科學教育學刊
2011, 第十九卷第一期, 39-67

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(1), 39-67

臺灣、美國和新加坡三個七年級代數教科書發展學生數學能力方式之研究

楊德清[1、*]　陳仁輝[2]

[1]國立嘉義大學　數學教育研究所
[2]嘉義市蘭潭國中

(投稿日期：民國99年1月28日，修訂日期：民國100年1月26日，接受日期：民國100年2月9日)

摘要：本研究旨在探討美國「情境數學」(Mathematics in Context)、新加坡「新課程數學」(New Syllabus Mathematics)與臺灣九年一貫「部編版」(Mathematics Official Textbook)等三個數學教材中七年級代數課程發展數學能力方式之差異性比較。本研究選取上述三套教科書，並以質性之內容分析法進行分析。研究結果顯示，「部編版數學」的知識內容最廣，偏重程序性知識的精熟，循Polya的解題方式，發展數學能力；「情境數學」則藉由情境學習促進學生建構概念性的理解，以科技輔助運算，發展多元策略以提升數學能力；「新課程數學」主張代數的工具性角色，強調精熟學習。

關鍵詞：代數、情境數學、教科書、部編數學、新課程數學

壹、研究動機與目的

爲因應全球化、知識經濟化的發展趨勢，世界各主要國家都把改善教育品質視爲提升國家競爭力的關鍵環節之一。著眼於未來人材的競爭優勢，學生的數學學習成就成爲國際間公認評比人才是否具有競爭力的指標之一；因此，長期以來各國皆非常重視學生的數學學習成就表現。Schmidt等(2001)針對1995年第三次國際數學與科學教育評鑑(the Third International Mathematics and Science Study, TIMSS)的總結成果報告進行後續研究，發現課程與學習成就間呈現正向關係；Törnroos (2001)在TIMSS1999的後續研究報告也指出，受測的七年級學生中有99%的學生仰賴教科書進行大部分的數學學習，進一步地在2004年研究中發現，學生的學習機會(Opportunity to Learn, OtL)亦是影響學生學習成就表現的重要因素之一(Törnroos, 2004)。簡言之，教科書決定了學

*通訊作者：楊德清

生的學習機會，而學習機會則直接反映出學習的成就，由此可見教科書對學生的學習表現的重要性。另外Chambliss與Calfee (1999)及Westbury (1990)皆主張：「教科書是教材的權威，教學方案的心臟；應該教什麼，要如何教，幾乎完全決定於教科書。」許多相關的研究亦指出，傳統的課室教學中，教師們最常使用教科書以幫助他們備課，教科書儼然成爲學生課堂活動內容的主要來源(Newton, Newton, Blake, & Brown, 2002)。綜合上述的論證，可理解教科書對學生之學習成就表現具決定性的地位(Floden, 2002)，因此，進行教材分析對於提升學生學習數學將有實質的助益(Törnroos, 2004)。由於課程、教材與學生學習成效緊密關聯，課程與教材的良窳是影響學生學習成效的關鍵因素。因此，本研究欲探討部編版數學教科書是否符合現今世界數學教育之趨勢？內容深淺是否符應學生的需求？選定七年級的部編版教科書進行研究。

而國際間數學教育學者皆認同代數是基礎數學知識中極爲重要之主題(Smith & Philips, 2000; Star, Herbel-Eisenmann, & Smith, 2000)。研究指出從國小、國中到高中的數學課程，沒有比代數更具挑戰性的(Smith & Philips)。Stacey與MacGregor (1997a)認爲學生學習代數的困難在於新學習的內容受到不同知識之干擾、教材的設計不良或誤導。Herscovics與Linchevski (1994)則認爲許多學生沒有時間建構好的代數直觀概念基礎，以及連結先前國小初等代數的概念，會阻礙真正的理解與未來高深數學之學習。

基於上述論點，且由於臺灣、新加坡兩國是數學教育之牛耳，而美國更爲數學教育的重要發展國家之一。因此，本研究選取美國、新加坡與臺灣數學教材之一套教科書爲樣本。接著選取臺灣部編版數學(Mathematics Official Textbook, MOT; 65.0%)與新加坡新課程數學(New Syllabus Mathematics, NSM; 80.0%)市佔率較高的版本進行分析(韓國棟，2005；SGBox, 2006)；而美國之情境數學(Mathematics in Context, MiC)教材不僅是由世界主要之情境教材發展國家荷蘭Freudenthal機構研究群與美國研究群所共同合作開發(Meyer & Ludwig, 1999)，同時該教材更被American Association for the Advancement of Science (AAAS)評定爲最高品質的美國中學數學教材之一(Senk & Thompson, 2003)。因此，本研究選取美國情境數學、新加坡新課程數學和臺灣部編版數學等三版本進行七年級數學教材中「代數主題」發展學生數學能力方式之比較。研究問題如下：

臺灣、美國和新加坡三個七年級代數教科書發展學生數學能力之方式的差異爲何？

貳、文獻探討

一、提升數學能力為課程改革之核心目標

發展學生數學能力是現今國際間數學教育界非常重視的研究主題，更是數學教育改革的主要趨勢(National Assessment Governing Board [NAGB], 2002; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Stephen, 1999)。而我國九年一貫課程數學學習領域綱要(教育部，2003)以及美國加州課程標準(California Department of Education, 2006)亦明確指出發展學生解決問題之數學能力的重要性。此外，國際性評量the Programme for International Student Assessment (PISA)在2003及2006年更將數學能力，視爲孩子能夠適應未來社會生存與競

爭之基本能力。此正顯示，提升學生之數學能力實爲當前數學課程改革之核心目標。那麼何謂數學能力？NAGB、Stephen以及美國加州課程標準具體地指出數學能力的核心包括了「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」等三者。同時，美國國家教育進步評量委員會(National Assessment of Educational Progress [NAEP])更清楚地將數學能力的組成定義爲對概念性知識的理解、程序性技能的流暢與解題等三個面向；並進而在後續的評量中以三個面向來評量美國學生的數學能力。本研究參酌NAEP (NAGB; Stephen)以及美國加州教育部的詮釋，定義概念性知識的理解是指學生能辨識以及利用各種不同表徵或說明來表達出某一數學概念，進而能理解數學原理(如加法原理、乘法原理)，並在原理間做相互連結、比較及整合應用；程序性技能的流暢是指學生能在運算的過程中，選擇適當的公式以促進解題的流暢，並能檢驗所使用的公式是否正確；解題則是指學生能從資料中逐漸辨識並形成問題，並能瞭解這些資料的充分必要性，同時運用相關概念，以採取適當的運算公式來找出答案，並能驗證這些答案的合理性與正確性。

綜合上述，可知世界各先進國家的數學教育皆強調培養學生具備解決問題的數學能力，並且具體且明確地都已將培養學生解決問題的能力納入數學教育的核心目標或能力指標中(教育部，2003；Ministry of Education in Singapore, 2001, 2007; NCTM, 2000)。因此，本研究將依據上述文獻探討之分析，將數學能力定義爲涵括「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」等三個面向爲基礎，以進一步探討台灣、美國和新加坡七年級代數課程之發展學生數學能力方式之差異。

二、代數學習相關之研究

長期以來相關研究(Edwards, 2000; NCTM, 2000; Star et al., 2000; Vennebush, Marquez, & Larsen, 2005)即指出代數概念的發展是中學學生學習數學的主要目標，因爲代數能力的發展是未來抽象數學思維與邏輯推理能力的基礎。但是在數學學習的主題中，代數主題相對於其他主題而言，其內容的學習對多數的學生而言是比較抽象而難以理解的(NCTM; Sfard, 1995; Stacey & MacGregor, 1997)。先前代數相關之研究指出學生在學習代數的過程中常見之困難類型含括了：(一)賦予代數符號特定數值或認爲代數符號代表特定值(楊中宜，2007；Stacey & MacGregor)；(二)不瞭解抽象代數符號之意義，進而不知如何處理抽象之代數符號(戴文賓、邱守榕，1999；Philipp & Schappelle, 1999; Sfard)；(三)誤用代數運算規則，例如缺乏等量公理之概念(謝和秀，2001)；(四)情境會影響學生對代數符號的理解(楊中宜；Philipp, 1992)。從上述之討論可以發現，學生在學習代數的過程中容易產生許多學習困難，且教科書內容的良窳會影響教師之教學與學生之學習，透過不同國家教科書的比較，對未來教科書之編排與內容設計應有實質之助益，進而能夠幫助學生之學習。因此，本研究透過不同國家各選取一套數學教科書中代數內容之比較，實有其重要性。

三、代數課程相關之研究

Star等(2000)針對Connected Mathematics Project (CMP)數學課程中之代數主題進行分析研究，研究結果發現：CMP的代數課程強調利用多重表徵進行對函數關係之瞭解(Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips,

1996)，而代數課程中文字題呈現的形式大都以表格、圖形或代數式的形式呈現，這也異於傳統之純文字敘述方式呈現的文字題。同時亦強調融入與學生生活經驗相似或真實的生活情境(NCTM, 2000)，此與傳統的代數教材中內容皆是以方程式和代數式等公式之探討爲主有極大之不同，此顯示新代數課程較強調解決問題的數學能力與概念性知識的發展(Hiebert et al., 2003; Star, 2005; Stein, Remillard, & Smith, 2007)。Romberg與Shafer (2003)的研究指出情境數學課程在主要的數學主題如數、代數等各單元之內容與教學強調概念性的理解、真實情境融入數學活動中對學生之數學學習成就表現有正面之影響。由上述之討論可以發現，傳統之代數課程較著重於計算能力之發展，即強調程序性知識與技能的學習；但是新代數課程則期望透過對問題的探索、分析和討論以及適時的引導學生解題，強調概念性知識的發展，則學生較能對數學概念獲得深入的理解。究竟課程內容如何安排較妥適？則仍待進一步之研究。陳宜良、單維彰、洪萬生與袁媛(2005)比較七國課程綱要之研究中發現各國在七年級代數內容之安排上仍有其差異處；例如：我國七年級課程同時完成一元一次、二元一次方程式的學習，但是其他國家則分別安排在七至八年級完成這兩個單元的學習。徐偉民與徐于婷(2009)比較臺灣和香港教科書代數單元之差異發現我國教科書以螺旋式之方式呈現代數概念，但是香港教科書則以主題獨立方式並分年學習之方式呈現代數概念。

由上述之探討可以發現，不論國內外在數學教科書之安排上皆有其差異性；但是相關研究(Tarr et al., 2008; Törnroos, 2004)指出教科書內容呈現方式之不同不但會影響教師之教學成效，更會影響學生之學習表現。因此，瞭解各國教科書內容之呈現方式，以做爲未來教科書發展之參考依據，實有其重要性。

參、研究方法

本研究以內容分析法之質性分析方法，深入比較樣本國家之代數課程內發展學生數學能力方式之差異。

一、研究對象

本研究採立意取樣，選取臺灣「部編版數學」、新加坡「新課程數學」和美國「情境數學」教材中七年級之代數教材內容作爲研究對象，背景分述如下：

(一)臺灣部編版數學

當教科書開放民間版本之時，教育部在2003年公告九年一貫正式課程綱要後，於2005年推出一年級及七年級的部編版數學教科書，教材編輯理念強調基本概念的理解與計算能力的發展。「部編版數學」強調從數學知識的觀點出發，強調學生計算能力之重要性，提供適合學生年段之數學概念及數學方法，營造學習情境以促進學生發表、溝通、分析與推理之機會，進而提升數學能力與欣賞數學的能力。「部編版數學」七年級教材中與代數主題相關的內容有四個單元，分別爲「一元一次方程式」、「一元一次不等式」、「二元一次聯立方程式」、「函數與直角座標」，並以此作爲研究範疇。

(二)新加坡新課程數學

新加坡於2001年開放商業版數學教材，目前中學數學教材有四個版本。「新課程數學」即爲其中之一，該版本目前在新加坡七年級學生之使用比例約佔80.0% (SGBox, 2009)。另一方面，促使新加坡學生在TIMSS1995、1999和2003表現出眾的教材，

即爲Singapore Math所出版之「新課程數學」、「基礎數學」(Primary Mathematics)與「新國小數學」(New Elementary Mathematics)等三套教材(Singapore Math, 2011)。本研究以「新課程數學」七年級之代數課程作爲分析對象，並以「基礎代數」、「代數方程式」、「數列與解題」等三章以代數爲主題之內容爲研究範疇。

(三)美國情境數學

「情境數學」由荷蘭烏徹司特大學之福祿丹色研究中心與美國威斯康辛大學之教育研究中心教授、中學數學教師組成課程開發小組，依據美國數學教師學會(NCTM, 1989)之課程綱要精神，以「置數學於情境中」的理念所發展出數學教材(Romberg & Shafer, 2003)。Romberg與Shafer進一步指出爲了忠實地反應學生在真實世界情境中之思維與溝通的經驗，上述之數學教育研究群乃發展出一套情境式的數學教材，這套數學課程適用層面很廣，更重要的是其內容編排與教學方法能夠符應NCTM的主張與數學教學理念。情境數學課程整套教材設計年級從五年級到八年級，七年級教材中與代數概念相關之內容包括“Ups and Downs”、“Building Formulas”與“Decision Making”等，本研究乃以此三個單元爲研究範疇。

二、類目建構與資料處理

本研究依據三國課程綱要的內容發展研究之主題類目，其中，臺灣和美國都將數學內容細分爲數與量、幾何、代數、機率與統計等四大主題，一致性甚高，至於新加坡則有更精細的區分。因此，在類目發展的過程中，爲使三國教材內容能做一持平的分析，本研究乃參酌陳宜良等(2005)在七國課程綱要比較中的分類方式，將原本被獨立於代數之外的樣式與數列納入代數主題中，經過與多位資深的中學數學教師的討論，將本研究代數主題內之主類目分爲「一元一次方程式」、「一元一次不等式」、「二元一次方程式」和「樣式、函數與座標」四個面向進行分析。說明如下：

(一)一元一次方程式

包括以符號來列式、代數式的值、式子的運算、方程式的概念、等量公理、解一元一次方程式、一元一次方程式的應用題等內容。

(二)一元一次不等式

包括不等式的意義、不等式的性質、不等式和數線、不等式的解和應用問題等內容。

(三)二元一次方程式

包括二元一次方程式的列式、代入消去法、加減消去法和解應用問題等內容。

(四)樣式、函數與座標

包括變數的意義、函數的對應關係、直角座標、函數的圖形和二元一次方程式的圖形等內容。

另一方面，基於研究目的之考量，進行內容分析時，以章爲分析之主要單位(王石番，1991)。由於三國數學教科書之章節名稱說法不一，分別說明如下：臺灣部編版數學以章作爲區隔，如第一冊第五章「一元一次方程式」、第二冊第一章「一元一次不等式」、第三章「二元一次聯立方程式」、第四章「函數與直角座標」，故計數爲四個單元；美國「情境數學」，每個單元以單本教材呈現，七年級代數教材有“Ups and Downs”、“Building Formulas”及“Decision

Making”三本教材；因此，以單本教材計數爲一個單元，共計三個單元；新加坡「新課程數學」七年級教材有「基礎代數」、「代數方程式」、「數列與解題」三個單元，故計數爲三個單元。

因此，本研究之主題類目與各版本所選取的單元整理如表1所示。

本研究進行分析時，以相關研究(Hiebert et al., 2003; NAGB, 2002; NCTM, 2000)爲基礎，同時參酌國內相關研究方法(吳明穎，2002；吳麗玲，2006)，以及參照教科書的實際內容，依據文獻探討所得之結果，定義影響學生數學能力的三個面向爲「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」等三部分，以作爲上述類目分析時的分析面向。此外，爲深入分析各教材之差異，本研究分別依據上述三個面向，深入分析各教材在「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」等三個面向之知識呈現方式，依序進行比較與探討，最後進行綜合論述三者之差異。

三、內容分析之信效度

在資料處理過程中，本研究依上述類目先將資料內容進行歸類，再以歸類後的資料分別進行內容分析比較，並採三角校正法，以排除資料分析過程中過於個人主觀所認定的資料，以期客觀地進行資料的處理與分析。在資料分析中，本研究採人員三角校正法，邀請兩位專家分別依據本研究所定義之學生數學能力的三個面向將內容分別歸類至「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」等三種，分析結果顯示一致性達90%以上，顯示具有良好之信度。若內容有不同的歸類，則與研究者共同進行討論與溝通，以獲得一致認同的歸類結果。在效度方面本研究採專家效度，邀請三位資深的數學教師(數學教學年資分別爲20年、15年與13年)以及一位數學教育專家共同參與討論，同時參考相關研究(吳明穎，2002；吳麗玲，2006；Hiebert et al., 2003; NAGB, 2002; NCTM, 2000)，發展出本研究之內容分析類目與定義影響學生數學能力的三個面向爲「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」等三部分。參與人員皆一致認同本研究之分類方式。是故，依據上述資料分析與處理方式，本研究具良好之信效度。

肆、研究結果與討論

本研究依主題類目並參酌相關研究(Hiebert et al., 2003; NAGB, 2002; NCTM, 2000)，定義影響學生數學能力的三個面向爲「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」；進而深入分析三套教材在此三向度內容下之差異。因此，本節首先呈現三套教材在代數主題之發展學生數學能力方式所佔百分比(如表2)，結果顯示三套教科書中，美國情境數學在概念性知識的發展上之百分比最高，約佔全部教材的三分之

表1：教材單元類目分佈圖

類目名稱	部編版(MOT)	情境數學(MiC)	新課程數學(NSM)
一元一次方程式	一元一次方程式	Building Formulas	代數方程式
一元一次不等式	一元一次不等式	Decision Making	數列與應用題
二元一次方程式	二元一次方程式	Ups and Downs	基礎代數
樣式、函數與座標	函數與座標	*	*

註：*表示該版本無此編碼。

表2：三套教材在代數主題之發展學生數學能力方式所佔百分比

課本	比較項目		
	概念性知識理解	程序性技能的流暢	解題
情境數學(MiC)	64.3%	22.8%	12.9%
新課程數學(NSM)	24.6%	59.6%	15.8%
部編版(MOT)	34.0%	42.5%	23.5%

二；其次是部編版數學，約佔全部教材的三分之一；所佔比率最低的是新加坡新課程數學，約佔全部教材的四分之一。在程序性技能部分新加坡新課程數學最高(59.6%)，其次是部編版數學(42.5%)，最後是美國情境數學(22.8%)。在解題部分，部編版數學所佔比率最高(23.5%)，其次是新加坡新課程數學(15.8%)，最後是美國情境數學(12.9%)。此顯示三套教科書在發展數學能力的三個面向上有其差異性，美國情境數學較強調概念性知識的理解，新加坡新課程數學則較強調程序性技能的流暢，我國部編版數學則較平均。「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」三者在教科書中究竟應佔何種比率，目前在數學教育中尚無定論，仍待相關研究做進一步之比較分析(Stein et al., 2007)。

以下分別依前述之三個面向以進行深入之內容分析以比較三套教材之差異：

一、部編版數學

部編版數學以傳統式的解說法引入數學知識，學生不易在學習歷程中發展出概念性的理解，視「熟練運算和推演技巧」爲解題的核心，強調正式解題策略的精熟，解題方式略顯單調，不易形塑多元的方式。分項說明如下：

(一)內容呈現方式以概念發展、程序運算的熟練以及解應用問題等三個階段進行鋪陳

「部編版數學」在內容呈現方式係以概念發展、程序運算的熟練及解應用問題等三個階段進行鋪陳。很一致地，教材都會先以文字說明概念的定義並加以解釋，隨之以例題說明前述概念，並輔以練習檢驗學生是否能運用概念回答問題，以確認對知識的掌握程度，然後進行相關解題程序的熟練操作，最後以解應用問題進行總結。如圖1，說明如下。

由圖1可知，教材在引導學生學習的歷程中，完全依照方程式相關知識邏輯順序設計，每一節的內容都切割的非常清楚，每一節的學習目標皆非常明確，從「以符號來列式」開始，依序發展到「解應用問題」，詳細地刻畫出教材的編排係針對具體知識和技能的發展進行，遵循知識的系統逐步地擴展課程內容。這種詳盡地可操作性設計有助於學生做小單元內容的精熟，單元內知識點較少，學生容易掌握知識和技能，也方便教師教學活動的進行，但由於不同節次間的區隔過於片斷，造成連續節次間的內容連結性不強，極易造成學習者在最後統整上的困難。由於教材內容依知識結構引入，不同階段間的學習形同獨立，相關性不強；因此，學生不易進行數學知識之統整。

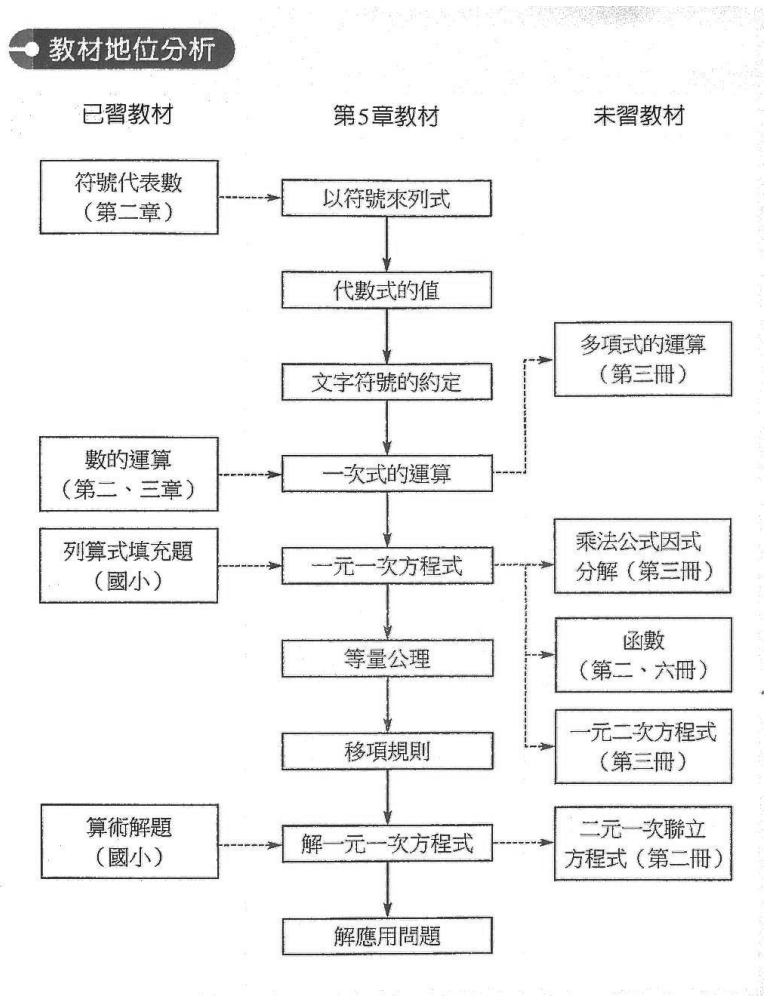


圖1：教材地位分析圖

資料來源：**部編版國民中學數學教師手冊第一冊**，國立教育研究院籌備處，2005a，頁15。

(二)概念知識鋪陳方式單調，採直接陳述方式，鮮見推理、思考等促進理解的內容設計

在概念性理解上，由於「部編版數學」慣於對「概念性知識」採取陳述知識的方式定義方程式相關概念意義，再透過大量的例題安排，示範如何在問題中使用「所學概念」回答問題，最後以相似例題進行練習，藉以檢驗學生是否能成功的使用概念以完成單步驟問題。例如，在方程式主題的學習之初，學生所接觸的並不是「問題」，而是被描述的知識，以部編版國中數學第二冊在「方程式的列式」內容爲例：「柿子一個賣35元，水蜜桃一個賣50元，媽媽買了X個柿子和Y個水蜜桃。試用X和Y列出媽媽要付的錢」(國立教育研究院籌備處，2005c，頁86)。

上述例題中，教材在「關係式的意涵」上，發展過程幾乎完全略過，學生被直接要

求列出包含兩種未知數的方程式；因此，學生常以模仿範例的方式列式，實際上卻未能真正地對方程式中的未知數及等價關係進行表徵活動之探索以發展深入的理解。許多表徵相關之研究與文獻報告指出多重表徵有助於數學概念的發展，以及對理解能力的加深、加廣，同時亦主張，培養學生能夠彈性與適時的選用各種表徵策略，同時能夠靈活地進行表徵之間的轉換，方能代表對概念的理解(Brenner, Herman, Ho, & Zimmer,1999; Cramer, Post, & delMas, 2002; Dreyfus & Eisenberg,1996; NCTM, 2000)。然而，在上述範例中，由於教材的問題過於精簡，學生僅須局部推測，即可轉譯題意方程式，反倒減損了培養學生辨識出潛在數學關係的機會，不利學生分析能力的發展，自然無法刺激學生多元的解題想法。另一方面，「部編版數學」慣於要求學生依據題意直接寫出兩種未知數的關係式，更驅使學生的表徵方式趨向於單一的標準形式，漸漸地降低了學生多元表徵能力發展的可能性。因此，教材透過單一表徵的方式陳述知識以發展概念知識，不利於學生對「方程式」的意義賦予(許馨月、鍾靜，2004；鄭毓信，1998)，亦壓縮了由學生自行建構概念意義化的歷程，間接地影響學生對概念理解的發展。儘管教材亦強調對課程內容的理解，也直接對相關所欲學習的概念給出了完整的說明和解釋，如圖2所示。

然而，從上面的例子可發現，教材呈現知識的方式，並無法提供學生面對挑戰，進而引發思考、推理、蒐尋可行經驗以建構較高階解題經驗的機會(NCTM, 2000; Stein et al., 2007)。換句話說，由於教材已提供了「思考的結論」給學生觀摩，因此，學生僅存的思考空間可能就僅限於「思考如何正確地使用這些概念」，因而也就減損了營造讓學生自己親身去推理和思考以形塑這些概念的意義和理解概念的機會(Stein et al.)。

(三)在運算能力與技巧上，循螺旋式發展，以先備知識與技能為基礎，逐步發展運算技能

在程序性知識面向上，研究發現教材特別重視由較低層次的運算技能逐步地由低而高向上發展；以方程式爲例，教材便一貫地強調以國小已學習過的程序性知識做爲基礎，持續地發展到較高層次的運算技能。如在國中數學第一冊第五章「一元一次方程式」的「以符號來列式」中，教材就寫到：「既然符號代表數，那麼數的運算規則也可以應用到符號的運算，例如：由$a \div b \times c = a \times c \div b$，得到 $\frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot x = 2 \div 3 \times x = 2 \times x \div 3 = \frac{2x}{3}$，同理，$-\frac{4}{7}x = \frac{-4}{7}x = \frac{4}{-7}x$ 都等於$(-\frac{4}{7})x$」(國立教育研究院籌備處，2005b，頁149)；另151頁中提到：「我們學過利用指數來表示同數相乘，例如：3×3記成3^2；$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}$ 記成 $\left(\frac{5}{9}\right)^3$。因為符號代表數，所以也可以運用這項規則，例如：x．x可寫成x^2；x．x．x可寫成x^3」(國立教育研究院籌備處，2005b，頁151)；以及在第二冊第一章第四節「一元一次不等式」中的第36-37頁，寫到：「……這個解題的過程和解一元一次方程式的過程很相似，同樣要設定未知數、依題意列式，和以等量理之類的性質協助解題。」(國立教育研究院籌備處，2005c，頁36-37)、「……和方程式的情況一樣，不等式中所包含的符號如x和y稱為未知數。如果有一個數代入不等式的未知數中，能滿足不等式，就稱這個數為不等式的解。」(國立教育研究院籌備處，2005c，頁36-37)等，都一貫化地以累積前置經驗中

如果一個方程式只含一種未知數，而且未知數的次方為1，就稱這樣的方程式為**一元一次方程式**。例如：$13+x=20$、$7+10x=27$、$-12x+8=-4$、$2(x-1)=8$、$3x=x-7$等等都是一元一次方程式的例子。方程式和一般代數式的差別是方程式中有等號，代數式則沒有等號。

Example 例1

下列各式中，哪些是一元一次方程式？

(1) $6x+3$　(2) $-15x-1=0$　(3) $\frac{2y}{3}+1=5$

(4) $2x^2-1=\frac{2}{3}$　(5) $x+2y=1$

解題說明

(1) 一次式$6x+3$中，沒有等號，所以它不是方程式，當然不會是一元一次方程式。

(2) $-15x-1=0$只有一種未知數x，而且它的次方是1，所以這是一元一次方程式。

(3) $\frac{2y}{3}+1=5$只有一種未知數y，而且它的次方是1，所以這是一元一次方程式。

(4) $2x^2-1=\frac{2}{3}$只有一種未知數x，但是它的次方是2，所以這不是一元一次方程式。

(5) $x+2y=1$有二種未知數x、y，所以不可能是一元一次方程式。

隨・堂・練・習

下列各式中，哪些是一元一次方程式？

$\frac{2x}{7}-1=-3$、$-y^2$、$2x-8$、$2x=\frac{1}{6}$、$3x-y=4$。

圖2：概念性例題

資料來源：**部編版國民中學數學第一冊**，國立教育研究院籌備處，2005b，頁176。

的程序性知識做爲推演到後續知識的基礎，這種方式既能讓學生鞏固既有的技能知識，又可循著年段的提升逐步地學習較高層次的技能，有助於對較複雜的技能做系統化的發展。而在推演的技巧鋪陳上，如圖3所示。

教材採取更簡單的方式以發展解題程序所需的運算推演技能，在圖3中，教材直接引入一個情境，說明「我們可以利用乘法對加減法的分配律，來簡化式子」，再藉由操作分配律解決數的化簡問題，以水平遷移該運算程序到式子的化簡。透過上述的學習方式，學生比較容易套用先備知識並連結到新的運算程序，成功地完成程序性的解題，教材並慣性地藉由大量的例題加以熟練、鞏固學生的運算技能。然而，若從學習是經由對概念間關係的網脈連結並以獲致理解的發展觀點而言，學生必須對新的資訊意義化，並且在學生對概念與概念間或概念與程序間發展出理解，真正的學習才算發生(Hiebert et al., 2003)。因此，雖然學生在模仿的歷程中獲致成功，但學生在歷程中並未發生有意義的學習，換言之，學生的解題歷程是經由模仿後複製而來的，並非學生在面對挑戰問題時，主動地從先備知識庫中蒐尋可用的經驗

首先，我們來看一個實例。森雄的撲滿中有50元、10元、5元和1元硬幣。假設50元硬幣有 x 個，10元及5元各有 y 個，和7個1元硬幣，所以知道撲滿中共有：

$(50x+10y+5y+7)$ 元

我們可以利用乘法對加減法的分配律，來簡化式子。例如，

如果 $x=2$，$y=8$，則森雄撲滿中的錢數為

$50\times2+10\times8+5\times8+7=50\times2+(10+5)\times8+7=50\times2+15\times8+7$；

如果 $x=4$，$y=10$，則森雄撲滿中的錢數為

$50\times4+10\times10+5\times10+7=50\times4+(10+5)\times10+7=50\times4+15\times10+7$；

如果 $x=6$，$y=11$，則森雄撲滿中的錢數為

$50\times6+10\times11+5\times11+7=50\times6+(10+5)\times11+7=50\times6+15\times11+7$。

因此觀察到，可以將 $10y+5y$ 合併化簡成 $15y$，所以

$$50x+10y+5y+7=50x+15y+7$$

圖3：以數的關係推演出代數式

資料來源：**部編版國民中學數學第二冊**，國立教育研究院籌備處，2005c，頁87。

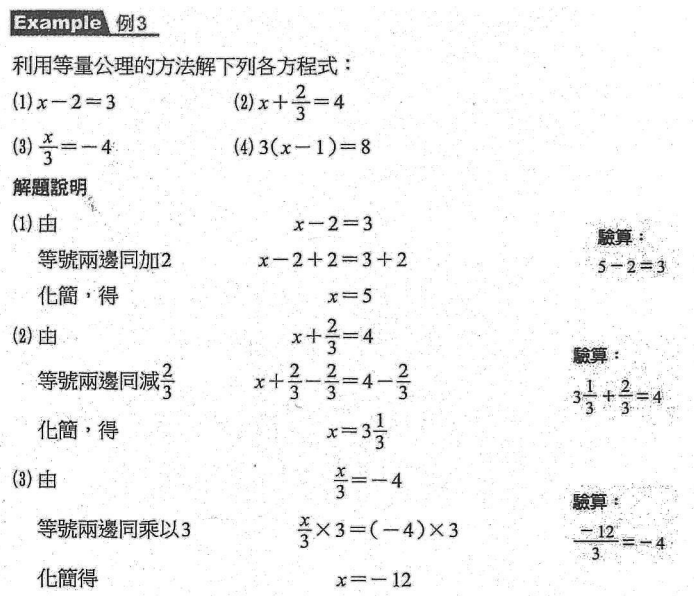
並加以組建後所獲得。這樣的課程安排對於「爲什麼可以這種程序進行解題？以及爲何要如此解題？」相信是很難讓學生理解並給予合理的詮釋。

注重學生個別技能的精熟是教材在發展運算與推演技巧的重點，教材在每一個運算範例之後，都依據學習主題的內容，安排適當的隨堂練習供學生演練，藉以確保學生能獲致足夠練習的機會；整體而言，「部編版數學」透過結構性的題型分類和安排，提供學生多元的題型和足夠的題目數量，驅使學生不斷地運用相關的運算規則和解題技巧以增進熟練度，以發展學生對程序性知識的熟稔。此外，在各種「推演技巧」的串連上，教材則是將單元內容中各種常見的解題方法，逐一呈現在教材範例中，提供給學生學習與模仿的標準。這樣的技能發展點與情境數學引導學生由解決最簡單的方程式中累積技能，並逐步向解決真正具挑戰性的問題推進，兩者間存在根本上的差異。

(四)教材佈題的方式不易進行推理、猜測、說明與解釋等解題能力的建構

部編版教材在佈題情境上，有情境問題佔18%，無情境問題佔82%(陳仁輝、楊德清，2010)，呈現出極不平衡的狀態，大部分的問題都缺乏問題背景，部分問題甚至未符應真實生活經驗，這樣的設計無法提供學生在學習的歷程中促進對數學概念的理解較好的機會(Senk & Thompson, 2003)；另一方面，在「解二元一次聯立方程式」、「二元一次方程式的圖形」中，幾乎所有的範例都沒有情境，例如在第一冊第五章第二節「一次式的運算」、第五章第三節「一元一次方程式的解法」中，總共18個範例，其中16個問題無情境，如圖4。

教材的安排顯現出「部編版數學」想藉由單純化情境，讓程序性的學習從複雜的情



Example 例3

利用等量公理的方法解下列各方程式：

(1) $x-2=3$　　(2) $x+\frac{2}{3}=4$

(3) $\frac{x}{3}=-4$　　(4) $3(x-1)=8$

解題說明

(1) 由　$x-2=3$

等號兩邊同加2　$x-2+2=3+2$

化簡，得　$x=5$

驗算：$5-2=3$

(2) 由　$x+\frac{2}{3}=4$

等號兩邊同減$\frac{2}{3}$　$x+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=4-\frac{2}{3}$

化簡，得　$x=3\frac{1}{3}$

驗算：$3\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=4$

(3) 由　$\frac{x}{3}=-4$

等號兩邊同乘以3　$\frac{x}{3}\times 3=(-4)\times 3$

化簡得　$x=-12$

驗算：$\frac{-12}{3}=-4$

圖4：部編版數學——無情境例題

資料來源：**部編版國民中學數學第一冊**，國立教育研究院籌備處，2005b，頁167，170。

境中抽離出來，俾助於運算能力精熟目標的達成，這樣的安排符應了教材重視運算推演能力的想法；然而，置學生於無意義情境下不斷地進行解方程式的運算過程，學習者極易因內容枯燥而降低學習意願，反而達不到精熟訓練的目的。

(五)解題策略循Polya方式發展數學能力，對不同程度學習者，將無法形塑出不同程度的成就

在「解題策略」發展方式上，「部編版數學」以Polya的解題方式的四大階段爲基礎，教材遵循定義方程式、列出方程式、解方程式到解應用問題的邏輯，分段進行各主題的學習，最後以解應用問題總結。和情境數學不同的是，「部編版數學」將這四個階段的知識做出切割，分別鋪陳，彼此的學習互不干涉，只在最後應用問題解題時，才將各階段的學習內容整合在解應用問題的過程中。從學習知識的角度來看，將解決問題所需的概念與技能分離，針對一個一個知識點，分別進行個別的學習發展，使學生能夠直接的掌握到最精要的知識內容；相對地卻也使學習呈現片斷，忽略了全面完整性的學習，讓教材愈來愈窄化，學生學得也愈來愈少(王建宇，2007)。

二、情境數學

情境數學聚焦在發展理解性教材，課程重視模式的發現與學習，逐步建構出自我對概念知識的理解，對「熟練運算和推演的技巧」著重過程的推論，利用科技輔助以完成程序性運算，整體課程設計易激發學生發展多元解題策略，分別說明如下：

(一)透過生活情境問題的佈題與探索的歷程中逐步發展概念的理解

基於對「概念的理解來自學生在學習歷程中的經驗所得」的理念，情境數學對單元內容中所預期發展的學習目標，在單元內容

學習結束前，情境數學幾乎不對「所要學習的教學目標概念」進行描述或解釋。取而代之的是，教材藉由以生活情境爲佈題背景，向學生提出一系列結構性(蘊涵教學目標)的問題，讓學生能夠在參與解決「精心設計問題」的歷程中，主動探索學習，進而能揭露出其中所蘊藏的概念，以教材中線性方程式中的問題內容說明如圖5。

從圖5中可發現情境數學採取有別於部編版以定義一個概念做爲開場的方式，而是以一封筆友來信引發數個待解決的課題給學生，在一系列問題的鋪陳中，不但未明示學生所欲學習的主題——線性方程式中兩個變數之間的定量性及圖形關係，反而置學生於回答所設計的問題中，逐漸地從實作中體驗到線性方程式兩個變數之間的關係。如此的作法，提供學生能以自己的方式自由地建構兩變數間關係的機會，從而讓學習意義化。此正呼應杜威做中學之精神以及洪蘭(2009)之主張：孩子透過做中學，從實際的生活經驗中學習，較能夠內化學習內涵。

(二)運用多重表徵策略鞏固學生對方程式概念的理解

情境數學在概念發展的過程中，慣於使用多元表徵做爲學生學習的媒介，除了能提供對代數學習有困難的學生另一條通道的機會外，也適時的和緩了代數抽象的本來面貌，有助於提升學生的學習意願。如圖5問題之題2、題3中，教材就引入生活中處處可見的溫度計協助學生透過實際的操作，來檢驗原來推測是否合理；又如問題6、問題7中，教材則引入學生在五年級已開始發展的表格與座標平面等先備知識，引導學生能操

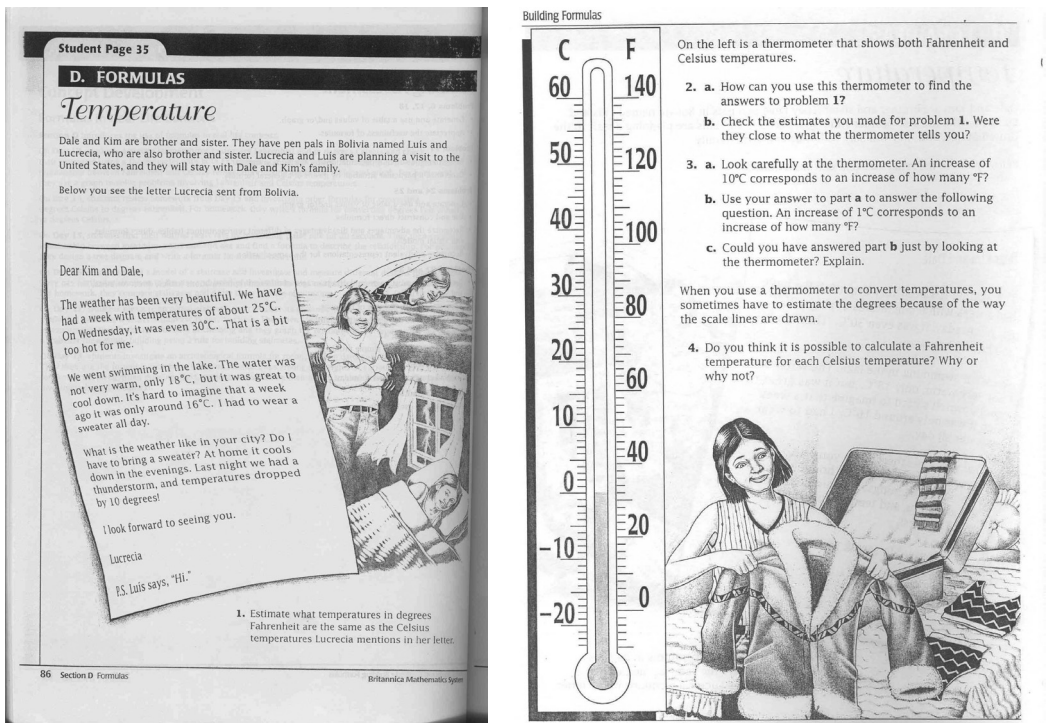


圖5：情境數學——線性方程式問題圖

資料來源：*Mathematics in context: Building formulas*, by Encyclopedia Britannica, 2003a, pp. 35-37.

作表格內容並呈現在座標平面上，進而對圖形進行推測。諸如此類設計，提供學生除了靠方程式等抽象符號來學習抽象代數外，更能以具體的圖像來鞏固對線性方程式等意義的概念化。從多元學習與發展的觀點論之，情境數學以多重表徵方式來進行方程式概念的學習，將爲不同先備知識背景的學生提供再一次理解概念的機會。

(三)引導學生透過猜測、假定、推論與說明等方式發展概念性的理解

情境數學的課程內容提供學生猜測、提出假定、進一步推論並能說明想法的機會，以教材中二元一次聯立不等式的活動爲例：

由圖6問題中發現，教材一開始就鼓勵學生對渡輪的服務建議是否可行進行猜測，如題1之(a)；並利用相關資料，如大、小船的載客限制條件，做爲提出新的假定依據，如題1之(b)；再根據渡輪公司所提的警告，做爲檢驗原來的計畫是否可行的參考標準，如問題2之(a)；並利用新的限制條件，繪製出新的參考線，以推論答案的合理性，如問題2之(b)；最後才回頭對渡輪公司所提出的建議計畫，做出最完整的總結。綜觀上述活動設計，可以發現在問題設計中，教材從一開始就提供學生進行猜測機會，然後鼓勵學生以自己的想法提出假定回應問題，然後綜觀各種不同的條件或限制以進行合理性的推論，最後才以說明的方式對原來想法進行驗證，藉以對概念做更完整的理解。

(四)強調透過合理性與連貫性的過程發展運算能力與推演技巧

情境數學的課程內容雖然重視學生運算能力的培養及推演技巧的熟練，但是更強調這些運算式子間連貫性與合理性的發展，進而能夠發展出高效能、有彈性的解題策略基礎。以解聯立方程式問題爲例說明。

在圖7的問題中，情境數學以常見的餐館消費爲情境，請學生根據各桌點餐單上的數量，以數的四則運算能力爲基礎，計算出不同消費所代表的不同價錢，如問題1、2、3、4等所示，顯見情境數學能以學生的「主題」的先備知識做爲學習「代數」的基礎，而問題5則開始引入方式的列式，問題6則是學習以既有方程式來表徵出其它的點餐組合，嘗試發展方能以抽象的代數式來表徵數量的關係；問題7、8及9則是以逐步地推演來達成解題目標。過程中，教材以方程式表徵出訂餐卡中的數學關係，逐步地由具體的餐點數量，連結到抽象數學方程式。此外，能列出二種以上不同方程式的安排，則在提升學生對問題的整體理解，並發展資訊的分析能力。至於以利用方程式完成結帳金額的計算，則是要讓學生理解到方程式的意義，並能活用方程式的概念到問題解的程序中。在這個活動中，情境數學在「運算和推演的技巧」等面向上，採取推論方法，利用已列出的數個方程式相加、相減或倍增方式，合併既有的數個方程式，以得出新方程式，並用以表徵另一個新的訂餐情境所含的數學意義。同樣地，也採用兩兩相減的方式，慢慢的引出單一未知數所代表的值，這樣的安排讓每一個式都有其實際的意義，每一次的式子運算都有其脈絡可尋，推演的過程合理而連貫。然而，因爲採取逐步推演的方式剖析解題程序，因此，在發展的歷程中，勢必耗去大量的時間。

情境數學重視模式的發現與學習，從非正式的觀念中發展出正式的數學推理和表徵方式，進而能成功地解決非例行性問題。情境數學每一個主題的學習都是藉由一系列的問題不斷地發展延續，直到八年級結束，能夠擁有解決非例行性問題的能力(Romberg &

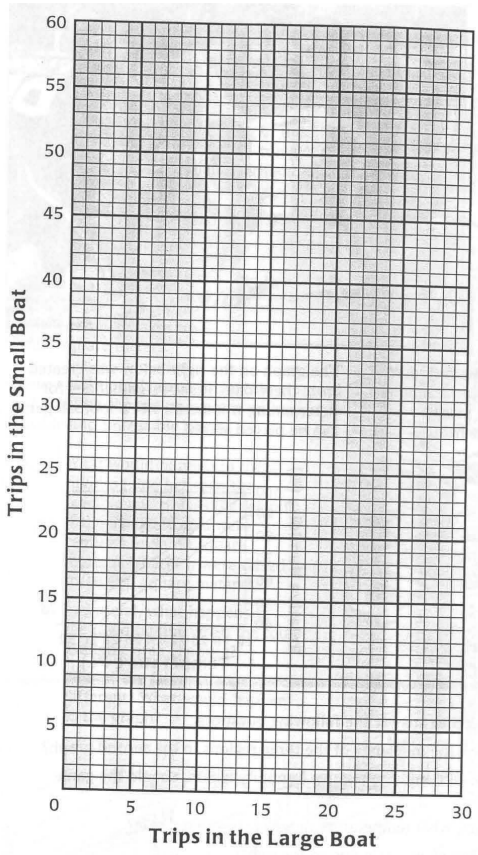
Martin Luther King, Jr. Middle School is sponsoring a camping trip to a small island on a lake. A local company offers several boat trips to the island.

You can take either a large boat (which holds 15 passengers) or a small boat (which holds 5 passengers). The small boat is faster. The trip there and back takes 8 minutes in the small boat, compared with 12 minutes for the large one. Unfortunately, only one person is available to navigate a boat on the day of the camping trip.

Two hundred and eighty people are taking part in the camping trip. The boat company suggests the (16, 8) plan. That means 16 trips in a large boat and 8 trips in a small boat.

3. a. Is this a feasible plan?

b. Consider other plans for getting the 280 people to the island. Find at least 10 plans and plot them on **Student Activity Sheet 4.** Draw a line through the points and put a flag on the line. Label the flag with the constraint.



4. a. The students arrive late, and the boat company says that there will be only five hours of daylight during which to ferry everyone across. The boat company won't take people over after dark. Is there a feasible plan in your diagram that will get everyone to the island by dark? If not, create more plans.

b. On the same diagram, plot points for combinations of boat trips that can be made in exactly five hours total time. Put a flag on the line like the one shown below.



c. What do you think of the boat company's original suggestion, (16, 8)?

圖6：情境數學——二元一次聯立不等式問題圖

資料來源：*Mathematics in context: Decision making*, by Encyclopedia Britannica, 2003b, p. 22.

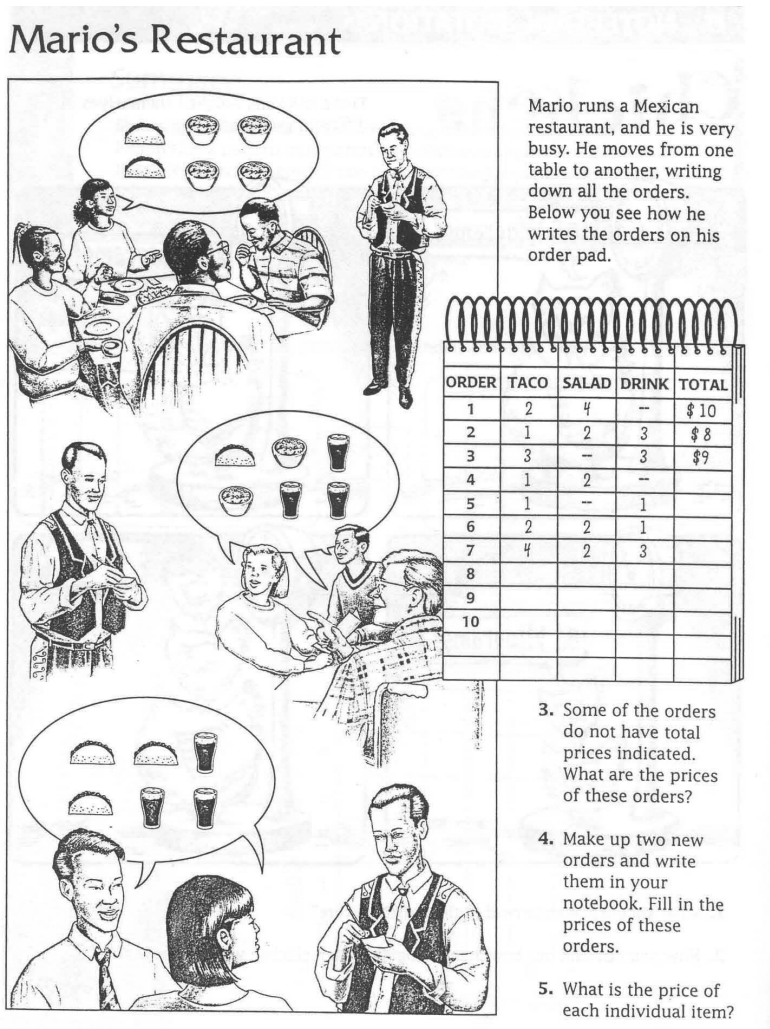


圖7：情境數學——解聯立方程式問題圖

資料來源：*Mathematics in context: Comparing quantities*, by Encyclopedia Britannica, 2003c, p. 22.

Shafer, 2003)。因此，利用佈題的方式，達成能力的培養應是情境數學所依循的主軸。從鉅觀的角度而言，情境數學發展課程的想法是以整個中學的學習階段來做整體的規劃，利用三年的時間來引導學生發展出整套解決問題所應具備的各種能力。另一方面，就微觀的角度來說，情境數學所佈出的每一個問題，也都在提供學生經驗不同程度的解決問題之歷練。在佈題的方式上，發現每一個問題都在引導學生進行一個小型的解題；從最淺的問題開始，直到具挑戰程度的問題都具有相同的特色——每一個問題都是在提供學生累積成功解題經驗的機會。基於解題能力的發展是在每一次的成功解題經驗中逐步建構累積而來，因此即使是最初始的一些非正式想法，也可能成爲未來能夠發展出正式解題想法的誘因。所以情境數學所欲發展的數學能力其實是由不斷地面對問題，不斷地解決問題，進而能蘊釀出穩固的解題經驗，以面對未來生活中的挑戰。在運算技巧

等程序的學習上，情境數學並不特重，因此課程設計中幾乎沒有進行算則精熟的內容，這種想法也反映在每一單元末了所提供的總結問題數，比其它兩國的數量少很多的結果上。比較特別的是解題的策略上，教材除了代數方程式的運算解題外，非常鼓勵學生使用如表格、圖形等多元的方式進行解題，也因爲解法上不強調「標準過程」，反而易誘發學生使用多元的解題策略進行多元解題的現象。

三、新課程數學

新課程數學以數學能力的發展爲學習焦點，在概念知識的理解上，採直接說明方式陳述，並以大量的練習鞏固對知識的理解；運算程序及推演技巧上，鼓勵多元的解題策略，特別注重以精熟練習達成數學能力的發展。分析如下：

(一)教材概念編排依知識結構引入，並透過記憶及練習的方式發展數學概念

新課程數學將所有關概念知識進行最小單位的切割，以「一元一次方程式」主題爲例，將主題知識分割成九個小主題區塊，分別依序進行發展，然後按照分類結果，獨立段落進行概念學習。而教材呈現概念的方式則完全依賴文字的直接解釋輔以範例講解，發展方式顯得單調，學習者在學習的過程中未參與概念的形成，只是被動接受教材所提供的知識，較不利於誘發理解的產生，如圖8。

8	Algebraic Equations	150
	Open Sentences	151
	Simple Equations	151
	Solving Simple Equations	152
	Equations Involving Fractional and Decimal Coefficients	155
	Formulae	156
	Construction of Formulae	158
	Writing Algebraic Expressions	159
	Problem Solving with Algebra	160
	Summary	164
	Review Questions 8	164
	Problem Solving	166

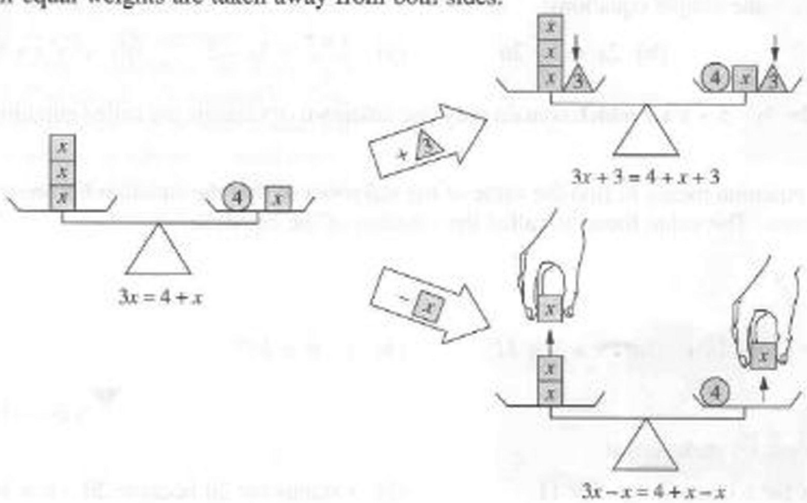
圖8：新課程數學——代數方程式概念切割圖
資料來源：*New syllabus mathematics 1*, by K. S. Teh, 2005, p. v.

雖然部分的概念學習區塊中加入了圖形解說，豐富了內容，但學生的角色仍無法從被動轉爲主動，以「等量公理解方程式」的內容爲例(如圖9)，教材雖然提供了圖解，但是教材仍採用傳統的方式，利用天平兩邊的重量可以保持平衡的原理引入等量概念，附圖的功能僅在於提供學生模仿教材的示意圖進行腦內的「想像操作」。因此，圖形的功能仍不離其輔助說明的角色。就本質上而言，教材對「等量公理」概念的引入仍是以直接解釋的方式呈現，只是多提供了解釋的圖形，幫助學習者掌握想像時的具體度，就實質的概念發展而言，對未能在文字說明中獲致對「等量公理」理解的學生，仍無法提供另外理解等量公理的機會。安排大量的練習來促進概念的理解，是「新課程數學」的另一項焦點，例如在介紹「方程式的解」概念中，教材僅提供了二個例題解說方程式解的概念，但是隨堂練習題的數量就高達20題。很顯然地，教材期望學生能透過大量的練習來加深並鞏固對方程式的解的意涵的理解。

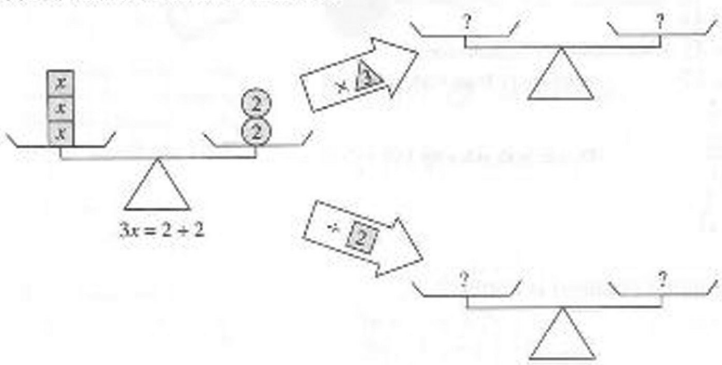
(二)強調「程序性技能熟練」，透過大量練習的方式，以獲致推演的技巧、流暢度及準確性

教材在技能強調的面向上，明顯趨向於程序性的練習，如圖10所示。

We can use the idea of a balance to help us solve equations. Consider the case where the contents of the two scale pans balance each other. They will remain balanced if equal weights are added to both sides or if equal weights are taken away from both sides.



What will happen to the scales below if the weights of the contents of both sides are trebled or halved?





Albert Einstein (1879–1955) published three famous papers in 1905. The first suggested the Quantum Theory for light, the second suggested the special Theory of Relativity and the third related the conversion of mass and energy in the famous equation $E = mc^2$ where m is the mass in kg, E is the energy in Joules and c is the speed of light in metres per second. This equation eventually led to man's use of atomic energy and the creation of atomic bombs.

The above discussion leads to the following rules:

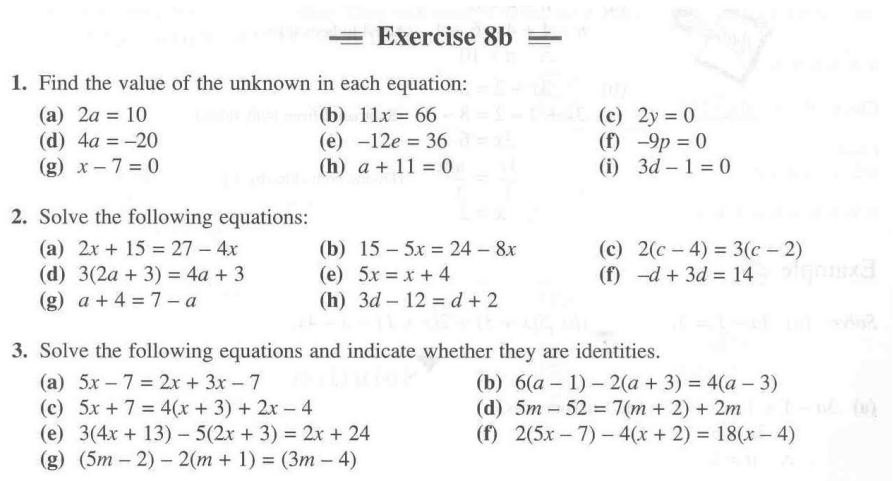
To balance an equation,

1. equal numbers may be added to each side;
2. equal numbers may be subtracted from each side;
3. each side may be multiplied by equal numbers;
4. each side may be divided by equal numbers except zero.

We shall use the above rules to solve simple equations.

圖9：等量公理的概念解說圖

資料來源：*New syllabus mathematics 1*, by K. S. Teh, 2005, p. 152.



Exercise 8b

1. Find the value of the unknown in each equation:

(a) $2a = 10$ **(b)** $11x = 66$ **(c)** $2y = 0$
(d) $4a = -20$ **(e)** $-12e = 36$ **(f)** $-9p = 0$
(g) $x - 7 = 0$ **(h)** $a + 11 = 0$ **(i)** $3d - 1 = 0$

2. Solve the following equations:

(a) $2x + 15 = 27 - 4x$ **(b)** $15 - 5x = 24 - 8x$ **(c)** $2(c - 4) = 3(c - 2)$
(d) $3(2a + 3) = 4a + 3$ **(e)** $5x = x + 4$ **(f)** $-d + 3d = 14$
(g) $a + 4 = 7 - a$ **(h)** $3d - 12 = d + 2$

3. Solve the following equations and indicate whether they are identities.

(a) $5x - 7 = 2x + 3x - 7$ **(b)** $6(a - 1) - 2(a + 3) = 4(a - 3)$
(c) $5x + 7 = 4(x + 3) + 2x - 4$ **(d)** $5m - 52 = 7(m + 2) + 2m$
(e) $3(4x + 13) - 5(2x + 3) = 2x + 24$ **(f)** $2(5x - 7) - 4(x + 2) = 18(x - 4)$
(g) $(5m - 2) - 2(m + 1) = (3m - 4)$

圖10：新課程數學的練習題

資料來源：*New syllabus mathematics 1*, by K. S. Teh, 2005, p. 154.

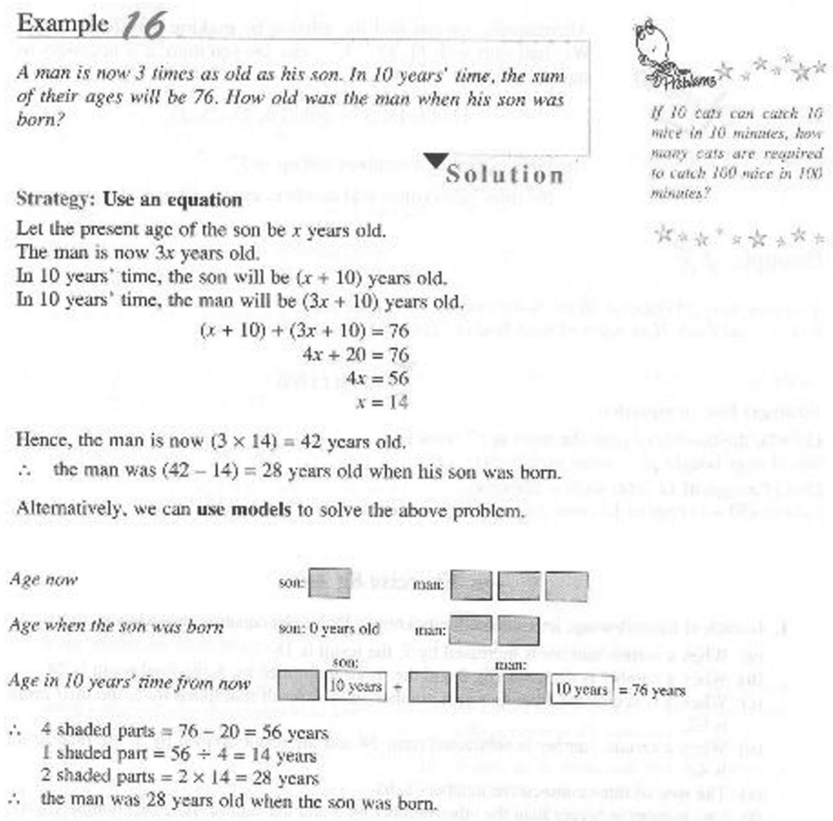
圖10顯示教材在使用「等量公理解方程式」的內容，教材示範了二個例題，但是卻一口氣引入了24題練習題，顯見練習是教材促進學習的主要策略。

(三)發展多元的解題策略是「新課程數學」強調「程序性技能熟練」的另一焦點

教材除了以代數方程式的方法進行解題外，也提供多元的解題策略，如圖11所示，即是使用圖形表徵方式進行解題；又如圖12所示，以數列方式進行解題。和其它版本相較，本教材最特別的是專門討論多元策略的種類和用法，教材在第三章樣式的內容中就特別地將各種常見的解題策略彙整成表，並鼓勵學生能嘗試地組織二到三種以上的策略進行問題解決，並從中能獲取對各種不同策略的評價。儘管「新課程數學」鼓勵學生能嘗試進行使用不同的策略進行解題，然而，在多元解題策略落實在真實的設計上，教材除了在第三章能佈出適宜進行多元策略解題的問題外，在其它的內容中，卻鮮見能呼應前述主張的佈題設計。特別在代數方程式的內容中，雖然也鼓勵學生學習多元的解題策略，但是對於什麼的樣的問題，適宜何種解題策略並未多加描述。大體而言，教材在提出範例問題後，大都直接地呈現出解題的「標準作法」，學習者並沒有機會去嘗試其它想法，以驗證哪一種策略才是最佳的選擇。

(四)教材透過「探索專區的設計」，呼應課程綱要的核心目標，並提供學生面對更具挑戰性的問題的機會，以發展解題能力

教材在主題內容完成發展後，特別設計了「探索」專區，以引導學生能對主題做深入探索，延伸主題內容的廣度，如圖13所示，教材藉由探索專區，延伸學生已學習「樣式」的概念和技能到費氏數列中，引導學生從費氏數列的數字陣列中，找到存在規律的數列，進而能在數字陣列中，利用所找到的各種數列，隨意地組合出新的數列，以加深學生對數列的特性能有更深的領悟，進而發展解題能力。



Example 16

A man is now 3 times as old as his son. In 10 years' time, the sum of their ages will be 76. How old was the man when his son was born?

Solution

If 10 cats can catch 10 mice in 10 minutes, how many cats are required to catch 100 mice in 100 minutes?

Strategy: Use an equation

Let the present age of the son be x years old.
The man is now $3x$ years old.
In 10 years' time, the son will be $(x + 10)$ years old.
In 10 years' time, the man will be $(3x + 10)$ years old.

$$(x + 10) + (3x + 10) = 76$$
$$4x + 20 = 76$$
$$4x = 56$$
$$x = 14$$

Hence, the man is now $(3 \times 14) = 42$ years old.
$\therefore$ the man was $(42 - 14) = 28$ years old when his son was born.

Alternatively, we can **use models** to solve the above problem.

Age now son: man:

Age when the son was born son: 0 years old man:

Age in 10 years' time from now son: 10 years + man: 10 years = 76 years

$\therefore$ 4 shaded parts = 76 − 20 = 56 years
1 shaded part = 56 ÷ 4 = 14 years
2 shaded parts = 2 × 14 = 28 years
$\therefore$ the man was 28 years old when the son was born.

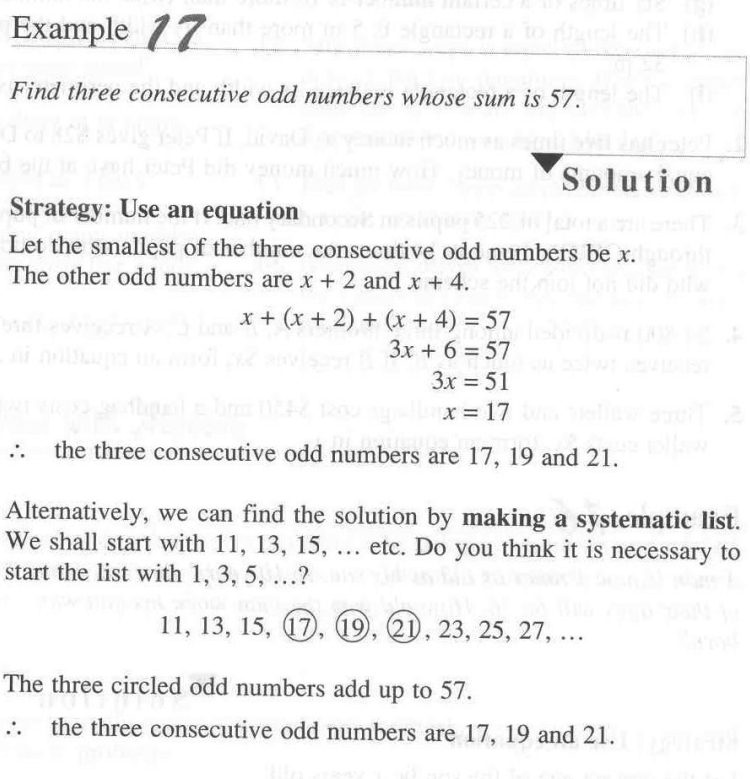
圖11：以圖形表徵方式解題

資料來源：*New syllabus mathematics 1*, by K. S. Teh, 2005, pp. 161-162.

四、小結

(一)概念性知識的理解

數學能力的培養首重學生概念的理解，以概念理解爲基礎進而才能發展解題和推理之能力(NCTM, 2000)。教材是否能提供學生機會以發展出概念性的理解，深受教材內容編排的邏輯所影響，而課程發展者對「學生如何進行學習」所持的哲學態度則左右了教材內容編排的邏輯 (Stein et al., 2007)。換言之，不同的教材反映出不同的數學教育哲學觀，也實踐在不同教材所側重的焦點。就如傳統課程認爲在代數的課程中，使用電算器將會對計算流暢度的發展產生影響，因此不建議使用(Clopton, McKeown, McKeown, & Clopton, 1998)，但NCTM課程標準卻鼓勵使用電算器輔助代數學習，因爲學生將有更多自由的時間和認知空間以進行更高階的思考和推理(Stein et al.)。因此教材是否能提供學生機會以發展出概念性的理解，對學生數學能力的發展關係至鉅。就概念理解的面向上，部編版數學和新課程數學一致地採行以傳統式的角度切入，以直接敘述並解釋概念之意義，在教材中透過非常清楚的文字陳述完整地灌輸數學概念給學生，傳遞概念的形式較抽象，學習者不容易將所欲學習的概念進行具象化，產生的學習易流於記憶與背誦。此外，由於課程採螺旋式，教材所呈現的主題內容每一次都以先前的學習內容做爲



Example 17

Find three consecutive odd numbers whose sum is 57.

Solution

Strategy: Use an equation

Let the smallest of the three consecutive odd numbers be x.
The other odd numbers are $x + 2$ and $x + 4$.

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 57$$
$$3x + 6 = 57$$
$$3x = 51$$
$$x = 17$$

$\therefore$ the three consecutive odd numbers are 17, 19 and 21.

Alternatively, we can find the solution by **making a systematic list**. We shall start with 11, 13, 15, … etc. Do you think it is necessary to start the list with 1, 3, 5, …?

11, 13, 15, (17), (19), (21), 23, 25, 27, …

The three circled odd numbers add up to 57.

$\therefore$ the three consecutive odd numbers are 17, 19 and 21.

圖12：以數列進行解題

資料來源：*New syllabus mathematics 1*, by K. S. Teh, 2005, p. 162.

延伸的基礎，因此，極易造成許多學生在國小時若未能成功獲致國小階段應學的數學概念，間接地可能造成現今許多國中階段的學生對數學課程的學習產生困難。反觀情境數學則是透過佈題的方式，將推理、猜測、解釋、驗證等活動安排在一系列的問題中，提供學生從最初想法，逐步修正到正式的概念，對不同程度的對象，都能獲致不同程度成功的機會。

(二)運算的熟練和推演的技巧

在「運算的熟練與推演的技巧」上，部編版數學和新課程數學亦一致地採行精熟學習的方式獲致解題的正確性與效能，教材透過大量的練習以提升計算的準確度，並能熟稔各種算則的特徵，並追求能以最簡潔的計算方式完成解題；但過多的練習，亦可能使學生的解法缺乏彈性，流於以範例爲榜樣的標準算法。相較於前者，情境數學聚焦在培養學生能彈性地使用各種解題策略，以提高解題效率，至於繁複的運算程序，則發展學生使用科技以取代人力的計算。此外情境數學亦發展如表格、圖形等工具，藉以培養學生形塑出使用不同解題策略的能力。

(三)解題

在解題的發展上，部編版數學以章爲單位，採取分進合擊的方式發展，就解題所需的不同能力在各節次中分別發展，最後才在解應用問題的小節中，統整各節所學習的知識與技能進行解題；「新課程數學」則在每一單元中都設計了「解題」專區，提供學生

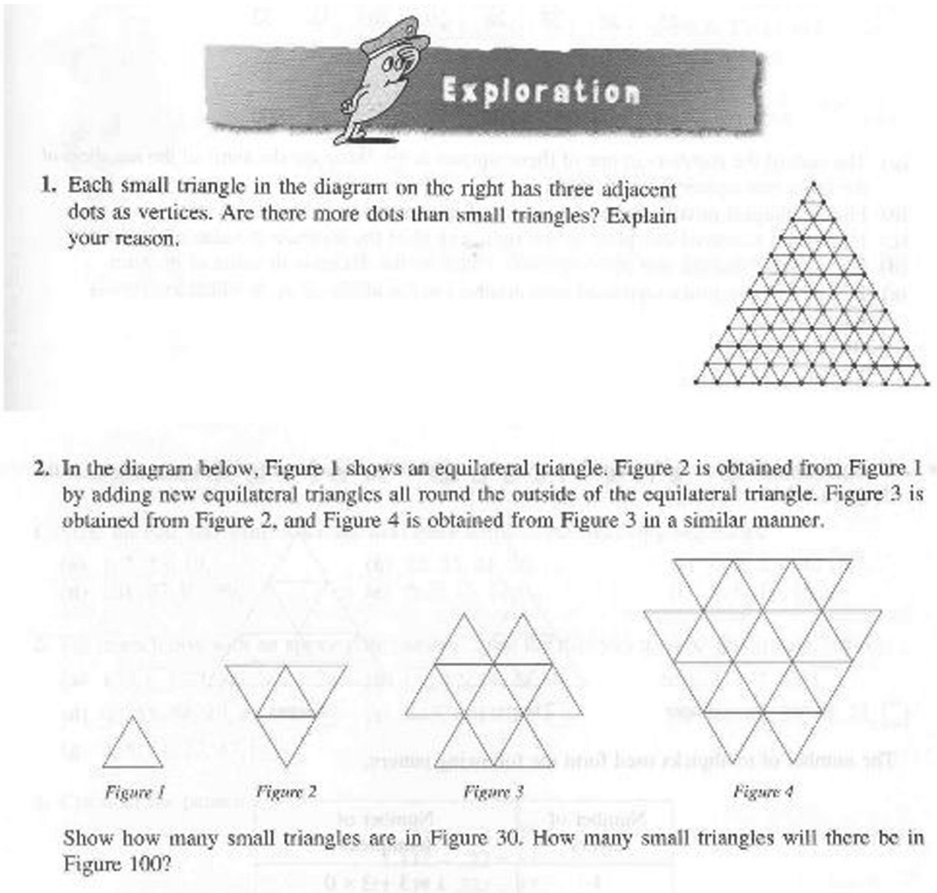


圖13：新課程數學元的探索課程

資料來源：*New syllabus mathematics 1*, by K. S. Teh, 2005, p. 61.

在每一單元內容學習完畢後，都能再應用所學以進行解題，反應了新加坡中學數學課程綱要的核心目標；情境數學更徹底的落實數學能力的培養，因爲教材的內容就是一系列的問題，學生即是藉由持續地回應教材的問題中，不斷地增長解決問題的各種能力，然而，也因爲教材中並不提供任何形式的標準解答，所以課程發展的內容相對地將會比台灣和新加坡的教材更自由而寬廣，若欲成功地發展出期望中的知識與能力，必須耗費更多的時間是可以預期的結果。

學習多元解題策略在於發展出更有效率、更簡單的作法，但是研究者認爲，更有效率、更簡單的作法乃是從結果來反省所做的判定。因此，就初學者而言，應時時給予多元解題的機會，讓學生能自由地藉由實際的解決問題的經驗中，累積出對各種問題解策略優劣的判別能力，進而在面對陌生的情境問題時，能正確地組織出有效率的解題策略，以戰養戰，在挑戰中不斷地滋長數學能力。

伍、結論與建議

一、結論

研究結果顯示，三套教科書在發展數

學能力的三個面向上美國情境數學較強調概念性知識的理解，新加坡新課程數學則較強調程序性技能的流暢，我國部編版數學則較平均。究竟「概念性知識的理解」、「程序性技能的流暢」與「解題」三者在教科書中究竟應佔何種比率？目前在數學教育中尚無定論，仍待相關研究做進一步之比較分析(Stein et al., 2007)。上述結果顯示不同國家在數學課程上之安排亦有其差異。「部編版數學」和「新課程數學」採取較傳統的方式鋪陳數學能力的發展，歷程中兩國教材以較抽象的方式傳遞概念，學習易流於記憶與背誦；此發現與Star等(2000)之研究結果指出早期美國之代數教科書較強調透過運算進行方程式解題和等價關係的探討之計算能力的發展相一致。此結果是否顯示亞洲國家之代數課程的發展思維仍舊侷限於傳統之窠臼中，仍待進一步之探究。此外，由於「部編版數學」和「新課程數學」之課程設計採螺旋式方式編寫，在主題銜接需詳加緊扣，可以避免先備知識發展不佳的學生失去進階數學能力的機會。情境數學以題組的方式貫通學習的歷程，以澄清情境的問題開始，然後探索解題，最後檢視整個過程的想法和脈絡，以尋找關係和關鍵方式，進而能模式化解題，提升數學能力(Romberg & Shafer, 2003; Yang, Reys, & Wu, 2010)。此外，教材藉由情境脈絡引導學生進行推理、猜測、說明、解釋、驗證等活動，透過問題的解決，引導學生從最初的想法逐步修正到正式的數學知能，對不同程度的對象，獲致不同程度成功的機會上，提供了較佳公平學習的機會(Romberg & Shafer)。在「運算的熟練與推演的技巧」上，部編版數學和新課程數學亦一致地強調練習角色的重要性，採行精熟學習獲致解題的正確性與效能；此結果與Yang等之研究發現相一致。情境數學聚焦在培養學生能彈性地使用各種解題策略，發展如表格、圖形等多元工具，並使用(繪圖)電算器等科技以提高解題效率，這些特點正反映情境數學教科書呼應NCTM (2000)之精神。在解題發展上，部編版數學以章爲單位，採取分進合擊的方式在各節次中分別學習，最後統整各節所學習的知識與技能以解決應用問題；「新課程數學」則在每一單元安排「解題」專區，提升學生應用單元課程知識進行迷你的解決問題，呼應新加坡中學數學課程綱要的核心目標；情境數學則從第一個問題到最後一個問題都在解決問題，更徹底的落實數學能力的培養。另一個值得注意的面向是，由於情境數學教材除了問題之外並不提供任何的標準解答，因此，學生想從連貫地解題中，持續地滋長出澄清、探索、分析等能力，在課程時數及課室學生人數等配套項目上，將耗費更多的時間與資源將是課程成功不可或缺的前提。

研究結果顯示在數學能力的發展上，三國教材的發展方式迥異，情境數學以題組的方式透過生活情境的佈題與探索的歷程中逐步發展數學概念，並運用多重表徵策略以及透過猜測、假定、推論與說明等方式以引導學生鞏固和強化概念性的理解，同時強調透過合理性與連貫性的過程發展運算能力與推演技巧。情境數學藉由澄清、探索、解題與模式化的歷程，經由檢視整個過程的想法和脈絡，尋找關係和關鍵方式，以模式化數學能力。部編版數學解題歷程與表徵形式較爲單一(游自達等，2007)，依著解釋知識、佈出典型問題、演示典型解法、解應用問題的方式鋪陳，以分段學習切割程序，最後統整出解應用問題的能力。部編版數學之內容呈現方式以概念發展、程序運算的熟練以及解應用問題等三個階段進行鋪陳，但概念知識鋪陳方式較單調，採直接陳述方式，鮮見

推理、思考等促進理解的內容設計，但是教材佈題的方式不易進行推理、猜測、說明與解釋等解題能力的建構，同時由於解題策略循Polya方式，對不同程度學習者，將無法形塑出不同程度的數學能力。新課程數學的教材概念編排依知識結構引入，並透過記憶及練習的方式發展數學概念，並強調「程序性技能熟練」，透過大量練習的方式與發展多元的解題策略，以獲致推演的技巧、流暢度及準確性，以及教材透過「探索專區的設計」，呼應課程綱要的核心目標，並提供學生面對更具挑戰性的問題的機會，以發展解題能力。新課程數學的內容呈現方式與部編版相近，它獨尊程序性知識的學習，更強調練習的重要性，以強化代數工具性的角色，因此，部編版數學和新課程數學皆著重於計算能力之發展，即強調程序性知識與技能的學習等能力的發展。

數學能力的發展是現今數學教育改革的核心(NCTM, 2000)，從各國教材發展的方式而言，「部編版數學」和「新課程數學」採取較傳統的方式發展，較容易進行解題的標準化，符應當前升學制度下應試數學的目標，這個方式容易在短期的學習上表現出傑出的成就，如近年來在TIMSS、PISA等國際學生能力評比中，台灣和新加坡的學生總能名列前茅，然而，缺點是學生由於被動地接受知識與重複地練習，也造成學生不容易形塑自我的想法，並實踐在非例行性問題的解決上。從長遠的「素質教育」的觀點而言，數學課程的設計應以有意義的學習爲前提(Hirsch & Reys, 2009; NCTM, 2000; Stein et al., 2007)，爲學習者做更多的考量，兼容各家優點，採行具研究基礎的設計，如此才能協助學生超越工具性理解或完成例行性問題的解決等數學學習目標，進而能數學化地思維，以徹底的將數學的學習從知識的層面提升成爲帶得走的能力。

二、建議

本研究僅以美國、新加坡與臺灣等三個之其中一種教材進行分析，故研究結論不宜過度推論至其他教材上，但研究結果仍可提供課程設計者一些參考方向。

(一)增加開放性問題，以發展思考、推理與歸納之能力

愛因斯坦認爲想像力比知識重要，然而研究顯示臺灣部編版數學的例題，大部分都在進行知識的學習，鮮少想像的空間。研究發現無論在概念的理解與程序的推論上，教材皆呈現出標準答案，這種安排對學生發展個別的理解或推理時，往往對想像力產生壓抑的負面影響，因爲學生在課堂中好不容易形成的想法，永遠比不上教材所提供的結果。在現今國際間強調數學解題重要性的同時，如何提供學生多元寬廣的學習機會，讓教師、學生有機會形塑出多元互動的學習方式是教材開發者必須迫切面對並展現出作爲的課題。因此，建議教材開發者在進行教材編修時，可以嘗試鋪陳一些題組的問題，藉由題組的特性，學生有機會進行情境的理解，資訊分析、擷取有用資料以建構解題的想法，並在連續的解題中，進行知識的堆疊，除了能有效地連結各種知識外，亦有助於對不同層次的數學知識發展出垂直的連結，因此，適當的選用題組，應能提供學生有更多想像、推理的學習機會。

(二)概念性知識與程序性知識的平衡

NCTM (2000)指出數學知識應概念性與程序性知識並重，因爲概念性與程序性知識彼此間相輔相成。而九年一貫課程的特色之一即是兼重概念理解與計算能力的提升，研

究結果顯示，「部編版數學」在促進概念理解的面向上仍有待改進。建議課程改革者在進行教材編輯或課程設計時，能更貼近學生的角度來進行考量此向度。

誌謝

本研究蒙國科會專題計畫補助，計畫編號NSC 97-2511-S-415-010-MY3，特誌申謝；文中所提論點純屬作者個人之意見，並不代表國科會立場。作者衷心感謝總編輯暨審查委員對本文所提供之寶貴意見，由於您們的協助，方能使本文能夠以更清楚、更結構化的方式呈現。

參考文獻

1. 王石番(1991)。**傳播內容分析法——理論與實證**。臺北市：幼獅。
2. 王建宇(2007年8月9日)。教育看全球：考試領導教學，國外專家反對。**國語日報**，二版。
3. 吳明穎(2002)。**國小數學教科書內容分析之研究**。未出版之碩士論文，國立屏東師範學院數理教育研究所，屏東市。
4. 吳麗玲(2006)。**台灣、美國與新加坡國小五、六年級分數教材內容之分析比較**。未出版之碩士論文，國立嘉義大學數學教育研究所，嘉義市。
5. 洪蘭(2009年5月26日)。生活即教育。**聯合報**，名人堂。
6. 徐偉民、徐于婷(2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析：台灣與香港之比較。**教育實踐與研究**，**22**(2)，67-94。
7. 國立教育研究院籌備處(2005a)。**部編版國民中學數學教師手冊第一冊**。臺北市：作者。
8. 國立教育研究院籌備處(2005b)。**部編版國民中學數學第一冊**。臺北市：作者。
9. 國立教育研究院籌備處(2005c)。**部編版國民中學數學第二冊**。臺北市：作者。
10. 教育部(2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：作者。
11. 許馨月、鍾靜(2004)。國小教師面臨討論式數學教學問題之個案研究。**國立臺北師範學院學報：數理教育科技類**，**17**(1)，57-82。
12. 陳仁輝、楊德清(2010)。台灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。**科學教育學刊**，**18**(1)，43-61。
13. 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛(2005)。**中小學數學科課程綱要評估與發展研究**。臺北市：教育部。
14. 游自達、林宜城、林原宏、洪賢松、陳兆君、蔡秋菊(2007)。**九年一貫課程之教科書總評鑑總結報告：設計理念、能力指標與統整性**。臺北市：中華民國課程與教學學會。
15. 楊中宜(2007)。**國中生進入代數領域理解符號意義對解題影響之探討——以臺北縣A國中為例**。未出版之碩士論文，銘傳大學教育研究所，臺北市。
16. 鄭毓信(1998)。**數學教育哲學**。臺北市：九章。
17. 謝和秀(2001)。**國一學生文字符號概念及代數文字題之解題研究**。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學數學系，高雄市。
18. 戴文賓、邱守榕(1999)。國一學生由算術領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。**科學教育**，**10**，148-175。
19. 韓國棟(2005年5月26日)。部編版自然科僅占市場7%。**中國時報**。查詢日期：2006年1月20日，檢自http://www.all4you.com.tw/web3/free/news/uknow/94/9405/940526.htm

20. Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H.-Z., & Zimmer, J. M. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 541-547.
21. California Department of Education. (2006). *Guiding principles and key components of an effective mathematics program*. Retrieved June 5, 2008, from http://www.cde.ca.gov/ci/ma/cf/documents/math-ch1.pdf
22. Chambliss, M. J., & Calfee, R. C. (1999). *Textbooks for learning*. London: Blackwell.
23. Clopton, P., McKeown, E. H., McKeown, M., & Clopton, J. (1998). *Mathematically correct algebra 1 reviews*. Retrieved January 20, 2006, from http://mathematically-correct.com/algebra.htm
24. Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144.
25. Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253-285). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
26. Edwards, T. G. (2000). Some "big ideas" of algebra in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *6*(1), 26-31.
27. Encyclopedia Britannica. (Ed.). (2003a). *Mathe-matics in context: Building formulas*. Chicago: Holt, Rinehart and Winston.
28. Encyclopedia Britannica. (Ed.). (2003b). *Mathe-matics in context: Decision making*. Chicago: Holt, Rinehart and Winston.
29. Encyclopedia Britannica. (Ed.). (2003c). *Mathematics in context: Comparing quantities*. Chicago: Holt, Rinehart and Winston.
30. Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. In A. C. Porter & A. Gamoran (Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement* (pp. 229-266). Washington, DC: National Academy Press.
31. Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.
32. Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Result from the TIMMS 1999 video study*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.
33. Hirsch, C. R., & Reys, B. J. (2009). Mathematics curriculum: A vehicle for school improvement. *ZDM Mathematics Education*, *41*(6), 749-761.
34. Lappan, G., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Friel, S. N., & Phillips, E. D. (1996). *Getting to know the connected mathematics project*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.
35. Meyer, M. R., & Ludwig, M. A. (1999). Teaching mathematics with MiC: An opportunity for change. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4*(4), 264-269.
36. Ministry of Education in Singapore. (2007). *Secondary mathematics syllabus*. Retrieved January 20, 2006, from http://www.moe.

gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-secondary.pdf

37. National Assessment Governing Board. (2002). *Mathematics framework for the 2003 national assessment of educational progress*. Retrieved March 8, 2011, from http://www.nagb.org/publications/frameworks/math_framework/toc.html
38. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
39. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
40. Newton, L. D., Newton, D. P., Blake, A., & Brown, K. (2002). Do primary school science books for children show a concern for explanatory understanding? *Research in Science and Technological Education*, *20*(2), 227-240.
41. Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561.
42. Philipp, R. A., & Schappelle, B. P. (1999). Algebra as generalized arithmetic: Starting with the known for a change. *Mathematics Teacher*, *92*, 310-316.
43. Romberg, T. A., & Shafer, M. C. (2003). Mathematics in Context (MiC) – Preliminary evidence about student outcomes. In S. L. Senk & D. R. Thompson (Eds.), *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* (pp. 225-250). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
44. Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.
45. Senk, S. L., & Thompson, D. R. (2003). *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students learn?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
46. Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15-39.
47. SGBox. (2006). *New syllabus mathematics for 7th grade/secondary 1 package* (6th ed.). Retrieved February 14, 2006, from http://www.sgbox.com/s1nsm.html
48. SGBox. (2009). *New syllabus math for 7th grade/secondary 1 package: Product benefits*. Retrieved March 9, 2011, from http://www.sgbox.com/s1nsm.html
49. Singapore Math. (2011). *The Singapore Math story*. Retrieved March 9, 2011, from http://www.singaporemath.com/Singapore_Math_Story_s/10.htm
50. Smith, J. P., & Phillips, E. A. (2000). Listening to middle school students' algebraic thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *6*(3), 56-61.
51. Stacey, K., & MacGregor, M. (1997a). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, *90*(2), 110-113.
52. Stacey, K., & MacGregor, M. (1997b). Building foundations for algebra. *Mathematics in the Middle School*, *2*(4), 252-260.
53. Star, J. R. (2005). Reconceptualizing proce-

dural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404-411.

54. Star, J. R., Herbel-Eisenmann, B. A., & Smith, J. P., III (2000). Algebraic concepts: What's really new in new curricula? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *5*(7), 446-451.
55. Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-370). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
56. Stephen, L. (1999). *The NAEP 1996 Technical Report*. (NCES 1999-452, pp. 25-54). Washington, DC: National Center for Education Statistics.
57. Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chávez, Ó., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 247-280.
58. Teh, K. S. (2005). *New syllabus mathematics Textbook 1*. Singapore: Shing Lee.
59. Törnroos, J. (2001). Mathematics textbooks and students' achievement in the 7th grade: What is the effect of using different textbooks. In J. Novotna (Ed.), *Proceedings of European research in mathematics education II* (pp. 516-525). Prague, CZ: Charles University, Faculty of Education.
60. Törnroos, J. (2004, July). *Mathematics textbooks, opportunity to learn and achievement*. Paper presented at the ICME-10 Discussion group 14. Copenhagen, Denmark.
61. Vennebush, G. P., Marquez, E., & Larsen, J. (2005). Embedding algebraic thinking throughout the mathematics curriculum. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*(2), 86-93.
62. Westbury, I. (1990). Textbooks textbook publishers, and the quality of schooling. In D. L. Elliott & A. Woodward (Eds.), *Textbooks and schooling in the United States* (pp. 1-22). Chicago: NSSE.

科學教育學刊
2011, 第十九卷第一期, 39-67

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(1), 39-67

A Study of the Methods for Developing 7th-Graders' Mathematical Ability in Selected Algebra Textbooks from Taiwan, U.S.A. and Singapore

Der-Ching Yang[1,*] and Ren-Huei Chen[2]

[1]Graduate Institute of Mathematic Education, National Chiayi University
[2]Lan-Tan Public Junior High School

Abstract

The purpose of this study was to compare the methods by which textbooks on algebra develop 7th-graders' mathematical ability between the Mathematics Official Textbook (MOT) in Taiwan, Mathematics in Context (MiC) in the U.S.A., and New Syllabus Mathematics (NSM) in Singapore. The above three different textbooks were selected for this study, which involved a qualitative method of content analysis. The results of the study show that the mathematical content knowledge of MOT is the deepest among the three different textbooks, through highlighting procedural knowledge via practice and following the model of Polya to develop students' mathematics ability. The MiC focuses strongly on conceptual understanding using multiple strategies, technologies and contexts. The NSM puts more emphasis on learning procedures through practice.

Key words: Alegebra, Developing Mathematical Ability, Mathematics Textbooks, Cross Cultural Comparison of Mathematics Textbooks

* Corresponding author: Der-Ching Yang