科學教育學刊
2009, 第十七卷第六期, 509-530

Chinese Journal of Science Education
2009, 17(6), 509-530

整合二維空間幾何與面積概念的課程與教學試驗

黃幸美
台北市立教育大學　課程與教學所

（投稿日期：民國 98 年 7 月 1 日，修訂日期：98 年 12 月 15 日，接受日期：98 年 12 月 30 日）

摘要：本研究目的在於探討三個不同的二維空間幾何與面積概念整合的實驗課程，對於增進兒童理解面積公式與解決面積問題能力的影響。研究對象取自台北市一所公立小學四個班級之 120 位四年級兒童，隨機分派至三個教學實驗組（面積組、幾何與面積組、幾何組）與控制組。研究結果發現，幾何與面積測量連結的課程與教學，有助於培養兒童的面積問題解決能力，此助益效果尤其彰顯在解決面積概念理解的問題。其他實驗課程與教學的助益效果，則未呈顯著。從晤談兒童的資料分析，實驗組兒童比控制組兒童傾向於使用面積公式解題，以及改變原先低效率或無效率的策略，以使用面積公式解題。本研究對增進兒童的面積概念理解與問題解決能力，提出相關的課程與教學建議。

關鍵詞：二維空間幾何概念、面積測量、概念理解、問題解決

壹、緒　論

面積是一個幾何量，表徵一個有限且封閉的區域內平面的大小（譚寧君，1995）。面積測量與人類的生活應用息息相關，為被應用最廣泛的一種測量，也成為當前學校數學課程重要的內容（Martin & Strutchens, 2000）。根據九年一貫課程的數學領域綱要，面積問題為幾何主題內容之一，而且三年級兒童以覆蓋平方單位的活動，學習面積的基本概念，四年級兒童則需學習正方形與長方形的周長與面積公式（參見幾何主題能力指標4-s-09）（教育部，2003）。

雖然面積測量的重要性普受數學教育學者重視，但是兒童在解決面積測量問題上的表現卻不盡理想，林碧珍與蔡文煥（2003）分析台灣1601位四年級學生在 TIMSS 2003（The Trend in International Mathematics and Science Study）面積測量解題的表現，指出：在解決面積與周長的問題上，台灣學生的平均通過率為41.2%，而國際（23個參與國家學生）之平均通過率為29.4%。雖然台灣學生的平均通過率略高於其他國家學生，但是面積卻是台灣兒童表現最不理想的測量概念之一，而且約有五成的學生尚未能正確區辨

面積與周長的概念與公式。由此可見，加強四年級兒童的面積問題解決能力，值得數學教育學者關注。

由於兒童的面積概念學習，主要來自於學校的數學教育（Outhred & Mitchelmore, 2000），因此，兒童解決面積問題的能力低落現象，學校數學的課程與教學缺失，難辭其咎。在課程方面，數學教育學者指出：面積概念包含幾何概念（Inskeep, 1976），舉凡基本圖形的性質、全等概念與幾何的移動（平移、翻轉、旋轉）、圖形的切割與組合等二維空間幾何知識，皆為學習面積測量的重要基礎，尤其對於建構各種基本圖形（例如：長方形、平行四邊形、三角形等）的面積公式，更不可或缺（Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS], 2001; Craine & Rubenstein, 1993; Fuys, Geddes, & Tischler, 1998; Rowan, 1990）。可是檢視學校數學的面積教材與教科書，面積測量與幾何概念常分別以不同的單元呈現與分開教學（黃幸美、張汶后，2009；Kordaki & Balomenou, 2006）。亦即，當前學校數學的面積教材，並未整合幾何概念與面積測量。此外，往昔數學教科書所呈現的面積測量問題，常為直接套用公式即可完成解題，並未要求學生從解題過程中思索面積測量的意義（黃幸美、張汶后，2009）。

另一方面，探討整合面積測量與幾何相關概念的教材設計之實徵研究，亦相當有限。在系統性的研究方面，Fuys 等（1988）根據 Van Hiele 的幾何概念發展理論，對六～九年級學生學習幾何概念進行三年的系統性分析，其研究指出學生的幾何概念發展的層次，影響其面積概念與公式的理解。雖然此研究針對增進學生幾何能力發展層次的課程與教學提出建議，但是對於兒童如何建構面積概念，以及整合幾何與面積概念的教材是否能有效地培養學生理解面積公式與解題能力，皆缺乏深入探討。在課室教學研究方面，雖有學者建議結合二維空間幾何知識，以發展兒童面積公式的概念（Burns & Brade, 2003; Craine & Rubenstein, 1993; Rowan, 1990; Schifter, Bastable, Russell, & Woleck, 2002），但是對於哪些幾何概念需要與面積測量作整合，以增進兒童建構面積公式與解決面積問題的能力，皆缺乏實徵研究。

在面積教學方面，教師傾向依賴教科書所提供的問題作教學（譚寧君，1999），多有使用數字與應用公式求算面積解題，但是使用導引式的討論教學導引學生建構面積概念，尚不多見。同時，導引式的討論教學助益兒童理解各種面積公式的影響，例如：應用長方形面積公式，建構平行四邊形與三角形的面積公式，值得進一步探討。

有鑑於整合幾何概念與面積測量的課程與教學研究的重要性，本研究探討二維空間幾何與面積概念的課程設計，使用導引式的討論教學，對於增進兒童理解面積公式與解決面積問題能力的影響。同時，於教學實驗結束後，本研究並晤談部分兒童，分析他們解決基本圖形的面積問題所使用的策略，以及接受實驗教學之前、後，解題策略改變的情形。探討的問題包含三方面：

一、不同的二維空間幾何與面積概念整合的數學實驗課程，對於兒童解決面積問題能力的影響如何？

二、接受不同的二維空間幾何與面積概念整合的數學實驗課程之兒童，其解決面積問題的策略為何？

三、兒童於接受不同的二維空間幾何與面積概念整合的數學實驗課程之前、後，其解題策略改變的情形為何？

貳、理論架構

一、整合二維空間幾何概念與面積測量的課程設計理念

初步的面積測量知能的學習，即能在一封閉的區域平面上，使用一個較小的平面作為單位（單位平面），將此封閉的區域平面完全地覆蓋，而且在覆蓋過程中，單位平面之間不得存有空隙與重疊之處（Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Van Auken Borrow, 1998; Stephan & Clements, 2003）。從覆蓋與測量操作，認知面積單位導自長度單位及基本概念：切分、單位的反覆，以及二維的矩陣結構。繼而，進一步的面積測量規則之學習，則需根據圖形的性質、全等概念、幾何移動（例如：平移、翻轉、旋轉）、圖形的切割與組合（將原圖形切割出較小的圖形成分，然後將圖形成分重新組合，形成一個新圖形）等幾何的知識，結合測量知能，歸納與覺察基本圖形面積測量的規則，發展各基本圖形的面積公式（Burns & Brade, 2003; CBMS, 2001; Craine & Rubenstein, 1993; Fuys et al., 1998）。由此可見，面積公式的學習，乃需植基於幾何知識與測量概念，理解面積測量的抽象規則。換句話說，面積概念為「兼具幾何與測量概念」的性質（譚寧君，1998, p. 575），面積課程的設計，應與二維空間幾何知識結合，方能幫助兒童理解面積公式的意義，以及各種基本圖形的面積公式之間的關係（Burns & Brade, 2003; Rowan, 1990）。

在探討幾何與面積概念的教材設計方面，雖然不少數學教育學者認為：進行面積概念教學時，兩者應作整合（integrated），因為幾何概念有助於處理不同圖形面積的比較，例如：比較不同圖形的面積時，幾何的形的視覺觀察分析是必要的能力（Inskeep, 1976）。而且，幾何的形的視覺觀察分析，也有助於推理學習面積公式（Van de Walle, 2004）。換句話說，觀察一個長方形，其可以被切割出兩個全等的直角三角形，進而推論，其中一個三角形的面積是長方形面積的一半；觀察一個平行四邊形，其可以被切割出兩個全等的三角形，進而推論，其中一個三角形的面積是平行四邊形面積的一半。因此，上述整合幾何概念於面積教學的觀點，也闡述於學校數學課程與教學的重要文件（CBMS, 2001; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。

在實證研究方面，Clements, Battista, Sarama 與 Swaminsthan（1997）以 Logo 電腦教學輔助軟體設計－「Tumbling Tetrominoes」，使用幾何的動態移動（如：翻轉、旋轉），探討其對三年級兒童學習幾何圖形的性質及數算單位面積的影響。研究結果指出：兒童在面積測量解題時，需要幾何圖形特性的知識、幾何移動的概念，以及矩陣結構的概念。而且，多數兒童察覺該軟體包含幾何移動與運算，有助於強化空間能力。此外，Schifter 等（2002）在其課室教學觀察紀錄中，闡述教學者導引切割、組合的操作與討論，幫助兒童學習三角形與平行四邊形面積公式。雖然上述研究缺乏論述幾何如何助益兒童建構面積公式與解決面積問題，但是整合幾何概念與技能和面積測量做教學，有助於兒童建構面積概念的效果是被肯定與支持的。因此，本研究假設：提供兒童二維空間幾何與面積測量整合的教材，可以有效地增進他們對於面積公式的理解，進而提升其解決面積問題的能力。

另一方面，數學教育學者也建議，幾何知識可以促進面積概念的發展（Rahim, 1986; Rowan, 1990），例如：瞭解四邊形圖形的幾何性質及其關係，有助於面積公式的推

論歸納（Craine & Rubenstein, 1993）。因此，有效的面積公式教學應於幾何的脈絡下進行（Bright & Hoeffner, 1993; Burns & Brade, 2003）。此觀點也啟示課程與教學：讓兒童經驗愈多的幾何活動，其所建構的幾何直覺（例如：不同圖形的性質、圖形的移動與切割、組合，對於圖形大小的變化之觀察與探索），將有助他們對於基本圖形的面積公式的推理，以及理解不同圖形與其面積公式之間的關係。

針對上述議題，雖然尚乏實徵研究的直接支持，但是從 Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang 與 Loef（1989）在加與減運算概念理解的研究結果，可獲得間接的支持。Carpenter 等人發現接受認知導引式（cognitive guided instruction）的數概念與加、減概念教學的低年級實驗組兒童，其在解決包含加與減概念的文字問題上，表現優於接受偏重加減運算教學的對照組兒童，而且在運算解題的比較上，實驗組與對照組兒童的表現，無分軒輊。換句話說，在加與減的計算表現比較上，接受偏重概念理解（加與減的概念）取向教學的兒童，表現並未遜於接受偏重程序性知識（加、減運算）教學的兒童。根據此研究之間接支持，本研究擬進一步檢驗此假設：提供兒童二維空間幾何知識及其與面積公式相關的概念的課程與教學（概念知識），雖然淡化面積的運算練習（程序性知識），亦能助益兒童瞭解面積公式的概念，進而提升解決面積問題的能力。

二、往昔面積教學的缺失問題

在面積教學方面，Martin 與 Strutchens（2000）及 Strutchens, Harris 與 Martin（2001）分析美國兒童在全國教育進步測驗（National Assessment of Educational Progress [NAEP]）的解題表現，指出兒童常見的誤解周長與面積公式問題，乃導因於教師的教學偏重公式的熟練與計算。根據面積教學的課室觀察（Bonotto, 2003; Ma, 1999），發現教師們傾向強調「面積公式－『長 × 寬』是計算面積的速算法」，忽略提供學生充分的時間，探索蘊含在矩形矩陣的乘法性質與意義。教師們常提供尺、積木與可操作的瓦片教具（例如：1 cm^2單位面積或1 cm^3小積木的1 cm^2平面），讓學生使用平方單位在一個平面區域作覆蓋，並數算在圖形內所覆蓋的瓦片的數量。然後，教師即介紹面積公式。學生在測量與探索的時間不足的情況下，縱然作一些覆蓋操作的討論，其討論內容充其量為視覺觀察層次的特徵，對矩陣結構（封閉圖形內所覆蓋形成的行列矩陣）與乘法性質的洞察，則相當有限。繼而，教師可能提供一連串的面積問題，讓學生運用公式解題。此種偏重公式與計算的教學取向，缺乏導引學生注意幾何圖形與測量之間整合的關係，學生雖可以完成「直接套用面積公式解題」的問題，但是不瞭解面積的定義與「長 × 寬」的矩陣結構意義。

上述教學模式，亦可見之於台灣的數學課室教學（譚寧君，1998，1999）。兒童未有充分的機會操作面積測量，以及在長方形作平方單位的覆蓋後，缺乏討論所覆蓋出的矩陣結構與乘法性質，他們往往流於記憶與盲目套用面積公式解題（譚寧君，1999；羅妙娟，2005）。

因此，建構面積公式的意義，並非從覆蓋的操作動作即可直接獲得（Van de Walle, 2004），而且，點數格子的數數活動，不足以表示理解面積概念。兒童乃需要於覆蓋一個二維區域後，討論所覆蓋形成的二維矩陣潛存的乘法性質（Bonotto, 2003; Lehrer, Jaslow, & Curtis, 2003），繼而應用長方形面積公式的概念，透過圖形的切割與組合操作，

建構平行四邊形與三角形的面積公式（Burns & Brade, 2003）。

三、導引式的討論教學之理念

導引式的討論教學（guided question-asking and-answering instruction）核心理念，乃綜合 Hicks（1995）, 黃幸美（2004）探討教師提供數學問答討論導引，以促進兒童概念理解的教學理念，Battista（2003）探討發展學童面積與體積測量概念的教學建議，以及 Fuys 等（1998）探討兒童的幾何概念發展之導引式教學（guided instruction）模式，強調：教師提供具有啟發認知學習的面積測量情境與提問問題，鼓勵學生探索與討論解決問題，以及使用語言說明解題策略與數學想法。上述強調問題解決歷程中的師生討論互動與學生的概念理解，也符合當前的數學課程與教學綱領之目標（教育部，2003；NCTM, 2000）。

在面積教學相關的研究方面，Bonotto（2003）及 Lehrer, Jaslow 與 Curtis（2003）指出學生在教師提供導引與問題討論情境下，透過問題解決與推理過程之解釋，可以有效地增進學生瞭解長方形面積公式的意義。

欲提升學生的面積測量能力，必須從有效的教學著手。因此，本研究提供兒童面積測量與幾何實驗課程，並使用導引式的討論教學模式－在教師提供認知導引情境下，提問問題，鼓勵學生透過觀察與操作歷程，作解題探索、反思與討論解題想法的正確性，比較不同的教材設計對兒童理解面積公式與解決面積問題能力的影響。

綜合上述之文獻探討，本研究假設：在使用導引式討論教學方法且教學時間相同的情況下，接受整合二維空間幾何與面積測量教材的兒童及接受二維空間幾何教材的兒童，其解決面積問題的表現優於接受強調面積公式與運算的教材之兒童。

此外，於教學活動以後，使用晤談訪問方法，收集兒童解決數學問題的策略與解題想法說明，可以瞭解他們理解數學概念的情形（Leinhardt, 1989）。而且，兒童使用策略解決面積問題的效率程度，表徵其理解面積概念的品質（Strutchens, Martin, & Kenney, 2003）。例如：兒童能正確使用面積公式成功地解題，並能說明其解題想法，表示他們理解公式的意義，能使用有效率的策略解決面積問題（Lehrer et al., 2003）。同時，兒童所說明的解題想法，也反應該教學活動的成效（Rittle-Johnson, 2006），因此，本研究也將於教學實驗結束後，使用個別晤談收集兒童解決面積問題使用的策略與想法。

參、研究設計

本教學試驗乃採準實驗法，針對小學數學的面積與測量主題所包含的核心概念：二維空間幾何概念（形的概念與幾何移動）和面積測量運算（測量與運算），設計三種面積教學實驗教材，並隨機分派到三個班級進行教學。此外，亦包含一組控制組以與實驗組作對照。

一、研究對象

本研究對象取自台北市一所公立小學的120位四年級兒童，包含男童70名，女童50名。該校共有四個四年級班級，且為常態編班，兒童皆使用相同的數學教科書與接受常態教學。此四個班級被隨機分派為面積組、幾何與面積組、幾何組，以及控制組。每組各為30名兒童。所有兒童在參與教學試驗之前，已經學過面積的初步概念與長方形面積公式，但是尚未接受平行四邊形與三角形面

積公式之正式教學。

在晤談兒童的選取方面，乃從四組各隨機抽取約6-7個兒童，參加一對一的個別晤談。此外，有2位幾何與面積組的兒童志願參加晤談，因此，各組接受晤談的人數分別如下：面積組7人，幾何與面積組8人，幾何組7人，控制組6人，共28人，包含男生18人，女生10人。

二、研究工具

(一)實驗課程設計的理論基礎、取材來源、所包含的數學概念及教學方式

三個教學實驗組以其所隨機分派使用的教材而命名，分別為：一、面積教學實驗組（以下簡稱：面積組）：強調面積公式與套用公式運算圖形面積；二、幾何與面積教學實驗組（以下簡稱：幾何與面積組）：連結二維空間幾何概念與面積測量；三、幾何教學實驗組（以下簡稱：幾何組）：以二維空間幾何概念為核心，利用幾何的直觀與長方形面積公式，探索平行四邊形與三角形的面積公式，但是淡化運用數字作面積的計算。除此以外，為比較實驗與非實驗教材對兒童解決面積問題表現的影響，本研究並包含控制組，其乃提供非幾何與面積測量之教學。

1.教材設計的理論基礎與教學問題所包含的數學概念

實驗課程的設計與教學理論基礎，乃植基於面積的數學概念結構與兒童的面積概念認知發展之研究，兩者分別陳述如下。

(1)面積的數學概念結構：根據面積概念之研究（譚寧君，1995；Inskeep, 1976; Stephan & Clements, 2003）與小學數學課程綱要（教育部，2003；NCTM, 2000），面積概念包含：幾何概念（例如：長方形、三角形等基本圖形的特質、二維的空間概念與形的轉變）、長度測量概念、矩陣行列概念（乘法性質）與長方形面積公式（長 × 寬）。因此，實驗教材包含下列六個數學概念要素的不同組合：A.面積的意義（E1）：矩形矩陣及其隱含的乘法交換律的意義；B.圖形的切割與組合（E2）；C.二維空間幾何概念（E3）：長方形、三角形的特徵、全等概念、幾何移動（平移、旋轉、翻轉）與疊合；D.以長方形面積公式的概念為基礎，探索平行四邊形與三角形的面積公式（E4）；E.面積公式的應用與運算（E5），包含分析、比較長方形周長公式與面積公式的差異、長方形面積與三角形面積公式之間的關係、面積的比較；F.等積異形的問題例子（E6）：透過圖形（長方形與三角形）的切割與重新組合，討論圖形不同但是面積可能相等。

(2)兒童的面積概念認知發展：根據學者對於兒童學習面積概念之研究（羅妙娟，2005；譚寧君，1999；Battista, 2003; Battista et al., 1998; Outhred & Mitchelmore, 2000; Schifter et al., 2002）指出，結合測量（自一維到二維的測量）、幾何移動的操作與單位面積的運算，兒童可從具體的覆蓋操作與觀察，察覺矩陣行列所隱含的乘法性質，認知長方形的面積公式。

因此，實驗課程所包含的教學問題設計，乃根據九年一貫課程綱要－數學領域（教育部，2003）所揭示的課程目標、四年級兒童在面積主題所需學習的數學概念，並參考當前國內、外不同版本四年級數學教科書的面積單元與幾何單元。在教學時數、教學方法（導引式問答討論）、教學問題題項數量皆相同的條件下，三份實驗課程的教學目標

與教學問題所包含的數學概念要素，分別說明如下[1]。

(1)面積測量課程：教學目標在於透過面積概念與長方形面積公式的認識，使用切割與組合的操作、觀察與討論，導引學生認識平行四邊形與三角形的面積公式，並能應用公式，解決圖形面積的問題。此教材包含 13 個教學問題（21 個題項），所包含的數學概念為：E1，E2，E4，E5。此教材強調面積公式的介紹與應用公式運算。

(2)幾何與面積課程：教學目標在於連結二維空間的幾何概念與基本圖形之特質，透過幾何移動的操作（平移、旋轉、翻轉、切割與重組、疊合）、觀察與討論圖形改變與面積的關係，進而推論三角形與平行四邊形的面積公式，並應用公式解決面積問題。此教材包含 15 個教學問題（21 個題項），所包含的數學概念為：E1，E2，E3，E4，E5，著重幾何與圖形性質的瞭解與幾何移動操作，介紹面積公式與應用公式運算。

(3)幾何課程：教學目標在於強調二維空間幾何的概念，連結兒童的長方形面積公式的先備知識，透過幾何移動、全等概念、切割與組合的操作、觀察與討論，探索幾何圖形的性質、長方形、三角形與平行四邊形的關係與公式，發現圖形不同但面積的大小可能相同（含圖形大小的比較）。此教材包含 13 個教學問題（21 個題項），所包含的數學概念為：E2，E3，E4，E6。此份教材，著重幾何與圖形性質的瞭解，以推理認識三角形與平行四邊形面積公式的意義，但是淡化應用數字作面積的運算。

(4)控制組：提供非幾何、面積相關的教材之教學。此組教材，乃配合該班數學科教學進度內預定之數與計算單元－三位數的乘與除，由該班級任教師進行教學。

2.實驗組的教學問題類型與解題所需的數學概念與技能

三份實驗課程的教學問題類型，因解題時所需的數學知識與技能不同，分類為兩大題型：1.面積的運算問題：解決此問題，需運用數字與運算技能，計算與回答圖形的面積。亦即透過數學的程序性知識之應用，培養面積計算的技能。2.面積的概念理解問題：解決此類問題，需要使用面積的概念作解題正確性的判斷與想法說明。此類問題猶如題組，包含兩種次類型：(1)數學判斷問題：解題者需根據面積概念或公式，判斷所陳述的解題想法或運算步驟是否正確。因此，透過判斷數學想法的正確性，期以培養兒童應用數學概念思辯解題想法的適當性。(2)數學想法說明問題：此類問題常與判斷問題相互關連，解決此類問題，需使用文字說明數學想法，針對其在判斷問題上的判斷，提出理由說明。根據 Hiebert 與 Carpenter（1992）之觀點，透過數學想法的解釋與溝通，可以培養兒童的概念理解。同時，教師亦可從兒童解釋的數學想法，瞭解他們的概念理解與問題解決的能力（Kenney & Lindquist, 2000）。上述兩大類型問題之例隅，呈如圖1所示。第一題，為面積運算技能問題；第二題為面積概念理解問題，包含判斷解題想法與理由說明。

3.教學方式

實驗教學乃由實驗者根據各實驗組的教

[1]各實驗教材之教學問題例隅與教案例隅及前測與後測，請與作者洽詢，索取參閱。

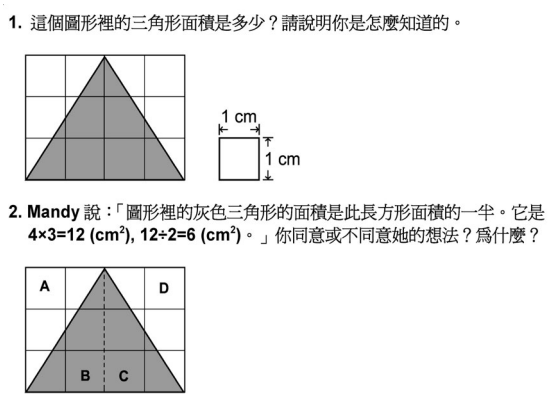


圖 1：實驗教材的兩大類題型之例隅。

學問題與教案，提供導引式的討論解題教學，鼓勵兒童從操作教具與觀察歷程，陳述其數學想法、聆聽與批判他的解題想法，以導引兒童理解面積概念與公式意義。

(二)前測、後測與晤談問題

前測與後測的目的在於瞭解兒童接受教學實驗之前、後，其面積問題解決能力的表現。兩份測驗的問題類型相似，主要參引自先前面積概念測量的研究工具（高敬文，1989；Hart, 1984; National Center for Educational Statistics [NCES], 2005）。兒童需獨自解題，兩份測驗施測時間，各約為30分鐘。

前測包含五大題的面積問題－6題面積計算題項、4題概念理解題項（2題數學判斷題項及2題數學說明題項）。後測包含五大題的面積問題－6個面積計算題項、7題概念理解題項（2題數學判斷題項及5題數學說明題項）。

所有實驗教材與前、後測的問題，皆經過一位任教中年級且具有研究所課程訓練的有經驗教師作評閱，評閱結果顯示：教學問題適合發展與評量兒童的面積公式概念。同時，為瞭解兩份測驗的複本信度，前、後測的問題並對台北縣一所公立小學30位四年級兒童施測，複本信度分析結果顯示：前、後測的平均數分別為16.33（SD＝9.48）、21.57（SD＝12.86），複本信度為 r＝.92, p＜.001。

三、資料收集

本研究程序包含前測、實驗教學、後測與個別晤談，四個階段約於三週完成。實驗教學為安排於原班級日課表上的數學課進行，總教學節數為4節課，每節課約為40-45分鐘。同時，控制組的教學活動則由該班的級任教師，進行三位數的乘與除單元之教學。

於晤談階段，實驗者一對一晤談受訪兒童。實驗者提供各組受訪兒童自己的前、後測、實驗教材的教學問題題本，逐一詢問他們使用策略於解決每一題問題的想法，受訪兒童看著自己的解題記錄，說明自己的解題想法與如何獲得該想法。尤其當受訪兒童在前、後測的解題策略呈現改變時，實驗者更進一步提問：「請你告訴老師，你怎麼有這個新想法？」。晤談過程，全程錄音，並轉譯成逐字稿。

四、資料分析

在兒童解決面積計算問題的能力評量方面，由於面積計算問題猶如數學文字問題，評分方式乃參考黃幸美（2003，2004）對於數學文字問題解題的評分法，根據兒童在前、後測上的解題記錄、解答是否正確、完整，採多重計分方式評分。1.面積計算問題的評分：根據其算式紀錄與計算結果之正確性評分，滿分為5分，不完整的解答則給予4.5～2分（例如：算式與計算皆正確，但是答案遺漏單位，則給4.5分；答案與單位皆正確但是沒有算式紀錄，則給3分；算式正確但計算不正確，則給2分）；空白未達或算式、解答皆錯誤，則給0分。2.數學批判問題的評分：根據其答案「同意」或「不同意」，正

確者給2分；不正確者給0分。3.數學想法說明問題：根據其文字陳述的數學想法的正確性與完整性評分，解釋完整且正確者給2分，解釋不完整者給1分，空白與不正確者，給0分。呈如上述的數學批判與想法說明問題，因其解答是否正確與是否完整相當明確，因此，以較小的分數範圍做評分，此亦可減少評分不一致的變異。

在前、後測的評分者內部一致性分析方面，兩位評分者根據評分原則評分後，隨機抽取50份評分後的測驗，使用 Pearson 相關分析，其結果為 .99，$p<.001$。

(一)量化資料的處理

兒童在前、後測的面積計算問題的解題表現，表徵其面積運算能力。因此，在資料分析時，分別將前、後測所包含的六題面積計算問題的得分加總，成為前、後測的面積計算分數，總分各為30分。

同時，數學判斷與想法說明問題的性質，在於評量兒童的概念理解（Kenney & Lindquist, 2000）。兒童在上述兩類問題的解題表現，表徵其面積概念理解能力，此能力也是本研究分析實驗教學效果關注的重要變項之一，因此，將兩類型問題的計分作加權處理。而且，在數學批判問題的資料處理上，因為數學批判問題的性質，猶如是非題，其可能產生解題者的解題偏差，亦即解題者可能猜測而回答正確，但是不知其所以然。因此，為確實評量兒童的面積概念理解，本研究對上述兩類題型的計分，分別作加權計分處理。

1.數學判斷問題的加權計分：如果解題者在此類型問題的原始得分為滿分(2 分)，且在此題項相關的說明問題，得分等於或高於 1 分，表示此解題者具有部分或完全的概念理解，則將其在此判斷題項上所得的原始分數（2 分）作加權計分，可得 4 分。如果其判斷問題的原始得分為 2 分，但是在此題相關的說明問題得分低於 1 分，表示此解題者瞭解解題相關的概念不足，則以此判斷題項上所得的原始分數計分。

2.數學想法說明問題的加權計分：根據解題者在說明題項上的原始得分，乘以 2 倍作加權計分，例如：原始得分為滿分（2 分），加權處理後，則可得 4 分。其他原始分數，以此類推處理。

根據上述，分別將前、後測的數學判斷問題與說明問題之加權後分數作合併加總，成為前、後測的概念理解分數。因此，前測之概念理解總分為16分；後測之概念理解總分為28分。於合併面積計算總分與概念理解總分後，前測的總分為46分，後測的總分為58分。

在後續的資料分析，本研究將前測的分數作為共變數，進行 ANCOVA 分析。

(二)晤談資料處理

有關晤談資料的處理，分別說明如下。

1.解題策略有效性分析：根據兒童的解題策略是否能有效地解決前、後測之三角形與平行四邊形面積問題，將策略的有效性分成三類：(1)應用公式：正確地應用面積公式解題，此為有效率的策略（Lehrer et al., 2003）。(2)低效率的策略：使用多步驟的程序，正確地完成解題，例如：使用切割組合的步驟，再點數格子算出面積的答案；使用切割組合的步驟，再使用長方形面積公式解題；使用點數格子，算出面積的答案。由於低效率的策略需多步驟程序，此策略的效率低於直接應用面積公式解題（Bell, Costello, & Küchemann, 1983）。(3)無效率的策略：使用無效或錯誤的方法解題，導致解答錯誤，例如：空白未答；以周

長的公式計算面積；將周長公式除以 2；將兩邊的長度相加再乘以 2；直接模仿前、後測問題上所提供的解題算式解答，例如：後測第一題(b)問題陳述的 “3＋4＋3＋4＝14, 14÷2＝7(cm^2)”。

2. 兒童解題策略改變分析：學習者在學習前、後，其解決上述問題的策略若呈現有效率地改變，亦可顯示教學實驗的影響效果（Star & Rittle-Johnson, 2008）。因此，將晤談兒童在前、後測之三角形與平行四邊形面積問題解題策略作比較，將策略改變情形分成以下三大類：(1)策略改變且解題正確：兒童改變原於前測所使用的低效率或無效率策略，而在後測使用公式或低效率的策略解題，並且解題正確。此情形亦包含改變於前測的公式使用，而在後測使用低效率的策略（切割組合圖形後，再點數圖形內的格子）。(2)策略改變但解題不正確：兒童改變原於前測所使用的低效率或無效率策略，而在後測使用低效率或無效率的策略解題，而且解題不正確。此情形亦包含疏忽三角形的公式需將「底 × 高」的積除以 2；或是正確使用面積公式，但是計算錯誤。(3)策略無改變：兒童在前、後測上的解題策略皆相同，包含：使用公式或低效率策略且解題皆正確，以及使用低效率策略或無效率解題且解答皆不正確。

在晤談資料分類的評分者內在信度分析方面，兩位分析者根據晤談資料與兒童的前、後測解題記錄，分類解題策略與其有效性，並隨機抽取15位兒童的晤談分類結果資料作編碼與一致性分析。兩位分析者分類結果的一致性達95% 以上。在處理解題策略改變的分析程序上，由兩位分析者根據上述三類解題策略之有效程度類別，分別檢視受訪兒童在前、後測的解題紀錄與解答、晤談時所陳述的解題策略說明資料，作分類。當有意見紛歧時，則相互討論，以達共識。

肆、研究結果

一、不同的實驗課程對兒童面積問題解決能力的影響

四組兒童在前、後測的整體解題表現分數，呈如表1所示。為檢視四組兒童於接受實驗教學之前，在前測的解題表現是否有差異，使用前測為依變項，進行 ANOVA 分析，結果顯示：四組兒童的前測解題表現，未呈顯著差異，$F(3, 116)=1.43, p=.24$。此顯示：四組兒童於接受實驗處理之前，解決面積問題的表現無差異。

表 1：四組兒童在前測整體、面積計算與概念理解問題得分之平均數、標準差，以及後測整整體、面積計算與概念理解問題得分之調整後平均數

	人數	解題表現		
		前測		後測
	n	*M*	*SD*	*Adj.M*
整體				
面積教學組	30	19.13	12.05	32.32
幾何與面積組	30	19.33	10.76	36.01
幾何教學組	30	23.78	10.56	29.87
控制組	30	18.67	10.24	27.51
面積計算問題				
面積教學組	30	12.40	7.66	17.52
幾何與面積組	30	12.67	7.61	16.87
幾何教學組	30	17.25	6.93	15.60
控制組	30	12.63	6.46	14.29
面積概念理解問題				
面積教學組	30	6.73	5.47	14.56
幾何與面積組	30	6.67	5.02	18.94
幾何教學組	30	6.53	4.70	14.90
控制組	30	6.03	4.82	13.03

在比較不同實驗課程對兒童解決面積問題整體表現的影響方面，使用前測總分為共變項，以後測總分為依變項，進行 ANCOVA 分析。由迴歸係數同質性考驗結果，$F(3, 112) = .24$, $p = .87$，顯示以共變項對依變項作迴歸分析時，其斜率無顯著差異，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設。後續的共變數分析，於去除前測的影響之後，四組在後測整體表現呈顯著差異，$F(3, 115) = 3.86$, $p < .01$，組別變項的效果量（η^2）為0.09。經 Fisher LSD（Least Significant Difference）事後比較，發現幾何與面積組顯著優於幾何組與控制組。其他實驗組雖然其後測分數皆高於控制組，但是差異皆未達顯著水準。

在後測整體的解題表現上，幾何與面積組及面積組未呈顯著差異，其可能由於此整體的解題分數所表徵的是一個通泛性的解題能力，難以呈顯解決不同類型問題（面積計算與概念理解類型）其所需的個殊能力差異。欲剖析不同課程的影響，需進一步檢視兒童在解決不同類型問題的表現差異。因此，本研究分別使用前測的面積計算解題分數、概念理解解題分數為共變項，以後測的面積計算解題分數、面積概念解題分數分別為依變項，進行 ANCOVA 分析。四組兒童在前測的面積計算解題、概念理解解題的原始分數平均數、標準差，及後測的面積計算解題、概念理解解題的調整後平均數，可見之於表1。

在面積計算問題的解題表現比較上，結果發現：迴歸係數同質性考驗結果，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設，$F(3, 112) = .41$, $p = .75$。後續的共變數分析結果顯示：於去除前測的影響之後，四組兒童的解題表現，未呈現顯著差異，$F(3, 115) = 2.15$, $p = .10$。此表示不同實驗課程對兒童解決面積計算問題的能力之影響程度，未達顯著水準。

在概念理解解題表現比較分析上，結果發現：迴歸係數同質性考驗結果，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設，$F(3, 112) = 1.23$, $p = .30$。後續的共變數分析結果，發現於去除前測的影響之後，四組兒童的解題表現呈現顯著差異，$F(3, 115) = 3.82$, $p < .01$，組別變項的效果量（η^2）為0.09。經 Fisher LSD 事後比較，發現幾何與面積組顯著優於其他三組。其他教學實驗組與控制組之間的差異，則未達顯著水準。

上述結果顯示，整合幾何與面積概念的課程助益兒童解決面積概念理解的問題，其效果優於幾何課程、面積課程及控制組，但是在解決面積計算問題上，實驗課程的助益效果未呈顯著差異。

二、晤談資料的分析結果

(一)受訪兒童的解題策略有效性分析

四組受訪兒童在解決附有格子的三角形面積、未附有格子的三角形面積，以及附有格子的平行四邊形面積問題，所使用的策略有效性，呈如表2所示。

從表2可發現，在解決上述三個面積問題上，實驗組使用面積公式的次數，高於控制組，而且控制組使用無效率策略的次數，高於實驗組。此外，當圖形附有格子時，約有32%～35%的受訪兒童使用低效率的策略。使用低效率策略的現象，則未見之於圖形未附有格子的問題解決。

(二)受訪兒童的解題策略改變分析

受訪兒童在解決三角形與平行四邊形面積問題上，策略改變的情形分別呈如表3、表4與表5所示。表3呈現各組受訪兒童在解決前、後測附有格子的三角形面積問題之各種策略改變的次數與百分比；表4呈現各組受訪兒童在解決前、後測未附有格子的三角形面積問題之各種策略改變的次數與百分

表 2：各組受訪兒童在解決後測三角形與平行四邊形面積問題使用各種策略的次數與百分比

策略	面積	幾何與面積組	幾何組	控制組	總數	
					次數	百分比
Q1.三角形附有格子						
a.使用公式「底×高÷2」	5	2	4	1	12	42.86%
b.低效率的策略	1	4	0	4	9	32.14%
c.無效率的策略	1	2	3	1	7	25.00%
總數					28	100.00%
Q2.三角形未有格子						
a.使用公式「底×高÷2」	4	4	4	2	14	50.00%
b.無效率的策略	3	4	3	4	14	50.00%
總數					28	100.00%
Q3.平行四邊形附有格子						
a.使用公式「底×高÷2」	2	4	4	2	12	42.86%
b.低效率的策略	3	4	2	1	10	35.71%
c.無效率的策略	2	0	1	3	6	21.43%
總數					28	100.00%

比；表5呈現各組受訪兒童在解決前、後測附有格子的平行四邊形面積問題之各種策略改變的次數與百分比。統整表3～表5的次數與百分比，可發現：1.實驗組比控制組傾向於改變原先低效率或無效率的策略，以使用面積公式解題。2.在解決三角形與平行四邊形面積問題上，尤其當圖形未附有格子的問題，實驗組比控制組傾向於改變策略且解答正確。3.在改變策略但是解答錯誤的類別上，實驗組比控制組表現較高的人次，其多由於計算或格子點算失誤。

此外，實驗組仍有少數兒童改變原先無效率策略，而使用另一無效率策略或是誤用面積公式，例如：忽略將「底 × 高」除以2，或是計算錯誤。而且，在實驗教學之後，各實驗組仍有少數兒童未改變其無效率的策略。從訪談中發現：他們雖然學會乘法運算也能記憶長方形面積公式，但是對於長方形面積公式「長 × 寬」所隱含的矩陣概念、乘法交換律的性質，尚存迷思，導致使用各種無效率的解題策略。於訪談時，經實驗者提供面積概念、長方形、三角形與平行四邊形公式的簡要說明以後，多數的受訪兒童表示能瞭解如何解題與修正錯誤的解答。

(三)受訪兒童對於使用解題策略的說明

從晤談資料分析結果顯示，三組實驗組的受訪兒童雖然所接受的教材與建構面積公式的取向有差異，除了少數兒童需由晤談者提供簡要的面積概念說明以外，多數兒童能說明如何使用解題策略求算面積的過程，例如：使用切割與組合圖形的操作，以說明平行四邊形與三角形的面積公式，或是點算圖形所提供的方格。兒童所指出的面積概念與操作技能，相當符合各實驗教材所強調的數學概念要素。他們也指出：以前未學習過平行四邊形與三角形的面積公式，認識這些公式乃從實驗教材學到的。各組的晤談結果摘要與例隅，分別呈述如下。

1.面積組

此組的兒童皆陳述，他們在實驗教學前不知道如何解決平行四邊形與三角形面積的問題，經過教學後發現使用切割圖形與再組

表 3：各組受訪兒童在解決前、後測附有格子的三角形面積問題之各類策略的次數與百分比

策略改變與正確性	面積組	幾何與面積組	幾何組	控制組	總數	
					次數	百分比
1.策略改變且解答正確						
a.改變原低效率的策略以使用公式「底×高÷2」	2	0	2	0	4	14.29%
b.改變原無效率的策略以使用公式「底×高÷2」	2	1	1	0	4	14.29%
c.改變原無效率的策略以使用低效率的策略	1	4	0	1	6	40.00%
d.改變原公式「底×高÷2」的應用以使用低效率的策略	0	0	0	1	1	3.57%
策略改變且解答正確總數	5	5	3	2	15	53.57%
2.策略改變但解答不正確						
e.改變原無效率的策略以使用低效率的策略	0	0	2	1	3	10.71%
f.改變原低效率的策略以使用無效率的策略	0	0	1	0	1	3.57%
g.改變原正確公式「底×高÷2」的應用以使用「底×高（疏漏÷2）」	0	1	0	0	1	3.57%
h.改變原無效率的策略以使用公式「底×高÷2」但計算錯誤	0	1	0	0	1	3.57%
策略改變但解答不正確總數	0	2	3	1	6	18.00%
3.策略無改變解題正確						
a.使用公式「底×高÷2」	1	1	1	1	4	21.43%
b.使用低效率的策略	0	0	0	1	1	3.57%
4.策略無改變解題不正確						
c.使用無效率的策略	0	0	0	1	1	3.57%
d.使用低效率的策略但計算錯誤	1	0	0	0	1	3.57%
策略無改變的總數	2	1	1	3	7	25.00%
總數					28	100.00%

合的方法，可以把圖形重組成長方形，再使用長方形面積公式或點數格子，計算圖形面積。例如：圖2的例隅，呈顯一位面積組的晤談兒童改變其原在前測所使用的拼湊格子的策略，於後測使用三角形面積公式解題，她也表示此改變是從實驗課程學得的。

2.幾何與面積組

此組兒童的觀點陳述，與面積組的晤談兒童觀點相似，他們使用切割圖形、重新排列與組合的操作，以及點數格子，並使用數字說明求算三角形面積與平行四邊形的面積的歷程與方法。但是他們傾向使用全等概念與疊合，說明圖形的移動與面積大小比較關係。

3.幾何組

此組兒童的觀點陳述，和幾何與面積組的兒童觀點相似，例如：說明其利用全等的概念、圖形的切割與組合的操作，以及使用長方形面積公式與點算的方法，解決面積問題。此外，他們傾向描述如何切割圖形與作組合，並且說明經過移動以後圖形的大小沒有改變。例如：圖3的例隅，呈顯一位幾何組的晤談兒童，應用全等的概念，說明使用圖形切割以解決三角形面積的問題。

三組受訪兒童中，約有50% 以上的兒童表示解決平行四邊形面積的問題並不困難，

表 4：各組受訪兒童在解決前、後測未附有格子的三角形面積問題之各種策略改變的次數與百分比

策略改變的正確性	面積組	幾何與面積組	幾何組	控制組	總數	
					次數	百分比
1.策略改變且解答正確						
a.改變原低效率的策略以使用公式「底×高÷2」	0	0	1	0	1	3.57%
b.改變原無效率的策略以使用公式「底×高÷2」	2	3	1	1	7	25.00%
策略改變且解答正確總數	2	3	2	1	8	28.57%
2.策略改變但解答不正確						
c.改變原無效率策略以使用另一種無效率策略	2	3	0	0	5	17.86%
策略改變但解答不正確的總數	2	3	0	0	5	17.86%
3.策略無改變						
解答正確						
a.使用公式「底×高÷2」	2	1	2	2	7	25.00%
解答不正確						
a.使用同一個無效率策略	1	1	3	3	8	28.57%
策略無改變的總數	3	2	5	5	15	53.57%
總數						100.00%

因為透過圖形的切割與組合，平行四邊形可以變成長方形，再應用長方形面積公式，即可解題。

4.控制組

此組的兒童未接受實驗教學，研究者假設他們未接受過學校教師提供的三角形與平行四邊形面積公式的正式教學。因此，當受訪兒童在前測或後測使用上述公式解題時，晤談者將進一步詢問他們如何獲得此想法作解題。晤談結果發現，此組的兒童傾向使用切割與組合成一個完整的格子，繼而使用長方形面積公式或點數格子的策略解題。少數兒童指出：他們發現長方形與直角三角形的關係－一個長方形可以切割出兩個直角三角形，因此，只要將長方形的面積除以2，便可以算出三角形的面積。

伍、結論與建議

一、討論

本研究探討不同的二維空間幾何與面積概念整合的實驗課程，在使用導引式討論教學模式下，對兒童理解面積公式與解決面積問題表現的影響。從量化資料分析的結果顯示，本研究的部分假設受支持－在整體的解題表現上，整合幾何與面積概念的實驗課程組顯著優於控制組，且在解決面積概念理解的問題上，優於面積實驗課程組及控制組。相對地，尚有部分假設未受支持－在整體的解題表現，整合幾何與面積概念的課程組及幾何實驗課程，未優於面積課程組，而且幾何課程組亦未優於控制組。以下針對研究結果，提出討論。

(一)二維空間幾何與面積測量概念對兒童建構面積公式與解題表現的影響

從本研究的量化資料與晤談資料分析，可發現欲增進兒童對於面積公式的理解，教材需整合二維空間幾何與面積測量概念，此結果也支持 Burns 與 Brade（2003）及 Clements 等（1997）的觀點。

本研究的幾何與面積實驗課程，整合基本圖形的性質（長方形與三角形）、全等的

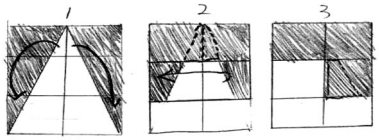
表 5：各組受訪兒童在解決前、後測附有格子的平行四邊形面積問題之各種策略改變的次數與百分比

策略改變的正確性	面積組	幾何與面積組	幾何組	控制組	總數	
					次數	百分比
1 策略改變且解答正確						
a.改變原低效率的策略以使用公式「底×高」	1	0	2	1	4	14.29%
b.改變原無效率的策略以使用公式「底×高」	0	0	1	0	1	3.57%
c.改變原無效率的策略以使用低效率的策略	1	2	0	0	3	10.71%
策略改變且解答正確總數	2	2	3	1	8	28.57%
2 策略改變但解答不正確						
c.改變原無效率的策略以使用低效率的策略	1	0	0	0	1	3.57%
d.改變原低效率的策略以使用無效率的策略	0	0	1	0	1	3.57%
策略改變但解答不正確的總數	1	0	1	0	2	7.14%
3 策略無改變						
解答正確						
a.使用公式「底×高÷2」	1	4	1	1	7	25.00%
b.使用同一個低效率的策略	1	2	2	1	6	21.43%
解答不正確						
a.使用同一個低效率策略	2	0	0	3	5	17.86%
策略無改變的總數	4	6	3	5	18	64.29%
總數					28	100.00%

概念、幾何移動、圖形的切割與組合、長方形面積公式的意義，以及面積測量的運算等概念，強調讓兒童發現不同圖形之間的差異與其面積公式的關係，同時運用測量技能運算圖形面積，其教材結構符合面積測量的核心概念－幾何與測量概念（譚寧君，1998）。而且，幾何與面積概念整合，相互裨益兒童的面積概念理解（Clements, Battista, Sarama, & Swaminsthanet, 1997）。同時，在導引式的討論教學情境下，連結兒童的先前學習經驗－面積的意義及長方形面積公式的意義，透過問答討論與圖形的切割與組合歷程，兒童需從觀察、操作、解決問題，說明如何利用長方形面積公式，推論出三角形與平行四邊形的面積公式。上述教學歷程與記憶公式的教學導向迥異，其更符應當前課程綱領對於發展學生面積測量公式的理念－在瞭解圖形的性質與測量概念基礎上，發現面積測量的規則，繼而應用乘法性質發展「長 × 寬」的公式，推論學習其他基本圖形的公式（CBMS, 2001; NCTM, 2000）。

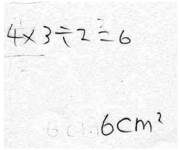
另一方面，本研究發現兒童在整體的面積問題解決表現比較上，整合幾何與面積組和面積組，表現無分軒輊。造成此結果的原因可說明如下：(一)面積計算問題是否在圖形附加格子，可能影響兒童解題策略的使用。本研究發現當圖形附有格子時，較多的兒童使用低效率的解題策略；而低效率的策略的使用，則相當少見於圖形未附有格子的問題，此現象也與 Bell 等（1983）及 Schifter 等（2002）的研究一致。雖然在圖形上提供格子，有助於兒童瞭解平方單位的意義（教育部，2003；Strutchens et al., 2003），也常見之於四年級的數學教科書與數學成就評量的面積問題（NCES, 2005），但是在本研究的面積計算問題上，當點數方格子也能完成

晤談者：這個 [指在前測 **Q4** 的解題繪圖]妳就用畫圖的，用拼湊的對不對？



兒童 $_{AMW}$：嗯。

晤談者：這個 [指在後測 **Q1a** 的解題算式]，妳已經不是用這樣子了！ [指在前測 **Q4** 的解題繪圖] 老師看妳列了一個式子在這裡 [指在後測 **Q1a** 的解題算式]，妳怎麼變成這樣的？



兒童 $_{AMW}$ ：它…先把它的面積求出來。

晤談者：對。

兒童 $_{AMW}$ ：再把它除以 **2**。

晤談者 **T**：爲什麼妳知道要除以 **2**？

兒童 $_{AMW}$ ：嗯…[思考]

晤談者：妳這個很棒喔！但是老師想要知道，妳怎麼知道這麼棒的方法？

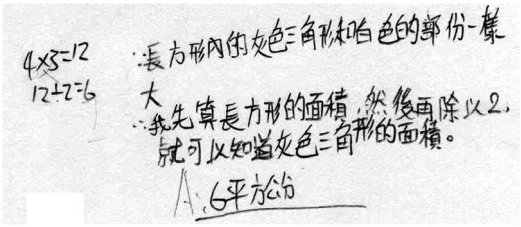
兒童 $_{AMW}$ ：因爲…[思考]。

晤談者：老師請問妳喔，妳怎麼學到這個的？老師看妳原來是用畫圖的喔！後來變成這一列式子，列了好漂亮的一個式子喔！妳怎麼學會的？

兒童 $_{AMW}$：上課的。

圖 2：一位面積組晤談兒童的解題策略改變說明例隅。

晤談者：好，那現在這個 [指出 **Q1-a** 圖形]？…妳怎麼知道是這樣算？



兒童 $_{GMW}$：嗯…[思考]，如果它…如果把這邊跟這邊畫一條線的話 [從灰色三角形頂點畫重直線到底]，這邊[指出灰色三角形中左邊的小三角形圖]跟這邊[指出左邊的白色三角形圖]是一樣大，這裡[指出灰色三角形中右邊的小三角形圖]跟這裡 [指出右邊的白色三角形圖] 是一樣的。

晤談者：妳怎麼知道要這樣子畫？妳怎麼知道要從這裡 [指出灰色三角形頂點] 把它切成一個小塊的一個大塊的，妳怎麼知道？

兒童 $_{GMW}$：嗯…[思考]，因爲這裡有一個點 [指出灰色三角形頂點]，還有這裡有一個點 [指出灰色三角形的底]。

晤談者：喔，從這個頂點 [指出灰色三角形頂點] 這樣切下來，是不是？

兒童 $_{GMW}$：嗯。

晤談者：妳看到這一塊 [指出灰色三角形中左邊的小三角形] 跟這塊 [指出左邊的白色三角形] 是一樣大，這一塊 [指出左邊的白色三角形] 跟這一塊 [指出灰色三角形中右邊的小三角形] 是一樣大，對不對？

兒童 $_{GMW}$ ：嗯。

晤談者: 好，…妳只是用看的喔，妳怎麼知道它們兩個是一樣大？ [指出圖形]。

兒童 $_{GMW}$：嗯…[思考]，這裡有兩個，因爲它這邊有兩個，所以它這個兩個三角形它就一樣大 [指出圖形]。

圖 3：一位幾何組晤談兒童的解題策略改變說明例隅。

解題，而且兒童偏好使用低效率的點數策略，導致實驗教材在呈顯兒童應用面積公式解題的影響效果被淡化。此也說明四組兒童在面積計算能力的表現無顯著差異的現象。

(二)本研究在前、後測所包含的面積運算問題題數與得分，各佔有相當高的百分比，其百分比也高於概念理解問題，例如：在前測，面積運算問題的總分約占前測總分的65%，在後測的面積運算問題的總分約占後測總分的52%。同時，兩組的實驗課程皆強調面積的運算技能，兒童從實驗教學中皆能培養相當的運算面積技能。當面積計算問題的總分在整體的解題分數佔有高百分比，此可能導致兩組兒童在整體的解題表現無顯著差異。

接受面積課程的兒童，其在整體的解題表現與面積計算問題的表現，與接受幾何與面積課程的兒童接近，但是在面積概念理解的問題解決，則表現不如幾何與面積課程組的兒童。本研究的面積課程雖然提供切割與組合圖形的技能教學，但是相對於幾何與面積實驗課程，缺乏二維空間幾何相關概念的問題討論（例如：圖形的性質與幾何移動）。缺乏充分的幾何活動與概念探索，其對於兒童理解面積概念的助益程度也相當有限，此也可能導致其整題解題表現未顯著優於控制組。

接受幾何課程的兒童，雖然在面積運算問題的表現與其他三組的兒童表現相近，且其面積概念理解問題的解題表現也略高於面積組的兒童，但是其整體解題表現遜於幾何與面積組，也未顯著優於面積組與控制組。雖然強化加與減的概念理解，有助於低年級兒童解決加與減問題的能力（Carpenter et al., 1989），但是本研究以幾何為核心的教材，假設四年級兒童能利用幾何概念與技能及所理解的面積公式，應用於解決問題。他們雖

然瞭解面積公式意義，但是將此幾何直觀轉化成解決面積問題的表現，卻不盡理想。雖然學者們建議面積教學需於幾何脈絡下進行（Bright & Hoeffner, 1993），強化幾何概念與圖形的切割組合的技能，有助於兒童對於面積公式的瞭解（Fuys et al., 1986）與計算圖形內包含的單位面積（Clements et al., 1997），但是本研究發現，僅提供幾何概念，猶不足以有效增進兒童解決面積問題的能力。由此可見，對於開始學習面積公式的四年級兒童而言，只提供偏重幾何概念與不同圖形面積公式的關係之教學，缺乏實際運用數量作面積測量之計算，不足以提升他們解決面積問題的能力。

(二)晤談兒童的解題策略與其策略改變分析

從晤談兒童的解題策略分析，可發現：兒童解決面積問題所使用的策略，乃包含多樣性，而非只用單一策略，例如：彈性地使用公式、切割組合後應用長方形面積公式或點數等方法。而且，兒童偏好使用點數格子的策略，此結果與 Bell 等（1983）及 Schifter 等（2002）的研究一致。點數格子的策略需要多步驟方能完成解題，費時且容易導致計數錯誤（Bell et al., 1983）。當兒童未完全瞭解面積公式，而且圖形未附有格子時，他們傾向於使用錯誤的策略，例如：將圖形的兩邊長度相加再除以2，或盲目地套用長方形面積公式等無效率的策略。

從兒童解題策略改變的趨向分析，可發現：實驗組比控制組表現較高次數的使用面積公式解題、改變原先低或無效率策略以使用公式正確解題的現象，可得知兒童學習與應用面積公式解題，有賴於所提供的面積或幾何相關的教學活動。此亦說明面積教材所包含的數學概念與結構品質，影響學生的面積概念與公式理解，進而影響他們使用有效率策略解決面積問題的表現。另一方面，值得注意的是：從量化資料分析，可發現實驗課程影響兒童學習面積公式與問題解決；但是，從晤談資料也發現少數兒童於接受實驗教學後，仍未改變原來無效率的解題策略。在晤談中，他們常需要輔以簡要的面積概念說明，方能說明解題想法。此也提醒教學者，教學活動後晤談兒童，以瞭解兒童是否充分瞭解教材（Leinhardt, 1989），並視情況提供面積概念說明，對幫助少數未充分理解面積公式的兒童學習，有其必要性。

此外，從本研究控制組之解題表現與接受晤談之表現，可發現他們雖然未接受任何有關幾何與面積測量的教學處理，但是他們在先前的數學課程學過一些幾何知識與面積測量基本概念，讓他們表現出部分的解決面積問題的能力。接受面積課程及幾何課程的兩組兒童，其解題表現皆未優於控制組，導致此結果的可能原因，包含三方面：(1)本研究所評量的面積問題解題能力，為解決提供及未提供格子的圖形面積問題之表現。控制組兒童在先前的課程，已經學習過長方形與三角形的特性、面積的基本概念與長方形面積公式，如果他們從問題提供的圖形能發現「長方形內接的直角三角形之大小，為長方形面積的一半」，則可以應用長方形面積公式的（長 × 寬）乘積除以2（Burns & Brade, 2003）或點數格子技能，完成解題。換句話說，未接受實驗教學的控制組，他們只要能察覺長方形與三角形、平行四邊形的關係，也能應用切割與組合圖形的技能及點數策略，完成面積問題的解決。(2)呈如前文所述，本研究的面積測量能力評量，面積計算問題佔有高比例，對於解決提供格子的圖形面積問題，控制組兒童亦可使用點數策略完成解題。(3)本研究中，偏重面積計算的面積教材及偏重幾何概念的幾何教材，前者缺乏幾何

概念，難以深化兒童對面積公式的理解，後者則缺乏面積運算技能練習，兒童的測量運算經驗不足，兩種匱乏皆可能弱化兒童學習面積的效果。

二、結論與建議

本研究發現整合二維空間幾何概念與面積測量概念，輔以導引式的問答討論教學，可以有效幫助兒童理解面積公式的意義，進而提升其解決需說明面積概念的問題之能力。兒童能彈性地使用多種策略解決面積問題，包含：使用公式；切割組合圖形，然後應用長方形面積公式或點數格子等策略。而且，提供面積或幾何概念的課程與教學，對於幫助兒童改變低或無效率的策略，以使用有效率的策略解決面積問題，具有意義。因此，學校數學的課程與教學，在發展學生的面積測量能力上扮演重要角色（Battista, 2003; Fuys et al., 1988）。

針對面積的課程與教學，以下提出兩點建議。第一，雖然僅提供幾何概念與技能，不足以有效增進兒童解決面積問題能力，但是幾何概念為兒童建構面積公式的基礎。學校數學應提供結構良好的二維空間幾何概念與面積測量概念整合課程，輔以導引式的問答討論教學，以有效提升兒童解決面積問題的能力。第二，兒童能否使用有效率的策略解決面積問題，一方面受其對面積公式理解的品質影響，另一方面，教師提供的作業問題性質，也將影響兒童策略的使用（Outhred & Mitchelmore, 2000）。因此，教師需檢視學生對於基本圖形的性質、乘法知識與矩陣概念的理解，而非僅以學生能套用面積公式解題為滿足。同時，欲導引兒童使用較有效率的策略解決面積問題，教師是否在圖形上提供格子，其適用時機需謹慎考量。雖然點數策略可以完成面積問題解決，但是兒童使用此技能，未必表示他們理解面積意義與公式。教師可於介紹面積初步概念時，提供圖形附加格子的問題，以幫助學生建構平方單位複製在面積測量上的意義，迨學生瞭解面積意義與長方形面積公式以後，逐漸將圖形上的格子移除，並鼓勵兒童使用有效率的策略，取代低效率的點數策略。

在建議未來的研究方面，除了上述建議以外，本研究焦點為探討幾何與面積測量的實驗課程，對兒童學習與使用長方形、三角形與平行四邊形面積公式解決面積問題的影響，建議未來的研究，可擴展探討實驗課程對兒童學習梯形、圓形公式與解決不規則圖形面積問題的影響。而且，欲彰顯實驗教材對兒童面積概念理解與問題解決能力的影響效果，在評量工具的設計上，一方面可增加圖形未附有格子的面積計算問題，減少圖形未附有格子的問題，另一方面，增加評量面積概念理解問題，降低面積運算問題的題數，以獲得更多兒童應用面積公式解決問題的訊息。本研究從晤談中發現，少數兒童未能充分瞭解面積概念，建議未來的研究提供較長的教學時間，增加說明面積概念與探索公式的教學活動，以幫助少數面積概念未完全理解的兒童，更充分地認識面積概念與公式意義。

致　　謝

本研究感謝參與實驗研究的小學校長、行政主管其所提供的行政協助，及參與教學實驗的小朋友之貢獻。

參考文獻

1. 黃幸美（2003）。討論與真實情境對兒童解決問題的影響。**教育研究集刊，49**（1），

95-133。
2. 黃幸美（2004）。**兒童的數學問題解決思考**。台北：心理。
3. 黃幸美、張汶后（2009）。國小的面積課程與教學探討。**國教新知，56**（3），113-123。
4. 林碧珍、蔡文煥（2003）。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。**科學教育月刊，258**，2-20。
5. 高敬文（1989）。我國國小學童測量概念發展之研究。**省立屏東師範學院初等教育研究，1**，183-219。
6. 教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程綱要。**數學綱要**。台北：教育部。
7. 譚寧君（1995）。面積概念探討。**國民教育，35**，1-21。
8. 譚寧君（1998）。國小兒童面積迷失概念分析研究。**國立台北師範學院學報，11**，573-602。
9. 譚寧君（1999）。從兒童的測量迷失概念看教師對兒童測量知識的瞭解。**國立台北師範學院學報，12**，407-436。
10. 羅妙娟（2005）。**台北地區四五年級面積概念之調查研究**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，臺北市。
11. Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 503-532.
12. Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 122-142). Reston, VA: NCTM.
13. Bell, A. W., Costello, J., & Küchemann, D. (1983). *A review of research in mathematical education. Part A. research on learning and teaching*. England, Windsor: NFER-Nelson Publishing Company.
14. Bright, G. W., & Hoeffner, K. (1993). Measuring, probability, statistics, and graphing. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 78-98). New York: Macmillan.
15. Bonotto, C. (2003). About students' understanding and learning of the concept of surface area. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 157-167). Reston, VA: NCTM.
16. Burns, B. A., & Brade, G. A. (2003). Using the geoboard to enhance measurement instruction in the secondary school mathematics. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 256-270). Reston, VA: NCTM.
17. Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26*, 499-531.
18. Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminsthan, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *The Elementary School Journal, 98*, 171-186.
19. Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teachers.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
20. Craine, T. V., & Rubenstein, R. N. (1993). A quadrilateral hierarchy to facilitate learning in geometry. *The Mathematics Teacher, 86*, 30-36.
21. Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988).

The van hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mahematics Education Monograph, 3*, 1-195.

22. Hart, K. (1984). Which comes first- length, area, or volume? *Arithmetic Teacher, 31*, 16-18, 26-27.
23. Hicks, D. (1995). Discourse, learning, and teaching. In M. W. Apple (Ed.), *Review of research in education* (pp. 49-95). Washington, DC: America Education Research Association.
24. Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
25. Inskeep, Jr., J. E. (1976). Teaching measurement to elementary school children. In D. Nelson (Ed.), *Measurement in school mathematics* (pp. 60-86). Reston, VA: NCTM.
26. Kenney, P. A., & Lindquist, M. M. (2000). Students' performance on thematically related NAEP tasks. In E. A. Silver & P. A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 343-363). Reston, VA: NCTM.
27. Kordaki, M., & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: Exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*, 99-135.
28. Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. L. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 100-121). Reston, VA: NCTM.
29. Leinhardt, G. (1989). Developmental of an expert explanation: An analysis of a sequence of subtraction lessons. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction* (pp. 67-124). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
30. Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
31. Martin, W. G., & Strutchens, M. E. (2000). Geometry and measurement. In E. A. Silver & P. A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 193-234). Reston, VA: NCTM.
32. National Center for Educational Statistics. (2005). *NAEP Questions*. Retrieved March 1, 2007 from National Center of Educational Statistics Web site: http://nces.ed.gov/nationsreportcard/itmrls.
33. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The author.
34. Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangle area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 144-167.
35. Rahim, M. H. (1986). Laboratory investigations in geometry: A piece-wise congruence approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 17*, 425-447.
36. Rittle-Johnson, B. (2006). Promoting transfer: Effects of self-explanation and direct instruction. *Child Development, 77*, 1-15.
37. Rowan, T. E. (1990). Implementing the Standards- Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*, 24-28.
38. Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J., & Woleck, K. R. (2002). *Measuring space in one,*

two, and three dimensions: Case book. Parsippany, NJ: Dale Seymour Publication.

39. Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem-solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565-579.
40. Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.
41. Strutchens, M. E., Harris, K. A., & Martin, W. G. (2001). Assessing geometry and measurement. Understanding using manipulatives. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*, 402-405.
42. Strutchens, M. E., Martin, W. G., & Kenney, P. A. (2003). What students know about measurement: Perspectives from the national assessments of educational progress. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 195-207). Reston, VA: NCTM.
43. Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (5th ed.). New York: Pearson Education.

An Experiment of Two-Dimensional Spatial Geometry and Area Measurement Concepts Integrated Curriculum and Instruction

Hsin-Mei E. Huang

Graduate School of Curriculum and Instruction, Taipei Municipal University of Education

Abstract

The purpose of this study was to examine the effects of the three experimental curricula that integrated two-dimensional spatial geometry and area measurement concepts in different combinations on improving children's construction of the area formulas and their ability to solve area measurement problems. The participants (N = 120 fourth-grade children) who came from four classes in an elementary school in Taipei, Taiwan, were randomly assigned to the three experimental-curriculum groups (area measurement group, two-dimensional spatial geometry and area measurement group, two-dimensional spatial geometry group) and the control group. The results showed that the curriculum that integrated two-dimensional spatial geometry with area measurement significantly strengthened children's ability to solve area measurement problems. Specially, it facilitated children's improvement at solving problems that required conceptual understanding of area measurement. Nevertheless, this effect did not show in the other experimental curricula. Additionally, the interview data revealed that the children who received the experimental curricula were more likely to use the area formulas to solve area measurement problems than the control group. Furthermore, they tended to change their initial less efficient strategy (or inefficient strategy) to the use of the area formulas. Overall, the study provided the evidence and suggestions for enhancing children's conceptual understanding of area measurement and problem-solving ability.

Key words: Two-Dimensional Spatial Geometry, Area Measurement, Problem Solving, Conceptual Understanding