科學教育學刊
2009, 第十七卷第五期, 433-458

Chinese Journal of Science Education
2009, 17(5), 433-458

探討高二學生在三角探究教學中的解題表現

秦爾聰[1]　**林勇吉**[1]　**陳俊源**[2]
[1]國立彰化師範大學　科學教育研究所
[2]台南縣黎明高級中學

（投稿日期：民國 97 年 3 月 3 日，修訂日期：98 年 9 月 17 日，接受日期：98 年 9 月 23 日）

摘要：本研究旨在探討高二學生在三角探究教學中的「解題表現」。研究採個案研究，透過課室錄影、錄音、教學日誌、學習單與訪談獲得所需資料。研究參與者為中部地區，國立高中二年級自然組學生 43 位，利用六個週末之輔導課進行（每次四節課）。研究發現歸納學生在探究教學中五種主要解題策略：(1)論證：透過臆測與論證解題；(2)統整：使用統整知識解題；(3)公式：直接以三角公式解題；(4)畢氏：使用畢氏定理解題；(5)直觀：以臆測或觀察解題。其中，「論證」是探究教學中，學生主要使用的解題策略。

關鍵詞：三角學、探究、解題表現

壹、前　言

「或許沒有什麼能像三角學（trigonometry）一樣，在數學世界裡佔有居中的地位」（Herbart，引自毛爾，1998/胡守仁譯，2000，頁1）。

儘管學習三角學（或稱三角）有著不可或缺的重要性，然而學生在學習三角時卻充滿著許多困難（Blackett & Tall, 1991）。「教學」是引起學習三角困難的關鍵（Cavanagh, 2008）。Quinlan（2004）指出，大部分教師在教授三角時，重心都放在介紹公式與術語，如教師一開始便大量介紹關於三角的定義與公式，但學生的學習效果不佳。因此，他認為學習三角應始於測量活動，介紹定義前，先讓學生探索具體的例子，換言之，學生須從「探究」活動中，逐漸學習三角，而非唐突接受大量的定義與公式。Weber（2005）強調學習三角時，應注重「程序」（教材先後次序）與「過程」（學生瞭解所做為何），例如在探索活動中，學生經由推理、討論、與合作的情境中，建立三角概念。

基於上述，三角教學應幫助學生融會貫通、連結不同知識、使用多元表徵、以及思考與探索問題（National Council of Teachers of

Mathematics [NCTM], 2000)，因此學生能在討論、論證等過程逐步建立三角概念。針對這些相關建議，「數學探究教學」(mathematics inquiry teaching)(簡稱探究教學）似乎可回應這些需求，因為探究教學中，學生需經歷數學家探究知識的過程，包括：(1)起始於有意義的問題（能引起許多想法)；(2)對問題產生許多猜想（臆測（conjectures))或不同解法；(3)運用數學知識檢查這些臆測是否可信（論證)；(4)接受老師或其他同學的挑戰，學生據此澄清想法或改變解答（Wood, Williams, & McNeal, 2006)。因此學生能有更多由解題來學習的機會，而非記憶公式，這與上述所稱學習三角學需始於探索活動，注重程序與過程之理念不謀而合。

另外，文獻已證實探究教學能提升學生的數學學習（Whitin, 2006)，(1)然而對於提升的細節闕如；(2)也尚未釐清學生在探究教學中的解題表現；(3)亦無三角為主題之探究教學研究。為了瞭解探究教學對學生學習三角的效益，以及學生在探究教學中的反應，本研究擬分析學生的「解題表現」。研究目的為：探討三角探究教學中，學生在探究活動中的解題表現。

本研究的「解題表現」是指學生在探究教學活動中的「探究成果」，即學生如何解決探究活動中之問題，包含使用何種解題策略與如何發展解題思維。

探討學生在探究教學中的解題表現，在研究上有重要意義。因為它可以：(1)瞭解探究教學的成效。分析學生的解題表現可以檢驗教學策略優劣（Nolen, 2003)，好的教學策略不僅應引導學生學習知識，同時也應幫助個別學生發展與尋求最適切的解題方式（符合個別學生的認知基模)，這可從學生的解題表現得知。(2)瞭解學生在探究教學中的認知發展，例如瞭解學生如何存取與使用所學的數學知識。這有助研究學者瞭解探究教學中，學生如何建立與應用數學知識的本質（Chinnappan, 1998)。(3)有效率的實施探究教學。當我們愈明瞭學生在某個教學模式下的解題表現，代表愈能掌握學生在此模式下的思考（Doerr, 2006)。

貳、文獻探討

一、探究的意義

"Webster's Third International Dictionary"（1986)：「探究是一種行為、或是尋求真實、訊息和知識的情況；是探索（investigation)；是研究（research)；是問題或疑問（query)」（p. 1167)，從字根 inquire 來看，意謂追求某種訊息；進行一個探索或尋找；搜尋訊息或疑問（questioning)。探究是基於學習者或探索者（investigator）的問題出發，所進行的研究工作（Barrow, 2006)。Yerushalmy, Chazan 與 Gordon（1990）認為探究是學習的過程，是有創造力的人們，面對眼前的問題時，所使用的過程；這意味人們對特定領域感到興趣，並且持續富有動機去學習它，人們自己假定問題、設定方法去解決它們，並且嘗試是創造解答。Minstrell（2000）列出一些對探究的不同定義：「鼓勵好奇心」；「引起學習動機的教學策略」；「動手做和用心想」(hands-on and minds-on)；「操作不同工具去研究特殊現象」；「由學生引發問題」等。

綜合上述，也許可以將探究理解成：「主動發現問題與解決問題的研究過程」。

二、探究與數學解題之差異

相較於「數學解題」，「探究」是數學教育中新穎的詞彙，一些對兩者差異的論述，將有助清楚勾勒探究之輪廓：

Lederman 與 Niess（2000）認為探究強調的精神，比解題提供更多瞭解學生思考的機會，因探究強調的「臆測」與「論證」，較能充分顯露學習的過程。Marzano 等（1988）提出探究是用來預測和解釋這個世界，符合數學建模（mathematical modeling）的精神，比解題的層次更高。Borasi（1996）指出解題取向的教學，問題是由教師設定，且教師已預先知道解答，學生的解題行為在事前即設定好，不會產生更多疑問；然而探究教學模式下，學生參與更開放與具衍生性（generative）的過程，在事前，教師或學生都可能不知道探究結果，並且學生通常主動融入探究的方向、範圍與決策。

三、數學探究教學

Anderson（2002）廣義的認為符合新課程綱要的教學（如 NCTM, 2000強調推理、溝通與解題等），就可稱探究教學，因此有別於過去注重「重複」、「練習」、「公式化」與「正確答案」的傳統教學，探究教學特別強調學生參與「解題」與「探索」活動。Diezmann（2004）認為探究教學包含至少三個元素：開放式問題（open-ended questions）、調查（investigations）與思考試驗（thought experiment）。教師必須提供學生群體任務，給予學生共同合作建構知識的真實（authentic）機會。NCTM（2000）對於「發展推理與證明」，主張教師應努力創造「討論」、「提問」和「聆聽」的課室風氣，也應期待學生「搜尋」（seek）、「形成公式」（formulate）、「批判解釋」（critique explanations），將課室轉變為「探究的社群」（communities of inquiry）。Whitin（2006）認為探究教學，是使用學生的「觀察」和「問題」作跳板，例如學生知道6＋4＝10，可以進一步詢問有哪三數相加，也可得到同樣結果（如2＋4＋4），藉由改變一個或幾個給定問題的特性，創造學生的探究機會。更進一步，他提出探究教學的元素包括：1.細心觀察。2.使用多元觀點。3.產生問題。4.提供臆測。5.設計與執行計畫。6.反思這個結果。

綜合上述，我們瞭解探究教學是學生主動探索與研究問題，利用開放式的活動，蘊含臆測、論證（檢驗臆測的有效性）、嘗試錯誤、推理等高層次思考過程。然而上述這些理論，並沒有明確提供探究教學的架構，為了有效在課室實施探究教學，我們參考 Siegel, Borasi 與 Fonzi（1998）的探究環（inquiry cycle）：

1. 準備和聚焦（setting the stage and focusing）：這個階段是探究的暖身階段，主要工作是(1)透過教師介紹活動，喚起學生的初始想法與欲探究主題之知識；(2)挑戰學生的原始想法，點燃學生的興趣，(3)聚焦值得討論的議題。
2. 執行探究（carrying out the inquiry）：在階段 1 中決定出問題與探究的方向後，(1)學生開始進行臆測、分析、推理與論證等行為；(2)經討論後，獲得初步的結果。
3. 綜合和溝通（synthesizing and communicating）：在此是將上階段的探究，產生最後結論。過程為：(1)與他人討論，藉由相互辨證、論證的過程，獲致最後結果；(2)學生學習如何闡述自己的想法（如運用表格、圖形、證明等），與回應他人的意見；(3)教師適時引導或幫助學生作結論。
4. 評估和延伸（taking stock and looking ahead）：這個階段的核心是「反思」，強調：(1)學生反思這整個探究的過程，(2)確認與討論在探究過程中的數學知識，(3)教師也藉由評鑑學生的探究，幫助學生

精進下次的探究，(4)學生可以依據探究結果的反思，形成新的探究問題，開啟新探究循環。

四、探究教學相關實徵研究

Peressini 與 Knuth（2000）探討六位學生如何解決一個「具豐富數學的任務」(mathematically rich task)。任務內容是請學生規劃在正方形操場中的跑步比賽路徑。題目先呈現兩種規劃方式，學生可選擇其一，說明為何接受此規劃，或是提出新規劃。研究結果中，學生依據其背景知識，先提出不同的論證（想法），再根據這些想法提供進一步對話。本篇的內容較強調如何透過這類型的任務，營造探究環境。Goos（2004）的研究有兩個重心，其一是教師如何營造探究教學的環境；其次是如何提升這些學生的參與。針對問題一，教師透過有意義的問題，引起學生的臆測、討論與論證，並適當提問，刺激學生檢驗臆測，幫助整個探究教學的進行。關於問題二，Goos 用「近側發展區」(Zone of Proximal Development, ZPD）作為解釋學生參與數學探究的架構，他歸納三種建立 ZPD 方法：搭鷹架（scaffolding)(鼓勵學生自我監控、自我建構意義)、同儕合作、學生臆測與課本概念的交織（interweave）。Siegel, Borasi 與 Fonzi（1998）的研究主要聚焦在閱讀如何幫助探究教學的進行，他們首先提出探究環的教學架構，並運用此探究環，融合閱讀，幫助學生進行探究，再進一步歸納閱讀與探究教學的關係。

上述 Peressini 與 Knuth 的研究可作為本研究在分析學生解題表現的參考（呈現不同學生的解題結果，討論學生如何解題)；Siegel, Borasi 與 Fonzi 的研究，最主要提供一個完整的探究教學架構（探究環)，讓本研究的探究教學有所依循；Goos 的研究，偏向探究教學中的師生互動，可以幫助教學者進行探究教學。

五、解題表現相關研究

國內外並沒有直接討論學生三角解題表現的研究，但一些論及解題策略的研究可供借鏡。Yerushalmy（2000）分析學生如何使用函數為基礎（function-based）的解題方法學習代數，他透過三次任務為基礎的訪談，長期觀察兩位學生如何解決三個相似的任務。並使用 Schoenfeld（1985）的「閱讀－分析－設計或計畫－實施－驗證」，做為分析解題策略的工具。Fisher（1988）研究教師如何解決四個比例問題，她依據先前文獻將解答分類：「直覺」、「加法」、「比例推理」與「代數」。接著陳述20位教師在這四個比例問題使用的解題策略。Chinnappan（1998）研究15位高成就與15位低成就學生如何解決一個幾何問題，透過分析學生在解題中的訪談轉錄，先歸納出四個解題取向，進而探討高成就與低成就學生在解題表現上的差異。

礙於先前文獻的缺乏，本研究分析解題表現的方式與 Chinnappan 較為雷同，先從課室錄影、學習單、訪談等資料，歸納出學生的主要解題策略，再以這些解題策略為基礎，整體分析學生的解題表現。

參、研究方法

本研究採個案研究，經由「課室錄影與錄音」、「撰寫教學日誌」、「分析學生學習單」與「小組訪談」等資料，描述個案班級學生在三角探究教學中的解題表現。

一、研究參與者

1.個案班級

研究參與者是中部地區，某中型國立高

中二年級自然組的班級，全校共三十六班，基測錄取成績約200分。本個案班級學生共四十三位，男生三十位，女生十三位，該班學生數學約為中上程度（高一數學平均成績是十二個班中的第四，有六、七位平均成績在全校前20%，但也有六、七位平均成績在全校後20%）。原班級之數學教師以講述為主，皆是第一次接受探究教學。

高二學生在高一時，已修習過三角。研究者在研究進行前，先對這些學生進行調查，請他們寫出還記得的三角概念，結果發現大部分學生僅記得三角函數的基本定義（如sin、cos 之定義），僅七、八位學生還記得一些較深入的內容（如和角公式）。

我們刻意選擇高中二年級學生，並利用週六例行輔導課進行，原因是：(1)部份學生具備較深入的三角概念（如上述），這些學生可以領導探究的進行（較具有解題想法，可帶領組員解題或批判其他同學的解法）。(2)克服實際進行研究的限制。礙於學校與家長的意見，本探究教學無法在正規的數學課中實施。週六的輔導課，旨在複習高一所學，三角是其中一個複習主題，故恰可在這些例行輔導課實施三角探究教學。

2.教學者

本研究的教學者畢業自國立大學數學系，並在本研究完成後取得國立大學教育碩士學位。在研究進行前，教學者花費三年參與培養教師實施數學探究教學國科會計畫，期間，教學者學習探究教學理論、實際體驗探究學習、並接受探究教學的訓練，在研究進行前已具備良好的探究教學能力。

3.研究者

研究者參與整個研究過程，並負責研究成果撰寫的工作。在課室教學期間，研究者是觀察者，觀察整個探究教學的進行（研究者知道每位學生的名字，也會在課後與學生閒談）。在教學以外期間，研究者專職研究的工作，協助教學活動設計、蒐集資料（如訪談）、分析資料，並完成整個研究報告。此外，研究者亦參與三年國科會計畫，具有良好的探究教學能力。

二、研究程序

本研究共歷時一年（2005/04-2006/05），前半年（2005/04-2006/02）為準備期，主要工作是完成探究教案設計；實際進入課室為2006/03~2006/05的每週六上午，為期六週，每次四節課。在正式上課前一週（2006/03/25），教學者與研究者便先至該班與同學初步認識，說明日後上課方式，並完成分組，以5-7人一組，共分7組，採異質性分組，以利討論進行。

三、教學活動與教學範例

Zaslavsky（2005）認為活動的「不確定性」，可促使學生進行探究學習。所謂「不確定性」，意謂學生在解題過程中充滿不確定性，不是簡單、直接可獲致答案。這個過程通常由一個臆測改變至另一個臆測，最後才通往有效（valid）結論。這類型的活動，解題路徑不明確，學習者的目標是找出問題中的型與規律（patterns）、連結或關係，通常必須由他們的臆測出發，藉著對這些臆測進行實驗（思考實驗），檢驗這些臆測，據此拒絕或接受這個臆測，若是決定接受這個臆測，則須經由較具體的解釋（explanation）或證明來強化它。

本研究中的活動設計（附錄），是基於「不確定性」。學生在這些活動中，無法輕易套用公式獲致答案。必須從觀察、操作、討論中產生可能臆測，並試圖去驗證與解釋這些臆測，也因此活動中出現許多讓學生作決策，或挑戰他們直觀思維的問題。如單元

一、II「面積64＝65？」的「不確定性」在於：若接受題目論述，就會產生64＝65之結果，這與我們的理解大相逕庭；然而，題目的論述又似乎頗為合理（面積的重新拼湊似乎無誤），藉此引發進一步討論、推理等探究行為。

如同前述，本研究的教學主要依循 Siegel, Borasi 與 Fonzi（1998）的探究環進行，茲以具代表性的單元二、I「平分土地」為例（表1）：

表1中，我們看到幾個探究環的特性。首先學生透過臆測、論證的方式解題，並在「綜合和溝通」階段接受其他同學的挑戰，進一步精緻自己的想法；此外，解題過程中，學生可先對一個問題產生想法，並延續這個想法，解決新的問題。這是探究環中的「評估和延伸」階段，提供反思原來問題的機會。再者，也可發現探究環強調透過「應用」的過程來學習數學（非直接講述，學生需在論證過程，使用數學知識幫助解題）。

四、資料收集

1.課室錄影與錄音：共六次，每次四小時。錄影與錄音的目的主要是紀錄教學者整個探究教學的過程，亦包含小組學習與上台報告。每次進行教學時，教室後與各小組內分別設置錄影機與錄音筆，藉此紀錄學生的發表或討論。

2.教學日誌：共六次。主要紀錄教學者當次教學後之心得，藉此幫助研究者日後分析學生的解題表現。

3.學習單：以組為單位、每次課程填寫一份。學習單中有當次課程的活動內容，學生必須將探究的過程與結果（含解題想法與策略）詳細紀錄在學習單中。

4.小組訪談：共六次，每次約一小時。在當次課後，以組為單位，針對他們在學習單中撰寫的成果進行訪談，主要目的在輔助瞭解這些學生的解題過程，以及組間合作探究（討論）的細節，一些問題如「一開始想到的是什麼？後來又怎麼修正？」、「小組內討論的過程為何？」。

五、資料分析

首先我們針對所收集的資料，進行初步的處理，包含：(1)將課室錄影與錄音、訪談轉錄成逐字稿；(2)同時初步閱讀這些資料後，適度加上研究者的想法與注解。接著資料的分析程序主要參考 Strauss 與 Corbin（1990）：(1)四種不同資料來源，先進行個別檢視，(2)接著開始進行互相比較，最後，我們建構出學生在探究教學中的五種主要解題策略。例如在分析學生參與「面積64＝65？」（單元一、II）的解題表現時，本研究的共同作者們（教學者、研究者與一位數學教育專家），先將關於本活動的資料一一個別檢視，之後從「學習單」與「課室錄影與錄音」的轉錄稿，初步歸納出學生主要以論證方式作答，並從「小組訪談」中瞭解學生思維；接著閱讀「教學日誌」，與上述這些資料進行相互比較與討論，獲得共識：

（R：研究者；R1：數學教育專家；I：教學者）

R1：你覺得學生的主要解題方式是什麼？

R：我覺得大多是論證耶...

R1：嗯，為什麼？

R：因為你看（學習單與教學影帶），他們都是先提出想法，然後再去證明。

R1：I，你也同意嗎？有什麼證據？

I：我同意...你可以看學習單，裡面的寫法都是這樣（論證）。

表 1：探究教學範例：平分土地問題

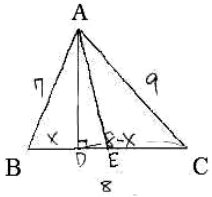
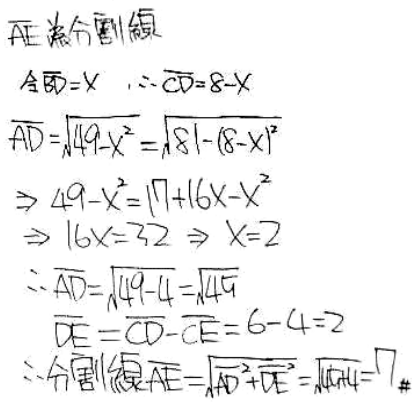
階段	說明	對話摘要
1. 準備和聚焦	教學者引導學生進入問題情境，詢問如何平分此三角形農地。多數學生都同意取中線（由訪談得知，在國中學習過相關內容）；進一步，教學者引導學生聚焦「如何求此中線長」。	I：假設它（△ABC）是一塊農地。現在我問你喔，如果這個農地的主人，想要把這塊農地平方給他的兩個兒子，他該怎麼做？ S32：取中線阿！ I：為什麼？ S32：因為底會等長阿，然後高又相同；所以面積會相等，符合平分原則… I：你上台來講解給大家聽。 （S32 畫出△ABC 高，並說明同底等高） I：有人有不一樣的做法嗎？ S：沒有（多數學生回答） I：好，如果你們都同意取中線，接下來，我要問你們喔，注意聽，要怎麼把這條中線算出來？（發學習單）
2. 執行探究	（以第五組為例） 第五組學生先誤認「$\overline{AE} = \overline{AB}\sin B$」（臆測 1）；接著引發作輔助線，高 $\overline{AD}$ ；再以高相等為條件列式，分別解出 $\overline{AD}$ 與 $\overline{DE}$ ，最後使用畢氏定理得 $\overline{AE}$ 。   	**臆測 1：中線長 $\overline{AE}$ ＝ $\overline{AB}$ sinB** S6：嗯…用那個 $\overline{AB}\sin\theta$（θ=∠B） S42：什麼 $\overline{AB}\sin\theta$? S6：就是這個（中線長）等於 $\overline{AB}\sin\theta$ 阿，課本有寫… **論證 1：△ABE 非直角三角形，反駁臆測 1** S3：不對，不可以，你那個要直角（直角△）才可以吧… **臆測 2：利用高 $\overline{AD}$ 求中線長** S6：喔，那可以…可以設高（左圖，畫出 $\overline{AD}$ ）阿，這樣就是直角三角形了吧？ **論證 2：$\overline{AD} \neq \overline{AE}$ ，反駁臆測 2** S3：對…但是…可是…你那又不是中線。（$\overline{AD} \neq \overline{AE}$ ） （思考 1 分鐘） S41：我覺得可以試試看耶… S3：什麼？ **臆測 3：利用畢氏定理「$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$ 」求 $\overline{AE}$** S41：你現在可以用這個（$\overline{AD}$ ）平方加這個（$\overline{DE}$ ）平方，這樣不就可以求這一段（$\overline{AE}$ ）？ S3：可是，你這段（$\overline{AD}$ ）跟這段（$\overline{DE}$ ）要怎麼算？ （組員開始思考此問題，各自計算） **論證 3：假設 $\overline{BD}$ ＝x，則 $\overline{DC}$ ＝8－x，依 $\overline{AD}$ 等長列式，可得 $\overline{AD}$ 與 $\overline{DE}$** S3：（向組員講解）我算好了，你把這個（$\overline{BD}$ ）假設 x，然後另外一邊（$\overline{DC}$ ）假設 8－x，然後高（$\overline{AD}$ ）會一樣長嘛，這樣就可以解未知數把 x 算出來（依 $\overline{AD}$ 等長列式）；然後你 x 算出來以後，$\overline{AD}$ 也可以算出來（用畢氏定理）…接下來這邊（$\overline{DE}$ ）可以用這邊（$\overline{CD}$ ＝8 cm）減掉這邊（$\overline{CE}$ ＝4 cm），然後再用一次畢氏定理就 OK 了（如左圖）…

表 1（續）

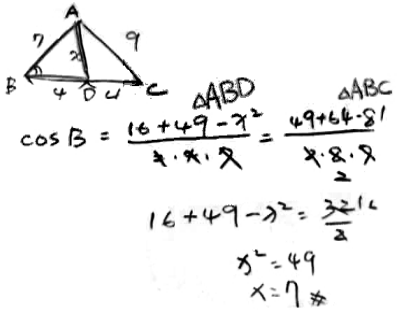
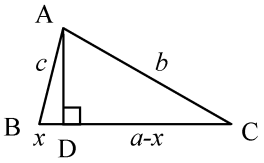
3. 綜合和溝通	教學者刻意讓第五組先上台分享（因使用大家較熟悉的畢氏定理解題），接著讓第三組分享使用餘弦定理解法（挑戰），進而引導大家聚焦「餘弦定理」。  	（第五組講解算法） I：你們怎麼想的？ S3：一開始是 S6 想要用 $\overline{AB}\sin\theta$ 來算，可是我們想說你要有直角三角形才可以，所以我們就給它設高，設完高之後，有人想到說用畢氏定理去算，就這樣把它算出來了… I：好，有沒有問題，都聽的懂嗎？有沒有人要挑戰的，你有不一樣的算法？或是你要對他們的解法提出質疑？ **挑戰：使用不同解法，餘弦定理** （第三組舉手） S31：各位同學大家好，我們這組是用餘弦定理算的，就是你看，先把 $\overline{AD}$ 假設 x，然後 cosB，可以等於這邊（$4^2+7^2-x^2$）÷（$2\times4\times7$）；然後，他又可以等於大三角形的（△ABC）（$7^2+8^2-9^2$）÷（$2\times8\times7$）。（左圖） I：大家都聽的懂嗎？你告訴大家，你們怎麼想的？ S17：嗯…我…我是看到它有三個邊，那我想到可以用 cos（餘弦定理）這個公式，因為這個公式，可以套進去三個邊長，結果它剛好有兩個三角形可以用（△ABD 與△ABC，左圖），所以我就算出來。 I：好，還有人有其他想法？或是有不懂得地方？ S7：老師我們不太懂餘弦定理耶… （教師請第三組跟大家介紹餘弦定理的公式，如△ABC，$\cos B=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}$）
4. 評估和延伸	教學者先帶領大家回顧求取中線長的兩種方式，接著進一步解釋餘弦定理，用不同方式表示餘弦定理（如 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$），並連結畢氏定理與餘弦定理的關係（畢氏定理是餘弦定理的特例）。 討論完餘弦定理後，教學者進一步引發新探究問題「證明餘弦定理」，學生一開始對此感到茫然，教學者因此更具體說明題意，並引導學生用第五組在先前解中線長的方式（作高）來證明它。	（在黑板寫出 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；a，b，c 是△ABC 的邊長） I：如果我把這個遮掉（2ca cosB），看起來像什麼？ S：畢氏定理阿。（四、五位學生回答） I：很好，$b^2=c^2+a^2$ 剛好就是畢氏定理嘛…有人懷疑嗎？ （多數學生搖頭） I：其實畢氏定理就是餘弦定理的特例，什麼特例呢？你看喔，如果∠B＝90°的時候，cosB 等於？ S：0。（四、五位學生回答） **新探究問題：證明餘弦定理** I：其實證明餘弦定理的方法有很多，如果你們不知道怎麼下筆的話，我來幫你們整理一下（在黑板畫圖），現在有一個（銳角）△ABC，三邊長跟剛才一樣，是 a，b，c，現在請你們證明 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，就是你們剛剛有用來解中線長的公式。 （2 分鐘後，多數學生還是不知如何著手） I：好，我再提示，剛剛第五組是不是有作高，你們可以從這個角度去想，從畢氏定理下手…

表 1（續）

第五組模仿剛剛求中線長的方式（作高，並以高相等為條件列方程式），很快得出接近的答案（$b^2=c^2+a^2-2ax$，$\overline{BD}=x$），然而他們不知如何將 x 代換成 cosB，經教學者提示後，第五組證明成功。  	（第五組） S3：用剛剛的方法試試看…先把這段（$\overline{BD}$）設 x，另一段（$\overline{DC}$）就是 $a-x$，然後呢？然後呢？ S41：剛剛不是用高相等列式嘛？ S3：對，然後 $c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$，所以 $b^2=c^2+a^2-2ax$ 耶…證出來了… S6：（舉手）老師，我們證出來了 I：不對，你們這邊還有 x，x 怎麼辦？ S3：$x=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$（只是把上式移項，並非真的解出 x） S6：不對阿，這樣還是求不出來。 I：好，我給你們提示喔，你看現在公式很像[正確的]，對不對？還差什麼？ S3：嗯…還差 cos。 I：好，那 cos 等於什麼？ S3：cos 等於對邊比斜邊阿… I：不是，在這一題 cosB 等於什麼，跟 x 有關係的？ S3：$\cos B=\frac{x}{c}$，所以 $x=c\cos B$…然後呢… S41：然後就證出來啦（將 $x=c\cos B$ 帶入 $b^2=c^2+a^2-2ax$）

R1：我們一起來跟其他資料（小組訪談轉錄與教學日誌）比對看看…

六、研究信度

本研究使用「不同分析者」與「多種資料來源」的三角校正，以建構本研究信度。關於「不同分析者」，是由三位研究人員針對觀察的現象，持續進行討論與磋商，直到共識形成後，才給予最終評述（如上述引言）。關於「多種資料來源」，是由四種不同資料來檢視所觀察的同一現象，並針對有疑慮之處，重新反覆檢視這些資料，達一致性結果時，才作最後論述。茲以分析「面積64＝65？」（單元一、II）為例（表2）：

七、工具效度

本研究的主要研究工具是探究教學活動，如同前述，活動的設計是根據「不確定性」（Zaslavsky, 2005），選擇課本、參考書中較能引發探究的問題設計而成。設計的過程中，教學者先草擬初稿，說明各個單元所涉及的概念與其中探究的理念，接著與研究者、一位數學教育專家、一位三年數學探究教學經驗教師共同討論，進行第一次修正；之後，教學者在同校、同年級的非研究班級進行試教，試教後，再度與上述人員進行討論，修正缺失，完成探究教學活動定稿，這些修正例如刪除只要套入公式便獲得答案，不利進行探究的活動。

肆、研究發現

在此先綜合描述學生在本研究出現的五種不同解題策略，並整理這些策略在各活動的使用情形；接著再針對學生最主要使用的論證策略，進行完整的範例說明。

表 2：多種資料來源範例

研究者詮釋	課室錄影與錄音	教學日誌	學習單	小組訪談
教學過程：一開始學生都很困惑，不知如何下手，經一段時間討論後，有兩組從面積著手。此時教學者引導其他組別去觀察新圖形的對角線剩下的組別再由 $\tan\theta$ 與斜率切入。 **討論過程：**大多是一開始有人先提想法，組員再根據這個想法去檢驗或進行進一步討論。 **解題表現：**學生主要透過論證的方式解題（提出臆測、檢驗臆測、作結論）。利用：(1)面積不一致。(2)$\tan\theta$ 不一致。(3)斜率不一致。	（部分摘錄，詳閱「研究發現」） S15：這跟三角函數有什麼關係阿？ S24：我們再算一次它的面積看看，看看是不是算錯了。 S35：沒錯阿，真的是這樣。 S24：你看，很奇怪喔…這個乙＋丁是 32 對不對？ S26：對阿，我覺得都一樣，你全部加起來還是 64 阿，哪裡不對… S24：不是，你看，新的圖形（⊿乙丁）是 32.5 耶…	同學們覺得很神奇，也很認真想找出為何面積多了 1 平方公分。一開始大多數組別無法在短時間找出圖形的矛盾，經過討論之後，所有的組別都能找出矛盾之處，而且方法不只一種。	圖 5、圖 6	（第六組，利用面積不一致論證） R：你們小組內討論的過程為何？ S35：剛開始看到題目 S15：就隨口說出：「這跟三角函數有什麼關係阿？」但為了解題目，就拼命的去想，然後就會有人丟出方法，就開始討論，假如還是不知道的話就用算的（指計算面積）。 S26：關鍵在於有人先想出頭緒，進而討論是否與解題有關，接著大家討論出方法來。

一、綜觀學生在探究教學中的解題表現

依據資料分析，我們歸納學生在探究教學中使用的五種不同解題策略：

(一)論證

意謂透過先提出臆測（假設或猜想），再使用數學知識論證臆測的有效性解題。例如第五組解「覆蓋問題」（單元二、III）時，先假設「△甲中有一半徑為4 cm 的內切圓，則△甲面積應為88 cm^2」，接著與△甲的實際面積66 cm^2比較，發現實際的面積較小（88 > 66），因此認為△甲不可能存在半徑4 cm 的內切圓，並推論△甲內切圓實際半徑應小於 4 cm（因實際面積較小）（圖1）。

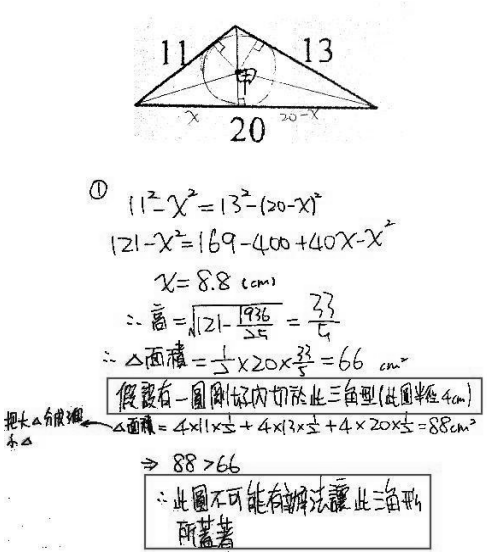


圖 1：第五組先提出假設，再推論是否為真

(二)統整

意謂使用統整知識解題，包括數學學科內外的統整。如第二組用「向量」解「覆蓋問題」（單元二，III）。圖2中，他們先求出

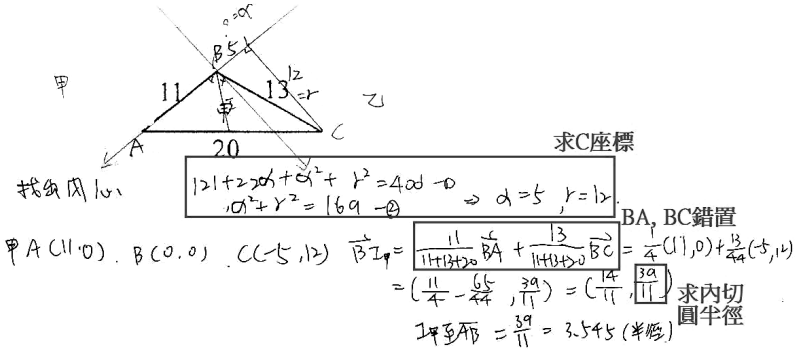


圖 2：學生使用向量解題

其內心座標 $I_{甲}$，由 $I_{甲}$至$\overline{AB}$距離（$I_{甲}$之 y 座標）可得△甲的內切圓半徑長，接著與圓洞半徑4 cm 比較，判斷何者適合用來覆蓋。可惜在代入內心定理時，誤用公式（$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BA}$ 錯置），正確的代入應是$\overrightarrow{BI_{甲}}$ ＝

$$\frac{11}{11+13+20}\overrightarrow{BC}+\frac{13}{11+13+20}\overrightarrow{BA}$$ 。

(三)公式

意謂直接使用三角公式解題，沒有探究的過程。如第一組學生直接使用「和角公式」、「餘弦定理」解單元三、IV「找出圖形中的幾何量」問題，沒有經過臆測、論證等過程（圖3）。

(四)畢氏

意謂使用畢氏定理為主要解題策略。如第五組在「找出圖形中的幾何量」（單元三、IV），靈活的運用輔助線，將△ACD「補成」直角△，再輕易的用畢氏定理求出$\overline{AD}$（圖4）。

(五)直觀

意謂使用直觀想法（初步臆測）或觀察解題，並無進一步的論證或使用三角概念。如第三組解覆蓋問題（單元二、III），直接由觀察選擇三角板乙：「乙比較大，目測的」。

特別說明，上述這些分類考量何者是導致解題成功的關鍵，例如雖然學生在臆測、論證的過程中使用三角公式，但成功解題的關鍵是論證過程，仍將之歸類為「論證」；反之，若解題過程中直接使用三角公式進行解題，缺乏論證過程，則歸類為「公式」策略。

接下來，我們論述學生在這六個單元中

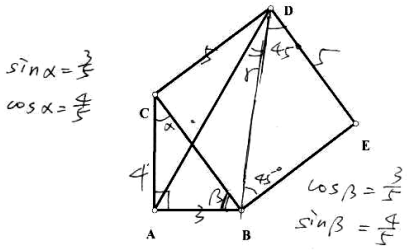


圖 3：第一組直接使用和角公式、餘弦定理解題

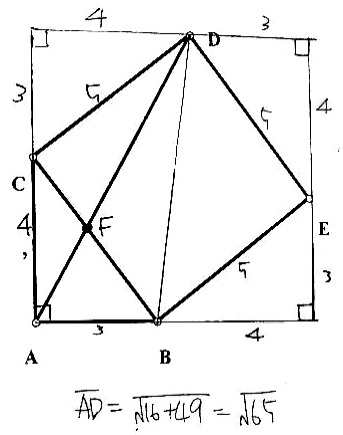


圖 4：第五組用畢氏定理解題

的解題表現。

表3可以發現「論證」策略是學生在探究教學中最主要的解題方式（Total＝72%），在各個單元佔有多數比例。其中單元五的四個活動都是100%，這是因為其活動都是讓學生觀察三角函數圖形，從中找規律，與套用公式無關。「統整」策略的最高比例出現於單元一、III「選擇土地」（57%）。在「選擇土地」中，學生不單以面積大小為考量，他們整合歷史知識，認為正方形土地較集中，有利於農耕。這是由於探究教學開放的環境，學生有機會使用三角以外的知識解題，使得學生的解題更多元或更符合自己的認知基模。「公式」策略的最高比例出現於單元二、IV（57%）。在此題中，學生能夠直接套用正弦定理、假設未知數解題。雖然直接套公式與研究預期相悖（無探究過程），但卻可在「綜合和溝通」階段提供引發討論的契機（如表1）。另外在少數活動（如單元二、I，表1），學生使用「畢氏定理」解題（Total＝5%）。畢氏定理在學生的探究過程扮演很重要的角色，除了能單獨作為解題策略外，也扮演「論證」策略的開端，因為不少學生都會從畢氏定理開始思考，再進一步獲得精緻的想法。「直觀」出現的比例也不多（Total＝3%），但直觀也可引發學生進一步的探究，只是較嚴謹的解題不應僅用直觀結果說明。

有鑑於「論證」是探究教學中最具特色的解題策略，進一步舉例說明如下。

二、學生透過論證解面積 64＝65？問題

「論證」是探究教學中，學生解題的最大特色。以「面積64＝65？」為例，學生的解題過程，是先對題目有一些猜想（臆測）；然後開始著手去證明這個想法（論證），透過證明後的結果反駁或接受原先的猜想；接著透過不同組別或老師的「挑戰」，精緻自己的解題思維或擴展自己的解題思維；並有機會探索更深入的問題（新探究問題）。

(一)準備和聚焦

此階段的主要工作是幫助學生聚焦欲探究的主題。教學者先回顧過去所學，接著引導學生注意這兩個面積看似一致，但結果卻不相同的圖形，引起學生探究的動機：

（I：教學者；Sn：座號為 n 的學生）

（教學者先帶領學生回顧過去所學：如六個基本三角函數值）

I：很好，接下來注意看，我在三公分的地方，切一刀，然後上半部讓它變成兩個一樣直角三角形，下半部變成兩個一樣的梯形，然後把直角三角形跟梯形接在一起，最後變成一個長方形。好，注意看喔，現在面積是多少？

S7：1、2、3…老師是65耶！

S：哇，好神奇喔！（多數學生感到訝異）

I：很神奇對不對，現在請你們小組探究看看，為什麼他會變成這樣？（發下學習單）

表 3：學生在六個單元中的解題表現

	單元																							
	一				二				三				四				五				六			
活動	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	Total
論證	100	72	43	57	57	57	43	29	58	58	86	42	100	100	57	86	100	100	100	100	71	71	57	72
統整	0	14	57	0	0	0	29	14	14	14	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	29	29	43	11
公式	0	0	0	43	14	43	0	57	0	14	0	29	0	0	14	14	0	0	0	0	0	0	0	10
畢氏	0	0	0	0	29	0	0	0	14	14	0	29	0	0	29	0	0	0	0	0	0	0	0	5
直觀	0	14	0	0	0	0	29	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

註：%, $N=7$ 組

(二)執行探究

在此過程，學生提出臆測，藉由論證反駁或支持這些臆測（反駁臆測後，再提出新臆測）。以第六組為例（第六組的想法很特別，有別於其他組別），他們的想法頗直觀，根據題目的「面積不一致」，他們由「面積」著手（臆測1與臆測2），合併計算⊿乙丁與分開計算⊿乙、⊿丁，獲得不同面積（論證2），推論新圖形有誤（圖5）。

（第六組）

S15：這跟三角函數有什麼關係阿？

S20：不知道...（組員彼此疑惑的看著大家）

臆測1：題目面積計算有誤

S24：我們再算一次它的面積看看，看看是不是算錯了？

論證1：題目面積計算無誤，反駁臆測1

（大家紛紛再計算一次面積：正方形＝8×8＝64；長方形＝13×5＝65）

S35：沒錯阿，真的是這樣。

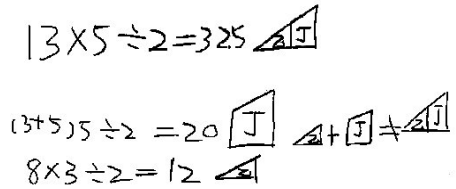


圖 5：第六組的探究成果

S15：這個題目出錯了吧（笑）...

（大家獨自思考約二分鐘）

臆測2：再次認為面積有誤

S24：再算一次看看...（指計算面積）

S26：剛不是算過了，就沒錯阿...

S24：不是，這次我們分開來算算看，把甲、乙、丙、丁分開來算...

S26：我覺得都沒差...

S15：隨便，算算看阿，反正我也不知道該怎樣算。

（分別計算⊿甲、⊿乙、梯形丙、梯形丁面積，獲得⊿甲＝⊿乙＝12，梯形丙＝梯形丁＝20）

論證2：由（⊿乙＋梯形丁）≠（⊿乙丁）推論拼湊後的長方形有誤

S24：你看，很奇怪喔...這個乙＋丁是32對不對？

S26：對阿，我覺得都一樣，你全部加起來還是64阿，哪裡不對...

S24：不是，你看，新的圖形（⊿乙丁）是32.5耶...

S20：什麼...什麼...我聽不懂...

S24：就是乙丁這一塊是13乘以5除以2，等於65除以2，面積是32.5；可是你假如只算丁的話，上底加下底然後乘以高除以2，會等於20，然後只算乙的話，就是8乘以

3除以2，會等於12，這邊加起來只有32，可是這邊多了0.5，所以不一樣（指拼湊後的圖形有誤）…

第三組的探究過程具代表性，與其他組別探究過程相似（第一、二、四、五組），都是經教學者引導他們觀察新圖形後，才針對「長方形中間有空隙」的臆測進行論證，由訪談得知，教學者曾在「準備和聚焦」先複習三角函數的基本知識，他們便聯想到用「tanθ」的定義進行論證（圖6）。

（第三組）

I：好，我給你們提示，你們有沒有覺得新的這個圖形怪怪的？

S40：怪怪的？

（大家盯著學習單的新圖形看）

臆測：長方形中間有空隙

S17：…有空隙!（大叫）

S31：什麼？

S17：你注意看，這條線有點歪（新圖形的對角線非直線），中間有空隙啦…幾乎看不出來，你要注意看…

S：對耶…（大家紛紛表示贊同）

論證1：由觀察的結果說明拼湊後的長方形有誤

S36：好阿，有空隙又怎樣，難道就直接說有空隙，所以面積不一樣喔？

S31：對阿，阿不然…

S36：就這樣喔…這樣（僅靠觀察出空隙）不是數學吧…

（思考一分鐘後）

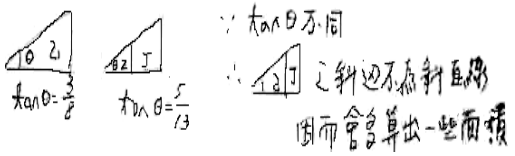


圖 6：第三組的探究成果

論證2：由⊿乙與⊿乙丁的 tanθ 不一致，推論拼湊後的長方形有誤

S17：我們可以用剛剛學的三角函數阿，你看小的三角形（⊿乙）跟大的三角形（⊿乙丁）函數值（tanθ）不一樣，這樣就可以用來說他們中間有空隙。

上述有個特別之處，他們認為論證1不夠好（僅靠觀察），反駁論證1，提出較精緻的論證2，這個發現將在其後的「討論」章節，進一步說明。

(三)綜合和溝通

此階段教學者刻意選擇兩種不同的解法的第六組與第三組進行發表，並讓其他學生（或教學者）提出挑戰，讓報告組別有機會澄清想法，藉此獲得更精緻的思維。

第六組的解題，其實蘊含「假設新圖形正確，則舊圖形與新圖形面積應一致」（假設：（⊿乙＋梯形丁）＝（⊿乙丁）），但他們在「執行探究」中，沒有明確說明，教學者藉由提問（挑戰），引導學生精緻他們的想法，使他們明白自己的推論是基於假設「面積拼湊無誤」：

（第六組上台分享後）

I：好，你們都懂他們的意思嗎？其他同學有沒有要問的？

（學生沉默沒有回應）

挑戰：為何面積（（⊿乙＋梯形丁）≠（⊿乙丁）），就可說明拼湊後的新圖形有誤？

I：那這樣我要問了喔，為什麼兩個面積（（⊿乙＋梯形丁）≠（⊿乙丁））算出來不一樣，就可以說他們有問題，他們本來就面積有問題了阿（不一樣），不是嗎？

（第六組討論後）

S24：因為你看喔...你看喔...如果這樣拼湊是正確的，你面積一定會一樣((⊿乙＋梯形丁)=(⊿乙丁))，可是你拼湊出來明顯不一樣，代表你這樣拼湊就有問題嘛...

I：好，所以你其實是有假設的嘛...你假設了什麼？

S24：假設什麼？

I：就是你剛剛說「如果這樣拼湊是正確的」...這句話是什麼意思？

S24：就是這樣...這樣...阿，如果這樣是對的(指假設面積拼湊無誤)...

I：所以這是不是你的假設？

S24：嗯!

I：整個來說，你就是先假設拼湊是正確的，但是算出來卻不正確，你就否定你的假設了嘛...（意指先假設面積拼湊無誤，然與計算的結果不符，反駁假設)。

第三組分享後，S3提出有趣的挑戰，他認為斜率也可用來說明新圖形的對角線非直線，第三組學生也同意這樣的論點，但他們無法進一步說明原因，教學者便介入說明(因為都是「鉛直分量÷水平分量」)。

（第三組上台分享後）

挑戰：可否用斜率來證明？

S3：老師我想問一定要用 tan 來說明嗎？我想要用斜率可不可以？

（教師請 S3上台畫圖說明）

S3：我是想說如果你看⊿乙這一塊，它的斜率是3÷8，是$\frac{3}{8}$；然後如果是大三角形（⊿乙丁）它是5÷13，很明顯就不一樣（$\frac{3}{8}\neq\frac{5}{13}$），所以這樣的話，這邊（新圖形，長方形的對角線）就一定不是直線，對不對？

（第三組討論後）

S17：我想應該是可以吧...

I：為什麼？

S17：因為，我們用 tan 算出來也是$\frac{3}{8}$跟$\frac{5}{13}$，所以我想應該是可以的...

I：所以你覺得用「tanθ」跟「斜率」有什麼差別？

S17：沒有差別吧...

I：那我可以說「tanθ=斜率」囉？

（沒有人回應）

I：好，那老師來講，這個 tanθ 和斜率其實他們概念可以互相連結的，因為它們都是「鉛直分量÷水平分量」，所以你們才可以分別計算 tan 跟斜率都得到一樣的答案...

(四)評估和延伸

在此階段，教學者帶領學生回顧整個探究過程，並提出可供進一步探究的問題。教學者先引導學生回顧三種證明新圖形有誤的方式（面積、tanθ、斜率），並且讓學生明瞭他們的論證都是聚焦證明新圖形有誤：

I：我們來回顧一下剛剛你們的分享，你們是不是總共提出了兩種做法？

S32：老師不對，是三種啦!

I：(想了一下）對對...是三種，後來分享後，有人又提了一種嘛...（笑）好，哪三種？

S：面積、tan、斜率（學生此起彼落的回答）…

I：總共是面積、tan、斜率這三種嘛…好…然後，你們有發現你們的解題方式都有點像嗎？

（學生疑惑的表情）

S19：tan 跟斜率還有點像，不過面積就不一樣了吧…

I：不對，我不是要說這個，好，我問你們，你們在解這些題目的時候，其實都在證明什麼？

S17：證明面積不一樣…

I：更具體的來說呢？

（沒有人回應）

I：你們有沒有注意到，其實你們都在證明「新的圖形不是長方形」（指面積有誤），然後有不一樣的證明方式嘛，有人用面積，有人用 tan…對不對？

接著教學者請學生分享探究過程的心得，讓不同組別可以互相學習彼此的探究：

I：好，這些都是論證的方式，就是用來說明你的數學想法的一種模式…現在…我要請你們分享在這個探究過程學到了什麼？

S15：就是在想問題的時候，有人會先丟出一些關鍵的想法，然後大家就會討論這些想法，就可以找出答案…

I：很好，所以在想這些問題的時候你們需要一些猜測的嘛，先想想看可能是什麼，在去找方法證明它。那你們對這個問題還有沒有什麼想法？

S40：有時候亂猜也可以找到答案。

教學者嘗試引導學生，發展新的探究問題，但學生並無想法，教學者便詢問學生是否存在特殊的切割方式，可真的重新拼湊出長方形無誤，可惜在後來的學習單中並沒有學生回應此問題。

新探究問題：是否存在特殊切割比例，讓正方形＝長方形

I：從這個題目你還可以想到什麼問題嗎？

（學生沒有回應）

I：其實你們也可以想一個問題，有沒有一種特殊的切割比例，讓正方形真的可以用這樣的方式，形成一個長方形？回去想想看，有想法的人可以寫在學習單裡面，我會加分。

（學習單中並沒有人回答此問題）

上述我們看到解題過程中，學生如何由「論證」檢驗產生的「臆測」，以及如何透過「挑戰」發展知識。

伍、討論與結論

本研究中，可以發現學生的多元解題表現。從這些解題表現，我們發現多數學生能從先備知識出發，發展符合自己思考基模的解題策略，並且能由不同的思考路徑來解題。依據本文前言（Nolen, 2003），這似乎寓意探究教學是好的教學策略。

本研究的最主要貢獻，在於揭露「論證」在探究教學中的重要角色。它不僅是學習過程，也是解題成果。換言之，學生在探究教學的過程中必須使用論證（提出多種想法，解釋為何想法為真），同時也用論證的方式完成解題（使用數學知識完整論述）。過去的關於探究教學的文獻，僅聚焦在：活動設計（Peressini & Knuth, 2000）、師生互動（Goos,

2004）或結合其他因子（如 Siegel, Borasi & Fonzi, 1998討論探究與閱讀），並沒有深入探討論證在探究中扮演的角色。茲就此內容，進一步討論如下：

學生的解題表現中，能普遍使用論證方式解題。可能是由於探究教學的問題較開放、非例行性、需要學生作判斷，以及學生必須主動的思索問題，因此猜測（guess）、邏輯推理與反證等論證技巧，自然流露於解題過程中。由此觀之，探究教學似乎提供學生使用論證的空間，這不但有助於理解數學觀念，更與 NCTM（2000）的願景相呼應：

> 教師幫助學生擁有製造、精鍊與探索臆測，並且使用有效的邏輯推理技巧來確認或否定這些臆測的機會，使學生成為靈活（flexible）與富有策略（resourceful）的解題者（p. 2）。

我們歸納臆測、論證、挑戰與探究教學的關係（圖7）。其中主要的發現在於當論證不夠完整時，學生可反駁原論證，產生新論證（如面積64＝65？問題，第三組執行探究的過程）。

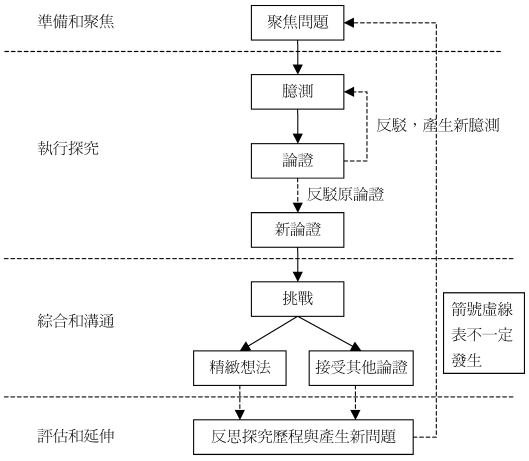


圖 7：探究教學中的解題模

陸、建　議

上面我們已提及臆測在探究教學中的重要性，一些學生無法產生臆測的原因可能是學生不瞭解題意、缺乏相關背景知識或執著於使用公式等，教師應根據學生的困難，適時引導學生，幫助學生產生臆測；對於毫無想法的學生，可提出一些關鍵問題，如「面積64=65？」問題，引導學生觀察圖形，刺激學生思考。

在研究結果中，我們發現學生的特殊解法，多基於他們的先備知識發展而來（如表1，第五組從畢氏定理發展解題策略），而這些不同的解題方式，提供探究中挑戰、澄清想法的機會，因此我們不但該引導學生從先備知識產生解題想法，更應該提供適當先備知識予學生（以三角單元而言，畢氏定理是很重要的先備知識，它是學生思考解題策略的出發點），如此可提升學生的探究層次。

透過本研究我們發現一些重要且值得未來研究的議題。首先不同程度學生在探究解題中的表現，值得進一步探討。因為我們發現有些特殊解法，是來自中成就學生（如圖4）。此外數學程度不佳、但溝通能力佳的學生，能夠在討論時提出許多想法（如表1，S6），這有助探究的進行。其次，本研究中，已有部分學生具備若干三角概念，可帶領小組討論，但倘若缺乏這些學生，是否仍可成功進行探究？有鑒於探究教學文獻的缺乏，一些不同探究教學模式、活動設計與學生在這些探究模式的學習，都應該更廣泛的討論。

柒、研究限制

本研究在有限的參與者、教學主題與時間下進行，因此不宜將研究發現作過度推論，如本研究個案為高二學生，已學習過三

角內容，但對於初次學習三角的高一學生是否有同樣發現，無法推論；而三角以外的探究教學是否能有同樣成果，需由讀者透過實務驗證判斷。

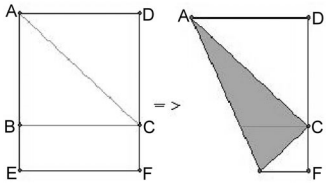
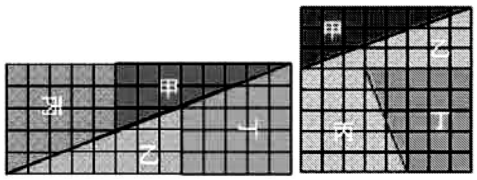
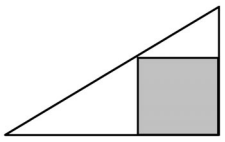
參考文獻

1. 毛爾（Maor, E.）著（2000）。毛起來說三角（*Trigonometric delights*，胡守仁譯）。台北市：天下文化出版社。（原作 1998 年出版）。
2. Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education, 13*(1), 1-12.
3. Barrow, L. H. (2006). A brief history of inquiry: From Dewey to standards. *Journal of Science Teacher Education, 17*, 265-278.
4. Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex.
5. Blackett, N. & Tall, D. O. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 144-151). Assisi, Italy: PME.
6. Cavanagh, M. (2008). Trigonometry from a different angle. *The Australian Mathematics Teacher, 64*(1), 25-30.
7. Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 201-217.
8. Diezmann, C. M. (2004). Assessing learning from mathematics inquiry: Challenges for students, teachers and researchers. *In proceedings mathematical association of victoria conference* (pp. 80-85). Melbourne: Mathematical Association of Victoria.
9. Doerr, H. M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 3-24.
10. Fisher, L. C. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 157-168.
11. Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258-291.
12. Lederman, N. G. & Niess, M. L. (2000). Problem solving and solving problems: Inquiry about inquiry. *School Science and Mathematics, 100*(3), 113-116.
13. Marzano, R. J., Brandt, R. S., Hughes, C. S., Jones, B. F., Presseisen, B, Z., Rankin, S. C., & Suhor, C. (1988). *Dimensions of thinking: A framework for curriculum and instruction*. Alexandria VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
14. Minstrell, J. (2000). Implications for teaching and learning inquiry: A summary. In J. Minstrell & E. van Zee (Eds.), *Inquiring into inquiry learning and teaching in science* (pp. 471-496). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
15. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
16. Nolen, S. B. (2003). Learning environment, motivation, and achievement in high school science. *Journal of Research in Science Teaching, 40*(4), 347-368.
17. Quinlan, C. (2004). Sparking interest in trigono-

metry. *The Australian Mathematics Teacher, 60*(3), 17-20.

18. Peressini, D. & Knuth, E. (2000). The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry. *Teaching Children Mathematics,* 391-397.
19. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
20. Siegel, M., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(4), 378-413.
21. Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research*. Newbury Park, CA: Sage.
22. Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 92-112.
23. *Webster's Third International Dictionary*. (1986). Springfield, MA: Merriam-Webster.
24. Whitin, P. (2006). Meeting the challenges of negotiated mathematical inquiry. *Teaching and Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice, 21*(1), 59-83.
25. Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking revealed in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(3), 222-255.
26. Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a functional based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 125-147.
27. Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science, 19*, 219-245.
28. Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 297-321.

附　錄　教學單元、活動與說明

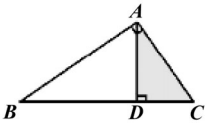
單元	活動	說明
一：基本三角函數概念	I	(1)你是否知道這張 A4 紙的大小規格？可以使用各種方法測量。 (2)如何從 A4 紙中摺出最大正方形？過程中產生了什麼圖形？它的邊長或面積有何關係？ (3)用 A4 紙張摺出正三角形（摺紙的過程中可將有出現過的面積、邊長、角度計算看看有何發現）。  說明：本題可藉由反覆動手操作，求出解答。例如學生可利用右圖推知邊長比 1：$\sqrt{2}$ 。或直接測量，利用寬：長≒1：1.41 亦可。折正三角形部分，則可運用中垂線到兩端點等距與 30°－60°－90°特殊直角△邊長比求出。延伸探究部分，可讓學生探討如何證明或找出 A4 紙中最大的正三角形。 $\overline{PB}=\overline{OP}\sin(60^\circ-\alpha)$
	II	**面積 64＝65？**仔細看看下面兩個圖形。面積為 64 的正方形（8 × 8），經過剪裁與重新拼湊後，變成長方形，然而其面積卻變成了 65（13 × 5），你同意這個結果嗎？請詳細說明你的想法與理由。  說明：本題探討為何一個面積 8 × 8 的正方形，經過重新剪裁與拼湊後，卻變成面積 5 × 13 的長方形。其目的是讓學生藉由探索本題的過程，回顧三角基礎概念，例如 $\tan\theta$ 的定義、相似三角形等。
	III	**選擇土地。**國王擁有一塊直角三角形的土地，兩股長分別是 2 公里與 1 公里，國王將它分成白色與灰色兩部分，要讓你選擇其中一部份作為賞賜，已知灰色部份是一個正方形。你要選擇哪一部份的土地？請說明為何做此決定？  說明：本題可利用同角度的 tan 值相等，或兩個小△均與大△相似為條件列式，並不難，有趣之處在一些學生並非選擇面積較大的土地，他們考慮土地利用的便利性。

IV **設△ABC 為直角三角形，∠A＝90°，今自頂點 A 作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ ，令垂足為 D，若 $4\overline{CD}-8\overline{CA}+3\overline{CB}=0$ 時：**

(1)試求 ∠C 為幾度？

(2)解題過程為何？你做了哪些臆測？如何修正這些臆測？

(3)請自行加上條件，使△ABC 面積可以被求出。



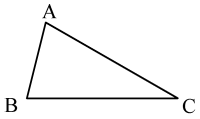
說明：本題可利用三角函數的定義，如 $\cos C=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}$ ，解上述方程式求出 ∠C；本題對學生有些難度，學生無法立即想出，他們需要經反覆探索、臆測、討論等探究過程後獲得解答。第三小題則是透過讓學生擬條件的機會，創造探究的議題。

I **平分土地。**如下圖△ABC 是老農夫擁有的一塊田地，$\overline{AB}=7$ km，$\overline{BC}=8$ km，$\overline{AC}=9$ km。

(1)老農夫想將這塊地，平分給他的兩個兒子，請問該怎麼做？

(2)承上，求分割線的長度為何？

(3)除此之外，還有其他分割的方式嗎？

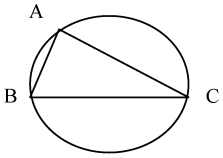


說明：本題可以利用△中線將面積平分，並利用定△ABD 以及△ABC 的 ∠B 餘弦值相等，求出中線長。第三題是開放式問題，讓學生可以發揮創意，探究不同的分割方式。

II 如下圖，圓形游泳池中，A、B、C 為救生員所在位置，依照三位救生員的位置以繩索為成一個三角形區域當作兒童專用池。已經測量出 ∠A＝30°，a＝10 m，b＝20 m（a, b 分別為 ∠A、∠B 對應邊長）：

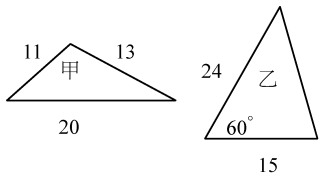
(1)試求出圓形游泳池之面積。

(2)需要用到多長的繩索？解此題時你們用到哪些三角函數的定理或概念？



說明：本題可利用正弦定理，如 $\frac{10}{\sin 30^\circ}=\frac{20}{\sin B}=2R$ ，求出面積及 $\overline{AB}$ ；此外利用餘弦定理亦可計算出 $\overline{AB}$ 。

III **覆蓋問題。**園遊會上，攤位的桌子出現一個半徑 4 公分的圓洞，此時恰好有兩個三角板甲、乙可使用，如下圖，請問選擇哪一個三角板才能完全覆蓋圓洞，詳細說明理由。



說明：本題主要在探討三角形面積與內接圓面積間的關係。解決這個問題有兩個關鍵，第一是能計算三角形的面積（可利用海龍公式），第二是能計算三角形內接圓的面積（或半徑）。本研究中的學生，大致都依循這兩個方向來解題。

IV **已知一個△的三邊長有以下關係：(b+c):(c+a):(a+b)＝5:6:7，試求出 sinA:sinB:sinC。**

(1)你們的初步解題想法為何？

(2)最大角是哪一個？運用了什麼先備知識？

(3)你們小組可以判定這是什麼三角形嗎？

說明：本題的關鍵在學生能靈活應用正弦定理，知道 a:b:c＝sin*A*:sin*B*:sin*C*，如此可以透過假設 b+c＝5t、c+a＝6t、a+b＝7t，得知 a:b:c。

三：和角、倍角與半角公式

I $\sin(0+\frac{\pi}{6})=\sin 0+\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\rightarrow\sin(A+B)=\sin A+\sin B$

討論上述式子是否正確？請詳細說明理由，並舉適當的例子說明。

說明：本題希望同學提出論證，因此學生可以舉出反例，或是用其他較嚴謹的方式證明。

II **本題請小組討論如何畫出圖形，有一支 50 公尺長的旗桿，豎立在 40 公尺高的塔上，某人從地面上的某個地點 P 測得旗桿與塔所張的角度相等，**

(1)你們的圖形畫的是否正確？若不正確，錯在哪裡？

(2)請求出某地 P 與塔底的距離。

(3)這題需要用到什麼三角函數概念？

說明：本題可以利用倍角公式解題，先假設某地 P 與塔底的距離為 x，可由 $\tan\theta$、$\tan 2\theta$ 列方程式求出。解題後，教師再與學生討論倍角公式。

III **綜合討論**

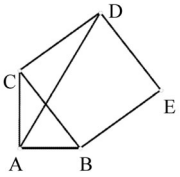
(1)寫出和角、倍角與半角公式。

(2)討論和角、倍角與半角公式間的關係。

(3)如何求出 cos15°？

說明：本題是將上述題目使用的公式，做綜合性的討論，讓學生更加明瞭這些公式，避免記憶。倍角公式是和角公式角度相等的特例；半角公式則可由倍角公式推得，如 $\cos 2A=2\cos^2 A-1$，$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$。問題(3)可利用半角公式求得；若不使用公式則可利用繪圖，將 30°－60°－90°直角△底邊延長，作等腰△求出。不同解題方式可提供學生論證與挑戰的機會，藉此整合這些概念。

IV **找出圖形中的幾何量。**已知△ABC 為一直角三角形，□BCDE 為以 $\overline{BC}$ 為一邊向外作出的正方形，若 $\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=4$，$\overline{AB}=3$，可以求出哪些幾何量？盡可能寫出來。

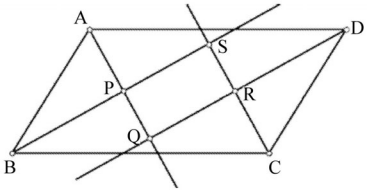


說明：本題是整合性的問題，學生可以在此開放性題目，自我擬題與求解。我們預期學生能找出此圖形中的「面積」、「長度」、「角度」等訊息，一般而言，求 $\overline{AD}$ 是一個關鍵，需較多的三角概念。

I **下圖是一塊平行四邊形土地，若以 ∠A、B、C、D 的角平分線圍出一塊小的四邊形土地 PQRS。**

(1)請討論並說明四邊形 PQRS 是什麼四邊形。

(2)假設∠BAD＝α、 $\overline{AB}$ ＝a、 $\overline{AD}$ ＝b，試以 a, b, α 求出四邊形的面積。

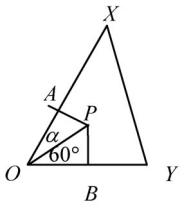


說明：本題可利用 ∠A+∠B＝180°，$\frac{1}{2}$∠A+$\frac{1}{2}$∠B＝90°，推知 ∠P＝90°，同理可得 PQRS 為矩形。問題(2)可利用 $\overline{AQ}=b\cos\frac{\alpha}{2}$ ，$\overline{AP}=a\cos\frac{\alpha}{2}$ ，$\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}$ ，同理可求出 PQRS 之面積，在表示面積過程，需使用到積化和差。

II **設 $0<\alpha,\beta<\pi$，討論 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ 與 $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$ 的大小關係。**

說明：本題有許多不同的討論方式，例如假設 $\alpha=\beta$ 時，兩者關係為？或透過 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 與 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ 作比較。

III 設∠XOY＝60°，P 為∠XOY 內部任一點，$\overline{PA}\perp\overline{OX}$ ，$\overline{PB}\perp\overline{OY}$ (1)求 $\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{\overline{PA}+\overline{PB}}$ ＝？(2)嘗試改變題目的條件，會造成什麼影響？能找出什麼規律嗎？



說明：本題可假設∠AOP＝α，∠POB＝60°－α，$\overline{OA}=\overline{OP}\cos\alpha$ ，$\overline{OB}=\overline{OP}\sin\alpha$ ，

$\overline{PA}=\overline{OP}\cos(60^\circ-\alpha)$ ，$\overline{PB}=\overline{OP}\sin(60^\circ-\alpha)$ ，

$\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{\overline{PA}+\overline{PB}}=\frac{\overline{OP}(\cos\alpha+\cos(60^\circ-\alpha))}{\overline{OP}(\sin\alpha+\sin(60^\circ-\alpha))}$（和差化積公式）$=\frac{2\cos30^\circ\cos(\alpha-30^\circ)}{2\sin30^\circ\cos(\alpha-30^\circ)}=\cot30^\circ=\sqrt{3}$

第(2)題是想引導學生發現 $\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{\overline{PA}+\overline{PB}}=\cot\frac{\theta}{2}$ 與 p 點位置無關，此題對學生有些難度，但可提供許多論證的空間。

IV **綜合討論**

(1)寫出積化和差與和差化積公式。

(2)討論如何得到這兩個公式？

說明：本題主要是和同學討論此單元的公式，並瞭解他們的關係：積化和差是由和角公式推導而來，和差化積也可由積化和差推出。

五：三角函數的圖形

I　y＝sin$x$ 圖形

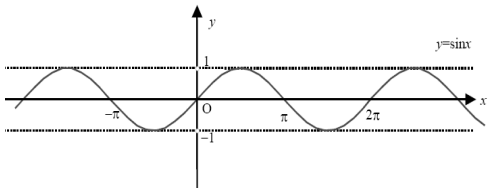
(1)觀察下面的表格與圖形，說說看你發現了什麼？

(2)利用正弦函數 y＝sin$x$ 的圖形描繪下列圖形：$y=1+\sin x$、$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$的圖形、$y=2\sin x$、$y=\sin 2x$

(3)說說看從上面這些描繪的圖形發現了什麼？

(4)你能利用 y＝sin$x$ 的圖形，來討論 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ 與 $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$ 的大小關係嗎？

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin$x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
sin$x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	

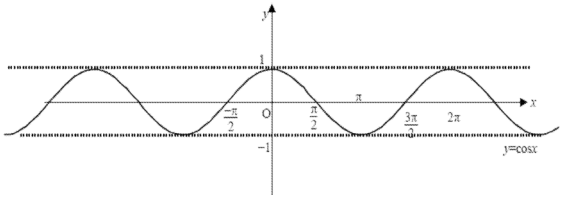


說明：本題主要讓學生觀察正弦函數的圖形，從中歸納正弦函數圖形的特性，例如週期、振幅、圖形的平移等；並在瞭解此圖形後，用來解上個單元的問題。

II　y＝cos$x$ 圖形

(1)觀察下面的圖形，說說看你發現了什麼？

(2)它與 y＝sin$x$ 圖形有何關係？

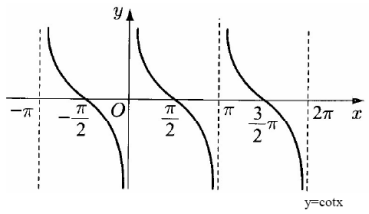


說明：本題是讓學生觀察餘弦函數的圖形，從中歸納餘弦函數圖形的特性，並與正弦函數作比較。

III　y＝tan$x$、y＝cot$x$ 圖形

(1)觀察下面的圖形，說說看你發現了什麼？

(2)討論 y＝tan$x$ 與 y＝cot$x$ 圖形的關聯。

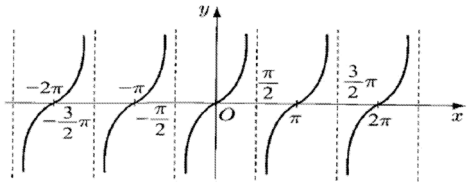


說明：本題是讓學生觀察正切與餘切函數的圖形，從中找出他們的規律與比較兩者的關係。

IV　y＝sec*x*、y＝csc*x* 圖形

(1)觀察下面兩個圖形，說說看你發現了什麼？

(2)討論 y＝sin*x*、y＝cos*x*、y＝sec*x* 與 y＝csc*x* 間的關係。



y=tanx

說明：本題主要是透過觀察，讓學生瞭解正割與餘割函數圖形的關係，並將六個不同函數圖形互相比較。

六：三角測量

I　**某人向一山峰連測三次的仰角，首次測得仰角為 θ，前進 600 公尺，再測得仰角為 2θ，又向山峰前進 $200\sqrt{3}$ 公尺，再測得仰角為 4θ，試求 θ 之值及山高。請小組討論如何將圖形畫出，你使用什麼方法解決這個問題？**

說明：本題可利用餘弦定理、二倍角公式以及 30°－60°－90°的直角三角形邊長比關係求出，題目對學生有些許難度，但有很多討論的空間。

II　**開挖山洞。**若你們小組接獲要在某座山底打通一個隧道的任務，為了節省時間，擬從山的兩側同時動工，你要如何利用三角學，確保兩側打通後，隧道能順利接在一起？請說明你們的設計，並畫出簡單的圖形。

說明：本題的關鍵在於從山的兩側同時開挖，要確保挖完後形成一直線。學生要能夠使用 SAS 決定唯一三角形的條件作答，意即開挖前先決定好 θ，a，b，（已知），再利用餘弦定理、正弦定理求出 ϕ，β（所求），解法如下。$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$，$\frac{c}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin\phi}$，$\sin\phi=\frac{b\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}$，同理可求 sin$\beta$，則 ϕ，β 可得出。本題對學生難度頗高，但學生可以用其他的方式解決此真實情境問題，過程中充滿許多論證的機會。

III　請自行設計一題有關三角測量的問題，並透過抽籤，請其他小組上台解題。

說明：透過擬題的過程，幫助學生精練所學的概念。思考要如何擬題時，當中有許多的臆測與討論。

註：各單元教學時間：2006/04/01, 2006/04/08, 2006/04/15, 2006/04/22, 2006/04/29, 2006/05/06。

Investigating the 11th Grade Students' Problem Solving Performance in an Inquiry Approach Trigonometry Teaching

Erh-Tsung Chin[1], Yung-Chi Lin[1] and Chun-Yuan Chen[2]

[1]Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

[2]Li-Min High School

Abstract

The purpose of this study was to investigate the high school students' "problem solving performance" when getting involved in the inquiry approach trigonometry teaching. Qualitative case study method was adopted as the research design and the data collection included videotaped and audio-taped classroom teaching practice, group interviews, teacher's journals and students' work-sheets. The participants were forty-three 11th grade students of a national high school in the middle of Taiwan. Twenty-four hours extra-courses were implemented in six weekends. The research results indicated that there appeared five problem solving approaches: (1) via argumentation; (2) using integrated knowledge; (3) using trigonometric formula; (4) using Pythagorean Theorem; (5) intuition.

Key words: Inquiry, Problem Solving Performance, Trigonometry