 的值 註：本題最後的形式(39.19–19.19)
1-3	特定數	一元一次方程式	有 n 個整數，加入一個數 36 後，其平均數多 2；若是去掉其中一數 20，其平均數少 1。則 n 之值為何？
1-4	特定數	二元一次方程式	下方空格中，每行、每列及斜對角線上的數字和均相等，求 A、B、C 的值。 –2 | A | –15 B | 3 | C 21 | –20 | 8
2-1	特定未知數	一元一次多項式	下列敘述中，哪一個可以用 7x+3 來表示：(1)一箱桃子分給 x 個學生，每人分 7 個，剩 3 個，問桃子的個數；(2)有父、子兩人，已知父親年齡是兒子年齡的 7 倍多 3 歲，而兒子是 x 歲，問父子年齡和；(3)1 枝 3 元的鉛筆買 x 枝及 1 枝 7 元的原子筆買 1 枝，付 500 元，問找回多少錢；(4)磚頭每塊重 7 公斤，磁磚每箱重 x 公斤，問 3 箱磁磚與 1 塊磚頭共重多少公斤。
2-2	特定未知數	二元一次多項式	漢堡 1 個 2 x 元，雞塊 1 個 3 y 元，若拿 500 元去買 2 個漢堡和 3 塊雞塊，應找回多少錢？
2-3	特定未知數	一元一次方程式	某校新生編班，若每班編為 38 人，將多出 26 人；若每班編為 42 人，將不夠 14 人，則新生有多少人？
2-4	特定未知數	二元一次方程式	已知 a、b 兩數，滿足 $ab=3$，且 $a^2b+ab^2+a+b=20$。求 a^2+b^2 之值。
3-1	一般數	一元一次多項式	有一個三位數 x，若後面少寫一個 6 得到 y（例如 256 寫成 25）則 y 如何表示？(1)$x-6$ (2)$\frac{x-6}{10}$ (3)$\frac{x}{10}-6$ (4)$\frac{x-6}{100}$
3-2	一般數	二元一次多項式	若 x 是 z 的 1.5 倍，y 是 z 的 1.2 倍，則 x 是 y 的多少倍？
3-3	一般數	一元一次方程式	比較 $3n$ 和 $n+3$，哪個比較大？請說明你的理由。
3-4	一般數	二元一次方程式	已知華氏溫度（F）與攝氏溫度（C）之關係為：$F=\frac{9}{5}C+32$，若今天攝氏溫度不小於 25 度，且未滿 28 度，則華氏溫度的範圍為多少？

Exploring the Questioning Strategies of Inserting Mathematical Teaching into Junior Mathematics to Promote Letters' Semantics Understanding

Yen-Ting Chen[1] and Shian Leou[2]

[1]National Institute for Compilation and Translation

[2]National Kaohsiung Normal University

Abstract

The purpose of the study was to explore the conceptual change model of understanding letters' semantics toward algebraic expression in a group of Taiwanese seventh graders. After analyzing questionnaire responses of an initial sample of 76 students, 15 students were selected, from three levels of high, medium, and low scores, as the final subjects. Based on the Growing Model of Mathematic Understanding, a qualitative analysis, through a series of Questioning revealed the conceptual change mode of understanding letters' semantics toward algebraic expression about high level students. This study disclosed that from the phase of promoting Regress Understanding, questions about meta-cognitive judgment made high level students reach Regress Understanding, but the operational skill about letters also made lower level students reach Regress Understanding. From the strategy of promoting Progress Understanding, high level students utilized the method of Advanced Questioning, Pause Questioning, and Obstructed Questioning.

Key words: Algebra Learning, Letters, Mathematics Understanding, Questioning, Semantics Understanding