科學教育學刊
2011, 第十九卷第五期, 383-408

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(5), 383-408

融入式診斷教學法對國小五年級學生分數學習成效之探究

溫世展

新北市安和國民小學

(投稿日期：民國99年12月22日，修訂日期：民國100年9月5日，接受日期：民國100年10月19日)

摘要：本研究旨在探討「融入式診斷教學法」對於分數學習的成效。本研究採準實驗設計，對國小五年級學童進行分數概念融入式診斷教學，研究工具包括融入式診斷教學活動及評量試題，實驗組(33人)採用融入式診斷教學，控制組(34人)採用小組討論式教學。實驗組與控制組學生在五年級上學期的數學期中考試、數學期末考試、前測的結果顯示二組學生的數學及分數概念在教學實驗前的表現是相當的。本研究透過二組學童的後測、延後測，以及實驗組課堂學習的情況來檢驗融入式診斷教學的成效。研究發現，融入式診斷教學法除仍能製造學童的認知衝突，進而達到概念澄清與糾正的效果，有效改善學童的分數迷思概念之外，並能節省教師設計教學活動所需花費的時間。主要研究結果如下：(1)接受融入式診斷教學的實驗組學童，在後測、延後測的表現都顯著優於控制組學生。(2)教學觀察分析顯示實驗組學生在教學活動中的學習表現有顯著提升，且學生的思考、反省與發表能力更加精進。根據研究結果，本研究對融入式診斷教學課程設計、教學、師資培育提出一些建議。

關鍵詞：迷思概念、單位量、等值分數、診斷教學、認知衝突

壹、前言

九年一貫數學課程強調教師在教學中，應探討學生容易犯錯的原因，並進行診斷教學(教育部，2003)。診斷教學的良好教學成效已被數學教育界普遍的驗證。如Kerslake (1987)設計遊戲來診斷學生的等值分數概念，讓學生理解分數是數的概念，並透過電算器來學習相關的分數概念，成效良好。林福來(1990)在相似形的診斷教學實驗中，設計相似人形的活動，運用簡化數據、改變情境等方法，讓使用加法策略的學生因為「人形的脖子不見了」而產生認知衝突，進而達到教學效果。Bell (1993)透過三個教學實驗，證實診斷教學比導引式教學具有更好的教學成效。陳琪瑤(2005)透過教學實驗，讓國小四年級學童在經歷「關鍵概念面質教學策略」後，能夠澄清假分數與帶分數互換之迷思概念，以及習得單位量與單位分量概念，成效良好。

雖然診斷教學的教學成效一再被驗證，但是研究者仔細了解這些研究後發現，這些

研究的診斷教學活動都是由學有專精的數學教育研究者，針對學生常犯的迷思概念而自行特別設計的。全部自行設計診斷教學活動的優點是可以對症下藥，針對學生常犯的迷思概念設計活動並進行診斷。其缺點是全部的活動均自行設計並不容易，且設計所花費的時間亦多，因此這種診斷教學活動不易落實在實際的數學教室中。

研究者嘗試將診斷教學概念融入現有的數學教科書的活動中，透過增刪、延伸教科書的教學活動的方式來設計診斷教學活動，並探討其教學成效。這種設計方式的優點在於設計教學活動所需花費的時間較少，只需要考慮在原有的教學活動中，刪除類似的教學活動，或對類似的教學活動以較快速的方式進行，以便增加或延伸一些可以診斷學生迷思概念、引起學生認知衝突的教學活動。這種設計方式比全部自行設計診斷教學活動更容易被教師接受，也是教師較容易勝任診斷教學活動的設計方式。如果這種融入式診斷教學活動亦具有良好的教學成效，那麼，要推廣、落實診斷教學概念於數學教室中就比較容易實現，對建立學生正確的數學概念具有正面意義。

從數學課程的角度來看，分數概念在國小數學課程中是非常重要的概念，分數概念和除法、小數、比、百分率等概念關係密切，這些概念不僅是數學中的重要概念，而且在國小數學教材中佔相當重要份量，在九年一貫數學學習領域第二階段的19個能力指標中，有關分數的能力指標就佔六個(教育部，2003)，由此可見「分數」在國小數學課程的重要性。

雖然「分數」是國小數學的重要概念，但學生分數概念的學習卻困難重重(Amato, 2005; Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008; Mack, 2000)，僅根據程序性知識(procedural knowledge)解分數問題的學生成就表現遠低於同時具有概念性知識(conceptual knowledge)的學生成就表現(Pantziara & Philippou, 2011)，傳統的教師的分數教學活動也容易流於演算規則的講解而忽略學生對分數意義的了解(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Mamede & Cardoso, 2010)。此外，由於現行國小數學課程關於分數概念的學習，從五年級開始，其課程內容同時出現分數的多重意義與眾多子概念(等分、單位量、等值分數等等)，容易造成學生學習上的困難，研究者希望在現行國小五年級數學課程中的分數概念／運算部分，融入診斷教學理論，期使教師能夠在課堂上，對國小五年級學生可能產生的分數迷思概念／運算即時進行診斷，並提供適當的分數教學策略，協助學生改變分數迷思概念／運算。亦即本研究的目的在探討：國小五年級學童分數概念／運算在融入式診斷教學法下的學習成效。根據上述研究目的，本研究的待答問題如下：

一、實施融入式診斷教學法的學童在分數概念／運算後測的表現上是否優於控制組的學童？
二、實施融入式診斷教學法的學童和控制組的學童在分數運算延後測的表現是否有差異？
三、實施融入式診斷教學法的學童在分數概念延後測的表現上是否優於控制組的學童？
四、實驗組教師實踐融入式診斷教學法的具體表現為何？

貳、文獻探討

由於本研究欲探討融入式診斷教學法對國小五年級學生的分數學習成效，因此除需瞭解診斷教學法的概念之外，尚須了解國

小五年級學生的分數教材為何，以及學生在這些分數教材上有哪些常犯的迷思概念，如此才能有效的增加或延伸一些可以診斷學生迷思概念與引起學生認知衝突的教學活動，故研究者針對診斷教學法、現行國小分數教材、國小學生分數學習常犯迷思概念進行文獻探討。

一、診斷教學原則及其教學法

Bell (1992)認為診斷教學的理論是承襲Piaget的認知發展理論。Piaget認為人腦具有自我協調的本能，自我協調的二個作用就是同化(assimilation)與調適(accommodation)，當接受外界資訊時，人腦會先根據已有的知識去解釋所看到的現象，並整合到原來的認知結構中，這就是同化的過程；當用原來的知識體系去解釋而產生矛盾時，就會嘗試用不同的知識體系或修改原有的知識體系去重新解釋，這就是調適的過程。產生自我協調的首要關鍵是學習者是否產生認知衝突的心理狀態，也就是學習者是否意識到原有知識體系的矛盾，而產生修正舊想法的意願或接受新概念的強烈動機(黃湘武，1993)。診斷教學即是在Piaget的認知發展理論基礎下，從學童已有的知識基礎出發，讓學童在學習的過程中，發掘迷思概念，引起認知上的不平衡，進而獲得適當的調適，成為新的概念結構。根據診斷教學的意義，如何設計診斷教學的活動呢？診斷教學有哪些原則？茲列出幾位學者的看法。

Bell (1992)提出診斷教學的原則如下：

1. 初始學習作業的呈現，須讓學童從以往學習經驗中有跡可循；
2. 選擇的作業要涵蓋關鍵概念和可能的迷思概念；
3. 設計適當的活動使有錯誤的學童引起認知衝突；
4. 提供正確的回饋；
5. 針對欲化解的衝突加強討論，並形成一個新的整合的知識結構；
6. 在所討論的課程內明確的形成關鍵原則；
7. 利用進一步的問題做回饋，以鞏固洞察的獲得；
8. 利用彈性的問題，以確保對不同初始概念了解層次的學生都有適當的挑戰層次；
9. 在未來的場合中，適時重返相同的概念點(包括利用不同的脈絡或情境)，直到產生持久和可轉移的了解。

林福來與黃敏晃(1993)呼應Bell (1992)的觀點，亦提出了幾點診斷教學原則：

1. 教學設計之前，不僅要分析欲教的解題方法，且要詳細描述學童自己發展的解題策略；
2. 教學設計要能凸顯學童自己發展的解題策略的侷限性，使欲教解法有明顯的學習動機；
3. 教學活動的次序安排，以及從多種解題策略中選取欲教的某種策略，原則上都要盡量減少學童的工作記憶量；
4. 學習過程中，學童要有資源可以自我檢查答案是否正確；對於學童共同常犯的錯誤，教學設計務須使學童有機會主動察覺自己錯了，立即產生認知衝突。

此外，林福來(1999)將診斷教學實作分為三個步驟：學生迷思概念的診斷，針對學生的迷思概念進行認知衝突，以及調整學生認知的教學，提供了診斷教學一個具體實施的參考方式。

綜合以上文獻可以發現，學生是學習的主體，進行診斷教學時，教師必須去關心與瞭解學生以往的學習經驗？為什麼會這樣想？為什麼會犯錯？錯誤會發生在哪裡？然後透過教學活動的設計，讓學生發現自己的錯誤，並產生學習的動機，再設計一些活動

讓他去學習，而獲得正確的概念，這就是診斷教學的意義與精神所在。

根據相關文獻，研究者發現根據診斷教學原則設計的診斷教學法主要有五：

(一)異例(discrepant event or anomaly)教學法

Tirosh與Stavy (1999)透過「異例」誘發學童在面臨數學問題時產生概念上的衝突(conceptual conflict)，以糾正學童的迷思概念。在教學上，希望經由此種認知衝突的歷程，學童可以察覺其既有知識和正統知識間的差異，藉此幫助學童重建其認知結構。其教學程序有製造暴露事件、引入異例、調適期等三階段。劉曼麗(2005)的小數診斷教學研究發現，透過舉出異例等方式製造認知衝突，可讓學生在質疑、辯證彼此的想法中檢驗或修正自己的解法，且能有效地改變學生的小數迷思概念，在小數的學習上也有立即提升及保留的效果。林筱娟(2011)的研究結果亦顯示，透過明顯錯誤的異例製造學生的認知衝突，再進行認知調整，能有效提升國小二年級學生的分數學習成效。

(二)新奇問題(novel problems)的問題教學法

Niaz (1998)指出，若要讓學生產生概念改變，教師必須提出「新奇問題」讓學生來回答，因為處理該問題的過程必須涉及推理及討論，具有反省的效果，且較能引發學生的迷思概念，產生認知衝突，進而引起學生認知發展及重建認知基模系統的動機。

(三)BDEI概念改變教學法

Hewson與Hewson (1983)認為要改變學童的迷思概念，必須先找出學童具有的迷思概念，再利用概念改變策略進行教學。其教學方式是從學童的迷思概念出發，並依序使用概念溝橋(B)、區別(D)、替換(E)、整合(I)等四個教學策略來進行教學。

(四)「IEMDT」(Integrated EduClick & Mathps Diagnostic Teaching)教學法

賴麗桂(2007)將資訊科技融入診斷教學，整合高互動即時回饋系統(educlick)和數學簡報系統(math presentation system)進行診斷教學。其教學是先以高互動即時回饋系統或數學簡報系統設計的診斷試題，掌握學生迷思概念、製造認知衝突，再以數學簡報系統布題、進行認知調整以建立完整數學概念，最後以高互動即時回饋系統的診斷評量確認學生概念是否建立。

(五)合作學習法

合作學習是一種教學環境，可藉由個人和團體誘因來促進學生學習，以增進小組成員間的互助行為(Slavin, 1984)。而Piaget, Inhelder與Szeminska (1960/Lunzer, trans. 1970)認為兩個認知實體之間的衝突可以導致認知的調整。陳玉玲(2000)綜合各學者的理論提出以下合作學習可以造成概念改變的因素：刺激學習者反省與解釋、自由表達的氣氛、團體動力學的影響、免除困窘、知識是共同建構的、認知學徒制的歷程。

前二種診斷教學法較偏重教材的設計，即「異例」、「新奇問題」的提出，後三種診斷教學法較偏重教學策略或教學方法。由於本研究想透過將診斷教學概念融入現有的數學教科書的活動中來探討其教學成效，因此本研究所欲進行的融入式診斷教學法不採設計「異例」、「新奇問題」的方式來進行，而較偏重將診斷教學概念融入適當的教學方法(如：小組討論)中，讓學生經由原有迷思概念與正式概念在認知結構之交互作用

下產生認知衝突，引起學童在認知結構上的不平衡，進而使原有迷思概念澄清、改變。

二、分數教材分析

本研究的研究目的為嘗試將診斷教學概念融入現有的數學教科書的活動中，透過增刪、延伸教科書的教學活動的方式來設計診斷教學活動，因此教材分析主要是以配合本研究的研究對象所上課的數學版本(張英傑，2004)來進行分析。但為避免僅以一套版本教科書之內容進行學生所學分數概念分析可能會有所偏失，故研究者另以目前市佔率最高的康軒版本(楊瑞智，2004)進行比較分析，以增加本次教學實驗所得策略之適用性。

實驗學校所採用數學教科書版本的分數教材在五年級有二個單元，分別為下學期的第一單元「分數」及第三單元「分數的乘法」。

第一單元的教學目標是等值分數與分數加、減的學習，本單元教學內容包含三部分。第一部份的教學目標是「在**等分好、整體1**(一個整體1已被明確等分)能明顯出現之具體情境(包括連續量及離散量)中，能理解$\frac{N}{N}=1$的意義。」。主要活動有三個，前二個活動為連續量情境，單位分數內容物為單一個物，如：「$\frac{2}{2}$個蔥油餅和1個蔥油餅一樣大嗎？你是怎麼知道的？」，後一個活動為離散量情境，單位分數內容物為多個，如：「1包氣球有12個，$\frac{6}{6}$包氣球和1包氣球一樣多嗎？要怎麼記？」。

第二部分的教學目標是「在**等分好、整體1**能明顯出現之具體情境中，進行真分數與其等值分數的比較活動，並理解等值分數的意義。」。主要活動有六個，前三個活動為等值單位分數活動，如：「有2個一樣大的披薩，1個平分成2塊，小芳吃了$\frac{1}{2}$個；另一個平分成4塊，小文吃了$\frac{2}{4}$個，誰吃得多？」，後三個活動為分子不為1的真分數的等值分數活動，如「32顆櫻桃裝成一盤，$\frac{3}{4}$盤櫻桃和$\frac{12}{16}$盤櫻桃有一樣多嗎？要怎麼記呢？」。

第三部分的教學目標是「在具體情境中，能解決同分母的真分數、假分數或帶分數的分解、合成、比較的問題。並用有分數的算式，摘要記錄解題過程與結果。」。前二個活動是透過情境，將問題的結果記在數線上，再透過數線的位置來比較分數的大小，如：「1盒方塊酥有24塊，平分給2人，每人可得幾塊？是幾盒方塊酥？平分給3人，每人可得幾塊？是幾盒方塊酥？。小文把結果排成(如圖1)。請同學比比看，並在兩數中間用 $>$、$<$ 或 $=$ 表示大小關係。$\frac{1}{2}$盒和$\frac{1}{3}$盒，哪一個比較多？$\frac{1}{2}\square\frac{1}{3}$」。

接著，有情境和沒有情境的同分母加法問題各四題，有情境的問題如：「1盒冰棒有12枝，姊姊有$\frac{8}{12}$盒，妹妹有$\frac{7}{12}$盒，她們共有多少盒？」。有情境和沒有情境的同分母減法問題各4, 8題，有情境的問題如：

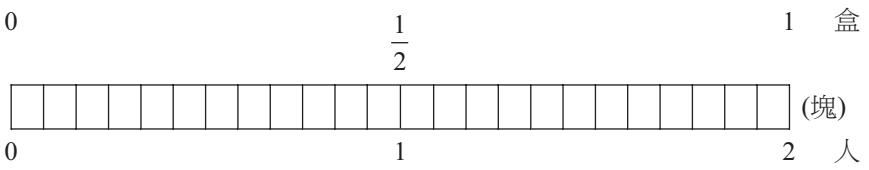


圖1：小文的排法

「1盒餅乾有10塊，小芬拿了$\frac{13}{10}$盒，阿文拿了$\frac{5}{10}$盒，誰拿得多？多幾盒？」。

第三單元的教學目標是分數乘法的學習，本單元的學習內容為在具體情境中，能解決真分數、假分數、帶分數的簡單整數倍問題，其中有情境的問題分別有8, 4, 6題。如：「1串丸子有7顆，阿文、阿得和小蘭各拿$\frac{2}{7}$串，他們3人共拿了多少串丸子？」，沒有情境的問題分別有6, 6, 8題。

教學實驗實施當時的康軒版本分數教材在五下只有一個單元：「等值分數」，其教學目標包含三部分。第一部份的教學目標是「在整體1能明顯出現之具體情境中，認識等值分數。」，其教學活動如「9顆糖果裝一盒，$\frac{9}{9}$盒糖果和1盒糖果，哪個多？」，與教學實驗所用版本第一單元之第一部份教學目標所進行的教學活動相類似。

第二部分與第三部份的教學目標分別為「瞭解擴分之意義、方法及其應用」與「瞭解約分的意義、方法及其應用」。這兩個教學目標的題目呈現方式與教學實驗版本稍微不同，例如「一箱果汁有24瓶，$\frac{5}{6}$箱果汁和十二分之幾箱果汁一樣多？」，但解題所需的概念和方法與教學實驗版本第一單元之第二部分教學目標所要教的數學概念相同，均為「等值單位分數活動」、「分子不為1的真分數的等值分數活動」。

根據研究目的，研究者將根據上述教材分析結果，增加或延伸一些可以診斷學生錯誤概念、引起學生認知衝突的教學活動。

三、國小學生分數學習常犯迷思概念

研究者根據上述分數教材分析的範圍進行文獻蒐集，並將文獻分為單位量概念、等值分數(含分數的比較)、同分母分數的加減、分數的整數倍加以分析。研究者將分數的比較併入等值分數是因為分數的比較大小是一種題目的形式，解分數的比較大小這類題目所需要的最主要的概念是等值分數，亦即，當學生會將不同分母的分數透過等值分數概念轉換成同分母的分數後，接著運用整數比較大小的概念即可解題。此外，研究者於閱讀文獻的過程中發現，有相當高比例的五年級學生於分數比較的學習上存有單位量迷思概念，故研究者認為單位量概念的理解亦應納入本次融入式診斷教學的教學目標之一，因此本文獻探討亦包括「單位量概念」。相關文獻整理如下。

(一)單位量概念

單位量概念對於分數學習是非常重要的，但是一般學生的單位量概念並不穩固，往往無法察覺問題中單位量的差異，無法正確的指認出單位量(楊德清、洪素敏，2003；Cramer, Post, & delMas, 2002)。

Iwasaki與Hashimoto (2000)以「給一條120公分的彩帶，拿$\frac{1}{4}$公尺給我」問題讓38位三年級學生解題，結果有14位(37%)學童看到「$\frac{1}{4}$」的符號，就將彩帶直接平分成4段，並沒有考慮到題目所要求的是「$\frac{1}{4}$公尺」，而不是「$\frac{1}{4}$」或「$\frac{1}{4}$段」，從這裏可以看出學童缺乏單位量概念。

詹婉華(2003)發現五年級學生的單位量概念仍然很薄弱，在解「一盒巧克力有2條。小明拿了$\frac{1}{2}$盒，小華拿了$\frac{1}{2}$條。請問小明和小華得到的一樣多嗎？」的單位量問題時，僅45%的學生答對，高達50%的學生未注意到單位量，只注意到「$\frac{1}{2}$」這個數字，而認為小明和小華得到一樣多。

Amato (2005)發現許多學生的單位量概念學習有困難，例如會認為「」的

答案是$\frac{7}{10}$而不是$\frac{7}{5}$。其研究結果發現，透過部分—整體圖形(part-whole diagrams)能夠協助學生發展單位分數的概念。

(二)等值分數(含分數的比較)

等值分數概念會影響學生後續在分數的加減乘除運算與分數比較的學習表現(洪素敏、楊德清、蔡鳳秋，2007；Suh & Moyer-Packenham, 2008)。

Hannula (2003)發現僅46%的五年級學生能正確解下列問題：

在右圖塗上顏色，讓塗色的部分占全部的$\frac{3}{4}$。

詹婉華(2003)則發現五年級學生解「1盒蘋果有4個，小波得到$\frac{1}{2}$盒，小明得到$\frac{1}{4}$盒，請問誰得到比較多的蘋果？」的單位分數比較問題時，有70%答對；有16%的學生受分子影響，認為二者的分子相同，所以分到的蘋果數也一樣；另外，有14%的學生受分母及整數學習的影響，認為分母4 > 2，所以小明多。

洪素敏等(2007)發現國小五年級學生在等值分數上的迷思概念為「不瞭解等值分數的意義」、「分數的求法和分數的乘法混淆」，讓學生實際經驗等值分數在操作物或其他表徵與符號表徵間的轉換，亦即由具體、半具體到抽象符號表徵的教學過程，對學生在等值分數概念與運算規則背後的意義能產生有意義的理解。

(三)同分母分數的加減

Lukhele, Murray與Olivier (1999)調查95位五、六年級學生發現，$\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$的答對率為13%，學生常犯的錯誤類型是分母加分母、分子加分子($\frac{7}{8}+\frac{7}{8}=\frac{14}{16}$)。Herman等(2004)發現對於「$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=?$」、「$\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=?$」等問題，六年級學童能夠計算出答案，但是無法解釋與表徵算式的意義。

李源順、余新富與李勇諭(2006)發現四年級學生解同分母分數加法的應用問題的能力(答對率85%)比解表徵問題的能力(答對率49%)好。

Cramer等(2008)利用「the fraction circle model」幫助四、五年級的學生透過操作具體物或圖像表徵的方式瞭解分數加減法的概念，最後能以心智表徵(mental representations)的方式進行分數加減法的運算。

(四)分數的整數倍

有些學童在面對分數的整數倍時，會選擇以分子與分母同時擴分的方法來運算，例如「$\frac{7}{5}\times 6$」，有一些學童會表示答案為「$\frac{7}{5}\times\frac{6}{6}$」，顯示學童對於「分數的整數倍」以及「分數的擴分」容易產生混淆(胡蕙芬、李源順，2005；Taber, 2007)。

Mack (2000)以兩年的時間對4個四至六年級的學童進行分數乘法概念的研究，顯示學童於教學實驗之後，可以透過圖像表徵說明分數乘法算則。胡蕙芬與李源順(2005)發現五年級學生解分數的整數倍的應用問題的能力(答對率68%)比解表徵問題的能力(答對率25%)好。

根據上述分析，研究者發現國小五年級學生除了單位量概念的缺乏之外，其在分數概念學習上，容易受到分子的影響，以及運用文字或圖形表徵解決或說明分數問題的能力較差，是較為嚴重的問題。文獻也顯示透過讓學生操作具體物或圖像表徵來學習分數概念與運算是有效的。

參、研究方法與過程

本節共分三部份，分別說明研究方法、研究工具與研究過程。

一、研究方法

本研究採準實驗設計(林清山，1989)探討融入式診斷教學於國小五年級分數概念的教學成效。本研究選定同一國小兩班五年級學生為研究對象，個案班級所在學校於學生四年級升上五年級時會依據學生四年級的國語、數學兩科學期成績加總高低排序，按S型分配於各班，使得各班學生程度相當。此外，控制班教師畢業於國立台灣師範大學，實驗班教師畢業於國立臺北教育大學；教學實驗當時，控制班教師已於國小任教19年，實驗班教師則於國小任教12年，均為具有豐富數學教學經驗的國小女教師。在經過一個學期(五年級上學期)的教學後，研究者透過前測、五上的期中考、期末考數學成績，發現實驗班與控制班的程度相當(詳見研究過程的「研究對象」)，顯示剛分班時程度相當的二班在經過這二位教師一學期的教學後，其數學程度仍相當，顯示實驗班與控制班教師的教學能力相當。

在教學方法方面，控制組施以小組討論教學法，亦即教師及同儕經由學生發表的內容，幫助其澄清數學概念；學生們則透過質疑辯證的互動過程，學習多元解題策略，提升自我的數學解題能力(房昔梅、鍾靜，2005)。實驗組則施以合作學習法，採小組討論的教學方式，但在教學過程中會融入診斷教學策略，於學生出現錯誤概念／算則時，教師會善用認知衝突的情境，使學生察覺自己的錯誤，進而調整其原有認知。兩組的五年級下學期第一單元「分數」的上課時數都是8堂課，第三單元「分數的乘法」的上課時數都是4堂課。診斷教學前，以兩組學生的五上期中考、期末考數學成績及前測來檢驗兩組學生的數學、分數概念程度是否相當。診斷教學後，以後測、延後測來了解實驗組的教學成效是否優於控制組。同時，本研究透過教室觀察來了解實驗組教師實踐融入式診斷教學課程的具體表現。

二、研究工具

本研究的研究工具包括融入式診斷教學活動，及評量試題。

(一)融入式診斷教學活動

本研究以教學實驗的方式進行，因此首先要確定教學目標。控制組的教學目標即上一章文獻探討的教材分析中的教學目標，實驗組除了上述目標外，再根據學生常犯的分數迷思概念形成下列教學目標：分數的比較、分解、合成時，能注意單位量、單位轉換的問題，並理解算則的意義。其次將診斷教學原理納入實驗組的教學活動的實施流程中(如圖2)。

上述融入式診斷教學活動的實施注意事項包括：

1. 在教師教學方面

(1) 當學生學習新概念時，第一次最好只佈一個題目，讓學生的解題發表能夠聚焦。

(2) 對於課本內類似的教學活動可以一次佈二、三題，同時進行教學，以節省教學時間。

(3) 課本內的類題不一定都要在課堂上進行教學。

(4) 教師可佈「課本類似題型，但卻是學生常犯分數迷思概念」的題目。由於課本的題目都是相同單位量下的分數大小比較活動，例如「一盒方塊酥有

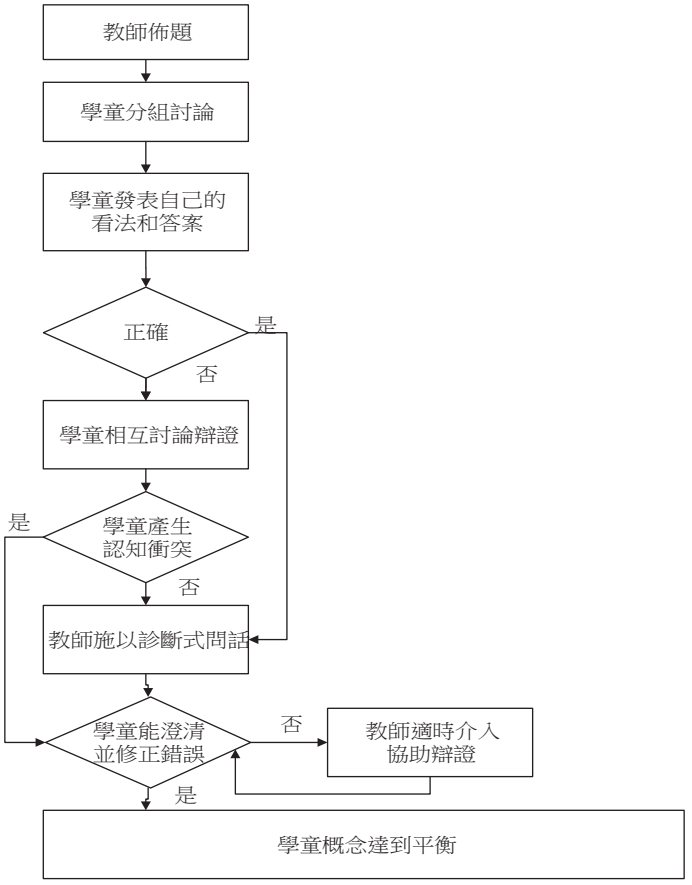


圖2：融入式診斷教學法實施流程

24塊，$\frac{1}{2}$盒和$\frac{1}{3}$盒，哪一個比較多？$\frac{1}{2}\square\frac{1}{3}$」，因此許多學生只注意分數符號的大小而忽略單位量的影響。本融入式診斷教學即把握這種機會，讓教師佈可以診斷學生迷思概念又可融入課本題型的題目，如：「一盒巧克力有6個，$\frac{1}{2}$個巧克力和$\frac{1}{3}$盒巧克力，哪一個比較多？」。

(5) 教師可在教學中充分應用多重表徵融入分數教學，並提供學生利用多重表徵表達想法的機會。

2. 在學童發表解題策略方面

(1) 當學生學習新概念時，讓每一組學生均能上台發表解法，充分溝通、澄清新概念。

(2) 對於類似的教學活動，可讓各組呈現其解題策略，但不一定要各組學生都上台說明其解題策略，以節省時間。

3. 在教師施以診斷式問話方面

(1) 即使學生發表的解題策略是正確的，教師仍然可以提供文獻上學生常犯的迷思概念來診斷學生的概念是否清楚。例如：學生以$\frac{2}{7}\times 3=\frac{2\times 3}{7}=\frac{6}{7}$來解「1串丸子有7顆，阿文、阿得和小蘭各拿$\frac{2}{7}$串，他們三人共拿了多少串丸子？」這個問題，雖然解法正確，但由於文獻顯示學生常犯

$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7 \times 3}$的錯誤，故教師仍然可以用「為什麼整數要乘以分子，卻不乘以分母呢？」的問話，來診斷學生對「真分數乘以整數算則」的理解情形。這種診斷式問話是診斷教學法有別於現行提倡的小組討論的教學方式之不同處。因為現行提倡的教學法在學生出現錯誤解題策略時，會提供學生相互討論辯證的機會，具診斷教學的功能，但是在學生正確解題時，通常不會進一步的提供錯誤解法來診斷學生的概念是否清楚、正確。

(2) 當學生出現迷思概念，卻在學生相互討論辯證中無法產生認知衝突時，教師可針對該迷思概念提出反例來讓學生澄清概念。例如：學生在學$\frac{N}{N} = 1$的等值分數時，學生都認為「當分子和分母一樣大就等於1」，此時，教師可反問「$\frac{0}{0}$等不等於1？」，讓學生對分數的分母的範圍有更清楚的認識。

(3) 若教師施以某診斷式問話卻無法讓學生澄清迷思概念，那麼，教師應提供其他的診斷式問話繼續協助學生澄清概念。

(二)評量試題

研究者針對本次教學實驗所使用的各項評量試題之說明如下。

1. 前測試題

本研究以教學實驗的方式來了解融入式診斷教學法的教學效果，因此，在教學實驗前，需了解實驗組和控制組的學生的分數概念是否相當。本研究以呂玉琴與鄧寶生(2002)的中年級分數概念試題為前測試題。該試卷包含等分概念、簡單分數概念、單位量概念及等值分數概念，具內容效度，其Cronbach's α信度值為 .839，具良好的信度。

2. 後測試題

本研究以前述分數教材分析為依據，採用二份後測試題，一份是分數概念，另一份是分數運算。分數概念試題是採用呂玉琴與鄧寶生(2002)的高年級分數概念試題，因為該試卷含括了等分概念、簡單分數概念、單位量概念及等值分數概念，符合本次教學實驗的教學目標，且該試卷具內容效度，其Cronbach's α信度值為 .845，具良好的信度。分數運算試題則是改編自李源順(2004)的異分母分數加減B卷，該試卷試題包括分數大小的比較，異(同)分母分數的合成、分解及分數的整數倍，契合本次教學實驗的教學目標，且該試卷具內容效度，其Cronbach's α信度值為 .761。

3. 延後測試題

由於實驗學校的期中考訂於教學實驗結束後的第六週，且學校的試題偏分數運算，因此，本研究以學校期中考的數學試題當作「分數運算」的延後測試題。另外，研究者修改後測的分數概念試題中的數字而形成一份平行於後測試題的「分數概念」延後測試題，其Cronbach's α信度值為 .829，具良好的信度。

雖然前測試題與後測試題均含括等分概念、簡單分數概念、單位量概念及等值分數概念，但是研究者不以前測試題作為延後測分數概念試題，而以一份平行於後測試題的分數概念試題作為延後測分數概念試題的原因，是雖然前、後測試題涵蓋相同的分數子概念，但其深度卻是不一樣的。另外，前測是檢測學生的預備經驗，所以不是以學生現行所學教材內容進行設計，而延後測是檢測學生進行教學實驗後的學習成效，因此需以

學生現行所學教材進行設計。研究者以與本次教學實驗有關的單位量概念與等值分數概念(含分數的比較)的試題為例說明如下：

(1) 在單位量概念部份，前測試題之單位量均是以一半或$\frac{1}{2}$作為單位量，例如：「一盒巧克力有2條。小明拿了$\frac{1}{2}$盒，小華拿了$\frac{1}{2}$條。請問小明和小華得到的一樣多嗎？」；而後測試題則是除了$\frac{1}{2}$之外，尚有不是單位分數的真分數，例如：「哥哥有8個蘋果，姊姊有16個蘋果，哥哥吃掉自己全部蘋果的$\frac{5}{8}$，姊姊吃了自己全部蘋果的$\frac{3}{8}$，請問誰吃掉的蘋果個數比較多？」。

(2) 在等值分數(含分數的比較)概念部份，前測試題均是以單位分數布題，例如：「小明和小華的彩帶一樣長，小明塗了$\frac{1}{2}$條，小華塗了$\frac{1}{4}$條，誰塗得多？」；而後測試題則不再侷限在單位分數，而是擴展至真分數，例如：「爸爸將年終獎金全部的$\frac{2}{7}$繳所得稅，全部的$\frac{1}{4}$發壓歲錢，請問繳所得稅和發壓歲錢哪一項的花費比較多？」。

三、研究過程

(一)研究對象

本研究從新北市新店區的某國小找二班五年級班級，一班為實驗組(33人)，另一班為控制組(34人)，由二班學生在五年級上學期的數學期中考試(表1)，數學期末考試(表2)，分數概念前測(表3)的獨立樣本*t*檢定的結果顯示二班學生的數學及分數概念的表現是相當的。

(二)教學實驗

實驗組與控制組自五年級下學期2月19日至3月2日各進行8節的「分數」教學，隨後於3月3日至9日各進行4節的「分數乘法」教學，每節課40分鐘。

表1：實驗組與控制組五上數學期中測驗平均統計分析

	變異數檢定				平均數檢定		
組別	平均數	標準差	*F*檢定	顯著值	自由度	*t*值	顯著值
實驗組($N=33$)	88.30	8.85					
控制組($N=34$)	87.79	11.95					
實驗組與控制組			0.180	.673	65	-0.198	.844

註：滿分100分。

表2：實驗組與控制組五上數學期末測驗平均統計分析

	變異數檢定				平均數檢定		
組別	平均數	標準差	*F*檢定	顯著值	自由度	*t*值	顯著值
實驗組($N=33$)	78.88	13.74					
控制組($N=34$)	82.76	14.08					
實驗組與控制組			0.002	.965	65	1.143	.257

註：滿分100分。

表3：實驗組與控制組前測平均統計分析

	變異數檢定				平均數檢定		
組別	平均數	標準差	*F*檢定	顯著值	自由度	*t*值	顯著值
實驗組(*N* = 33)	19.30	5.41					
控制組(*N* = 34)	19.88	4.80					
實驗組與控制組			2.923	.092	65	0.464	.644

註：滿分26分。

(三)後測

二班學生都於3月16日施以分數概念後測試題，於3月17日施以分數運算後測試題，時間各一節課。

(四)延後測

學校期中考時間為4月16日，其數學科試題視為延後測試卷之一，另外，二班的分數概念延後測於4月20日實施，時間亦各為一節課。

(五)資料處理

在量化資料方面，由於實驗組和控制組學生在教學實驗前的數學表現，前測的分數概念表現沒有顯著差異，因此，本研究將實驗組及控制組學生在分數概念後測、分數運算後測、分數概念延後測，以及分數運算延後測(學校期中考數學測驗)的表現，分別以獨立樣本*t*檢定來檢驗二班學生的學習成效是否有顯著差異，藉以回答待答問題一、二、三。

在質性資料方面，本研究將實驗組的課堂數學教學轉成書面資料，分析教師實踐診斷教學的具體策略及學生的表現，藉以回答待答問題四。本文課堂數學教學案例的代碼說明如下：T－老師；S－學生別；A－小組別；Ss－全體學生。

肆、研究結果與討論

本章分兩節，第一節透過比較實驗組與控制組學生在後測試題、延後測試題的表現，以統計檢定的方式來說明融入式診斷教學法的教學成效。第二節則透過實驗組師生在教學活動中的表現來說明融入式診斷教學的實踐歷程。

一、學生在後測試題、延後測試題的表現

從表4、表5可以發現，無論是分數概念或分數運算，實驗組學生的後測成績都顯著優於控制組學生。

從表6、表7可以發現，無論是分數概念

表4：實驗組與控制組分數概念後測平均統計分析

	變異數檢定				平均數檢定		
組別	平均數	標準差	*F*檢定	顯著值	自由度	*t*值	顯著值
實驗組(*N* = 33)	15.48	4.57					
控制組(*N* = 34)	13.15	3.89					
實驗組與控制組			0.941	.336	65	-2.256	.027*

註：滿分23分。

*$p < .05$

表5：實驗組與控制組分數運算後測平均統計分析

	變異數檢定				平均數檢定		
組別	平均數	標準差	*F*檢定	顯著值	自由度	*t*值	顯著值
實驗組($N = 33$)	16.58	2.99					
控制組($N = 34$)	14.55	2.98					
實驗組與控制組			0.124	.726	64	-2.763	.007*

註：滿分20分
*$p < .05$

表6：實驗組與控制組分數概念延後測平均統計分析

	變異數檢定				平均數檢定		
組別	平均數	標準差	*F*檢定	顯著值	自由度	*t*值	顯著值
實驗組($N = 33$)	16.88	3.23					
控制組($N = 34$)	12.15	3.82					
實驗組與控制組			1.060	.307	65	-5.466	.000*

註：滿分23分。
*$p < .05$

表7：實驗組與控制組分數運算延後測(學校期中考數學測驗)平均統計分析

	變異數檢定				平均數檢定		
組別	平均數	標準差	*F*檢定	顯著值	自由度	*t*值	顯著值
實驗組($N = 33$)	90.64	11.52					
控制組($N = 34$)	84.03	14.89					
實驗組與控制組			5.755	.019	65	-2.027	.047*

註：滿分100分
*$p < .05$

的延後測或分數運算延後測(學校期中考數學測驗)，實驗組學生的成績都顯著優於控制組學生。

由於實驗組與控制組在教學實驗前的學校數學成績(表1、表2)和前測成績(表3)都沒有顯著差異，但是在教學實驗後的後測(表4、表5)，延後測(表6、表7)，實驗組學生的表現都顯著優於控制組學生，顯示本融入式診斷教學具有良好的教學成效。

二、實驗組教師實踐融入式診斷教學的具體表現

根據文獻探討所呈現國小學生分數學習常犯迷思概念之類別，研究者在各類別各擷取一個教學案例，藉以呈現實驗組教師在不同的分數子概念的融入式診斷教學的實踐歷程，同時說明實踐歷程中涉及的診斷教學技巧與策略。另外，在案例中所涉及診斷教學技巧與策略，以及案例分析用以說明診斷教學原則之文字，以畫底線方式註明。

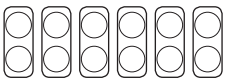
(一)單位量概念

案例一：教師首先佈了一題$\frac{N}{N}$=1的題目：「1包氣球有12個。$\frac{6}{6}$包和1包一樣多嗎？為什麼？請各小組開始討

論，並將結果寫在圖畫紙上。」。各組的討論紀錄如下：

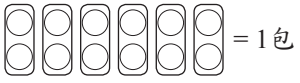
A1：一樣多。$\frac{6}{6}=\frac{12}{12}$(擴分)、$\frac{12}{12}=\frac{6}{6}$(約分)

A2：一樣多。因為$\frac{6}{6}$ = 1包氣球裡的12個

2個 = $\frac{1}{6}$ 

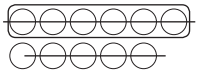
A3：一樣多。因為$\frac{1}{6}$ = 2個氣球，$\frac{6}{6}$是$\frac{1}{6}$的6倍，所以2 × 6 = 12個氣球，12個氣球相當於1包氣球。

A4：是。因為$\frac{6}{6}$ = 1

 = 1包

A5：$\frac{6}{6}$ = ~~半~~包

$\frac{6}{6}$ = 一包氣球的~~一半~~

$\frac{6}{6}$ ≠ ~~\~~ = 1包 

課本的題目為「1包氣球有12個。$\frac{6}{6}$包和1包一樣多嗎？要怎麼記？」，學生通常僅會紀錄「$\frac{6}{6}$包 = 1包」，由於學生在四年級時接觸的問題均為如「一包氣球有6個，$\frac{6}{6}$包 = 1包」(單位分數內容物為一個)的問題，造成學生容易形成「分子跟分母只要是一樣的數字就等於1」的規則，而沒有真正瞭解「$\frac{N}{N}$ = 1」的概念。除此之外，學生也容易受到分子控制的影響，認為分子的數字也就是內容物的個數(例如行32 S30表示：剛開始我以為6是12個的一半，所以$\frac{6}{6}$就是半包)。

在這個教學活動中，原先課本的題目是問「要怎麼記？」，僅是求出答案，但是為了要診斷學生的概念是否清楚、正確，教師改以「為什麼？」的問話要求學生的解法要呈現理由，以確認學生是否在「單位分數內容物為多個」的問題情境下，能夠說明「$\frac{N}{N}$ = 1」的概念，並藉以協助學生澄清「受分子控制」的迷思概念。

由於這是學生第一次學習「單位分數內容物為多個」的等值分數概念，因此在這個教學活動中，教師呈現每一組的解法。此外，由於個案教師於先前的教學過程中會提醒學生可用畫圖方式呈現想法(S30於小組討論時表示：「老師說最好可以畫圖耶！」)，促使學生除了會運用文字表徵之外，亦會嘗試以圖形表徵以說明理由與呈現解題歷程。部份教學片段如下：

31 T：第五組原先的答案是寫不等於，後來改成一樣。我想知道你們怎麼從「不是」變成「是」？你們本來是寫$\frac{6}{6}$ = 半包，後來為什麼改成$\frac{6}{6}$ = 一包？

32 S30：剛開始我以為6是12個的一半，所以$\frac{6}{6}$就是半包。

33 T：然後呢？

34 S30：後來在畫圖的時候發現的。

35 T：發現什麼？

36 S30：不是6個，是12個。是把12個分成6份，每一份有2個，所以6份就是12個，所以$\frac{6}{6}$ = 一包。

37 T：大家聽得懂S30的說法嗎？

38 Ss：懂。

行31顯示，即使第五組的答案已正確，教師仍然會利用進一步的診斷式問句「我想知道你們怎麼從『不是』變成『是』？」要第五組學生說明為什麼要改答案，以鞏固學生對於單位量概念的獲得。行32顯示學生受分子數字6的影響，以為$\frac{6}{6}$包有6個氣球，因此認為$\frac{6}{6}$包是半包，這種想法和文獻顯示學生解分數問題會受分子影響是一樣的(楊德清、洪素敏，2003；詹婉華，2003)。不過，學生後來用畫圖(行34)的方式發現$\frac{6}{6}$包有12個氣球(行36)，因此更改答案為一包。這顯示圖形表徵可以提供學生更具體的量感，甚至協助學生有機會察覺自己的錯誤進而澄清所學概念，此研究結果呼應了Cramer等(2008)、Mamede與Nunes (2008)、Panaoura, Gatatsis, Deliyianni與Elia (2009)的研究發現：兒童在多重表徵的學習環境下可以發展較好的分數概念。

此外，教師透過進一步的診斷式問句協助學生辨識單位量的不同，加強學生的單位量概念。部份教學片段如下：

39 T：老師想問一下，第二組表示2個 $=\frac{1}{6}$，請問有沒有少寫了什麼？

40 Ss：……。

41 T：$\frac{1}{6}$在這一題代表什麼？

42 S12：$\frac{1}{6}$包。

43 T：所以？

44 Ss：$\frac{1}{6}$包 = 2個

45 T：單位要寫清楚才可以呀！

先前文獻(楊德清、洪素敏，2003；Cramer et al., 2002)顯示學生解分數問題時，常常忽略單位量的重要，本研究亦將單位量的學習列入實驗組的教學目標，因此教師針對第二組(第三組也有同樣的情形)的解答提問「第二組表示2個 $=\frac{1}{6}$，請問有沒有少寫了什麼？」(行39)，但是學生仍然未察覺單位的重要(行40)，教師只好再以進一步的診斷式問句「$\frac{1}{6}$在這一題代表什麼？」提示學生(行41)，且終於讓學生澄清$\frac{1}{6}$包和2個的關係(行42、行44)，並藉此強調單位量的重要(行45)，以鞏固學生對於單位量概念的獲得。

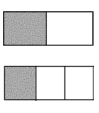
(二)等值分數(含分數的比較)

案例二：教師請各組討論下面三個題目：

1. $\frac{1}{2}$盒和$\frac{1}{3}$盒，哪一個比較多？
   $\frac{1}{2}\square\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}$盒和$\frac{4}{6}$盒，哪一個比較多？
   $\frac{2}{3}\square\frac{4}{6}$
3. $\frac{3}{6}$和$\frac{2}{3}$，哪一個數比較大？
   $\frac{3}{6}\square\frac{2}{3}$

現行實施小組討論式教學的教師大都會將課本題目逐題讓學生討論發表，可能會耗費許多時間。在這個教學活動中，教師一次呈現課本的三個具有相同概念與想法的問題讓學生討論，可節省教學時間，教師則可運用這些節省下來的時間以延伸並鞏固學生的分數概念學習(行66的通分概念、行79的公倍數概念)。第二組學生的討論紀錄與部份教學片段如下：

A2：$\frac{1}{2}$大於$\frac{1}{3}$ 因為$\frac{1}{2}$是一半，$\frac{1}{3}$是三份中的一塊



$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$因為三分之二和六分之四一樣多

$\frac{3}{6}<\frac{2}{3}$因為$\frac{3}{6}$跟$\frac{2}{3}$比較起來 

(看圖)$\frac{3}{6}$比$\frac{2}{3}$小

61 T：每一組的答案都是$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$、$\frac{3}{6}<\frac{2}{3}$。我們請第二組的同學上台說明。

62 S8：$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，看圖就知道了，一樣大的東西，一個分成2份，一個分成3份，分成2份的其中一份比分成3份的其中一份大。$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$也一樣，分成三份裡的2份和分成6份裡的4份一樣多。$\frac{3}{6}<\frac{2}{3}$也是呀！分成6份裡的3份，比分成3份裡的2份少。

63 T：有人要提出問題嗎？

64 S12：如果不畫圖，請問你會怎麼說明呢？

由於在案例一中，學生已有同時使用符號表徵(行32)和圖形表徵(行34、行36)來解題的經驗，因此當S8以圖形表徵來說明解法(行62)後，S12即要求S8以不同的表徵來說明解法(行64)，顯示學生已注意到解分數問題的表徵的多樣化。

65 S8：就像你們一樣呀！通分就可以了！

66 T：等一下！大家都知道S8說的通分嗎？

67 Ss：不知道！

68 S8：通分就是讓兩個分母一樣大！

69 T：你能舉例說明嗎？

70 S8：A1在算式中有寫$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$、$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$，就是讓兩個分母變成6，然後就可以知道了！

71 T：大家聽得懂S8說的通分的涵意嗎？

72 Ss：……。

73 T：懂的同學舉手！(約有一半的人)請懂的同學來說說看！

74 S12：兩個分數的分母不一樣時，我們用擴分讓兩個數的分母一樣，就像$\frac{1}{2}$可以變成$\frac{3}{6}$，$\frac{1}{3}$變成$\frac{2}{6}$，這時兩個分數的分母都變成6就是通分。

75 T：大家聽得懂嗎？

76 Ss：懂……。

77 S28：你怎麼知道要讓分母變成6？

78 S12：用公倍數！

79 Ss：什麼是公倍數？

80 T：對呀！什麼是公倍數呢？

81 S12：就是他們共同的倍數！

82 Ss：還是不懂！

由於S12不會說明公倍數的意義，T根據學生以前的學習經驗以詢問學生(2的倍數有哪些？3的倍數有哪些？)，並於黑板上列出部份2的倍數(2、4、6、8、10、12)、3的倍數(3、6、9、12)、既是2的倍數又是3的倍數(6、12)的方式說明公倍數的意義，並在說明之後再利用讓學生找3和4的公倍數等進一步的診斷式問題，以檢驗學生是否知道公倍數的意義之後再繼續進行教學。

83 T：請S12再說明他們的方法。

84 S12：2和3的公倍數是6，$\frac{1}{2}$等於$\frac{3}{6}$，$\frac{1}{3}$等於$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}>\frac{2}{6}$所以$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$。然後$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$，因為$\frac{2}{3}$擴分就變成$\frac{4}{6}$。第三題一樣$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$，所以$\frac{3}{6}<\frac{4}{6}$，所以$\frac{3}{6}<\frac{2}{3}$。

85 T：這三題大家有沒有問題？

86 Ss：沒有！

T透過學生以符號表徵說明解法的互動歷程，引出了通分(行65)、擴分(行74)、公倍數(行78)等數學概念，並適時介入學生間的互動，引導學生思考通分的意義、擴分的方法、公倍數的意義，使得學生有機會能夠澄清這些數學概念的關係，並成功地以符號表徵來完成解題。

此研究結果呼應了洪素敏等(2007)的研究發現：讓學生實際經驗等值分數在不同表徵間的轉換，對學生在等值分數概念與運算規則背後的意義能產生有意義的理解。

(三)同分母分數的加減

案例三：1. 一盒冰棒有12枝，姐姐有$\frac{8}{12}$盒，妹妹有$\frac{7}{12}$盒，她們共有多少盒？

2. 有2條繩子，一條長$\frac{7}{6}$公尺，另一條長$\frac{9}{6}$公尺，合起來共長多少公尺？

3. 爸爸買1個重$1\frac{8}{9}$公斤的西瓜，媽媽買1個重$1\frac{3}{9}$公斤的西瓜，合起來共重多少公斤？

在這個教學活動中，教師先將課本內概念相同的四題課本題目減少為三題，並將這三個問題同時呈現，節省教學時間，並將節省下來的時間，用以充分協助學生澄清與理解同分母分數加法算則的意義，以及鞏固學生對於單位量概念的了解。部份教學片段如下：

101 T：各小組來拿問題，討論後寫下你們的紀錄？

……

102 T：幾乎每一組都寫的差不多！我們來看第一題，每一組都有寫$\frac{8}{12}+\frac{7}{12}=\frac{15}{12}$，或者化為帶分數！老師想請問大家一個問題，為什麼只加分子，分母不加？

103 S12：因為一盒有12枝，如果你去加分母的話，就等於把一盒又去分割，這樣會變成一盒有24枝，這樣就不對了！如果分母相加，8就要變成16，7就變成14，這樣是不對的！

104 T：大家知道S12說的理由嗎？

105 Ss：知道！

106 T：誰能再說說看？

107 S1：題目是問幾盒，一盒就是12枝呀！如果加了分母，就變成一盒不是12枝了！

由於理解算則的意義是實驗組的教學目標之一，因此，即使學生都正確解出三題的題目，教師仍然以進一步的診斷式問句「為什麼只加分子，分母不加？」、「誰能再說說看？」回饋學生的答案或講解(行102、行106)，並藉由行103、行107兩位學生的說明，讓學生透過彼此的互動、澄清與說明，

鞏固全班同學對於單位量概念、同分母分數相加算則意義的瞭解。

此外，教師透過提問協助學生分辨與比較同分母分數加法與異分母分數加法的差異，以加深學生的學習印象。部份教學片段如下：

108 T：老師還想問一個問題，在什麼樣的情況下才可以直接分子相加？
109 S12：我知道！分母一樣的時候！
110 T：如果兩個分數的分母不一樣的時候，可以直接相加嗎？
111 Ss：不可以！
112 T：誰能說說看，為什麼不可以？
113 S19：分母不同時，分的份數不一樣多！
114 T：還有呢？誰能舉例說說看！
115 S23：一個蔥油餅分成兩份和分成三份，其中的一份不一樣大，這樣就不能相加！
116 T：大家覺得他們說的對不對？
117 Ss：對！

教師為了讓學生分辨同分母分數相加和異分母分數相加的算則差異性，因此在行108、行110以進一步的診斷式問句「在什麼樣的情況下才可以直接分子相加？」、「如果兩個分數的分母不一樣的時候，可以直接相加嗎？」加以提問與回饋；現行的小組討論式教學，教師會在學生出現正確算則時，討論就告一段落，然而融入式診斷教學會以診斷式問句要求學生進行更深入的概念澄清。

教師並利用彈性的問題「為什麼不可以？」、「誰能舉例說說看！」要求學生說明與舉例為什麼異分母分數相加時不可以直接分子相加(行112、行114)，以確保對異分母分數相加算則有不同層次了解的學生(行113、行115)都有適當的挑戰層次，並讓全班同學對異分母分數相加的算則有更清楚的了解。而從行115學生的回答，研究者發現這樣的澄清過程顯示教師會利用不同的脈絡和情境，讓學生回顧並鞏固分數加法算則意義的了解，以對分數加法算則產生持久和可轉移的了解。

(四)分數的整數倍

案例四：1. 1串丸子有7顆，阿文、阿得和小蘭各拿$\frac{2}{7}$串，他們3人共拿了多少串丸子？
2. 1段尼龍繩長$\frac{5}{12}$公尺，小瑜買了7段，請問他共買了多少公尺的尼龍繩？

131 T：各小組來拿問題，討論後寫下你們的紀錄？
132 Ss：要不要寫為什麼？
133 T：要說明你的理由。

在這個教學活動中，教師先將課本內概念相同的六題有情境的課本題目減少為兩題，亦即無論是如案例二中無情境的問題，或是本案例中有情境的問題，融入式診斷教學均可透過減少具相同概念題目與同時呈現概念與想法相同的題目，以加速學生學習與節省教學時間。

從案例一的行31、案例三的行102及案例四的行132、行133可知，教師不但要求學生要寫出解法，同時要寫出為何這樣解的理由，從案例一的行32、行34、行36，以及案

例三的行103、行107可知，這樣的要求具有澄清學生概念的作用，並提供學生自我檢查答案是否正確的機會。第一組學生的解法如下：

A1：$\frac{2}{7}\times 3=\frac{6}{7}$　$\frac{6}{7}$串
因為$2\times 3=6$　所以是$\frac{6}{7}$。
$\frac{5}{12}\times 7=\frac{35}{12}=2\frac{11}{12}$　$2\frac{11}{12}$公尺
因為$5\times 7=35$，
所以是$\frac{35}{12}$，
再用$35\div 12=2...11$
所以$\frac{35}{12}=2\frac{11}{12}$

在這個教學活動中，除之前案例顯示教師會讓不同組的同學上台發表解法外，各組成員在組內討論時亦會輪流發表想法。部分教學片段如下：

134　A1的討論內容如下：
135　S24：這次換S10說了……。
136　S10：2×3等於6呀！
137　S12：所以是$\frac{6}{7}$。
138　S10：分母不用乘。
139　S12：幹嘛寫分母不用乘？
140　S28：如果我是老師，我會問你為什麼只乘分子不乘分母？

從行135可以看出小組討論時，每個組員要針對解法輪流提供想法，這樣可以避免小組討論淪為小組組長(或成績佳者)的個人秀場，或變成偷懶者逃避參與學習的機會。

由於在案例三中，教師曾以診斷式問句提問學生「為什麼只加分子，分母不加？」(行102)，這樣的詢問方式讓學生能進一步澄清與鞏固對於算則「$\frac{8}{12}+\frac{7}{12}=\frac{15}{12}$」之意義的瞭解，同時，讓學生會進一步的產生「探究算則意義」的需求感。因此，在案例四的行140中，S28會以進一步的問題「如果我是老師，我會問你為什麼只乘分子不乘分母？」回應S12的質疑(行139)。當學生能主動的探究算則的意義，自然就容易理解算則的意義，而不是依樣畫葫蘆的使用算則，而不知其所以然。

141　T：這兩題每一組都用乘法，都是整數乘以分子，為什麼會乘以分子，卻不乘分母呢？請每一組討論，寫下你們的原因。

此外，由於分數的整數倍對學生而言是屬於新概念，因此教師讓每一組學生均上台發表解法，各組解法如下：

A1：因為如果分母也乘的話就變成擴分，而不是分數乘法。
A2：因為分子和分母如果乘了就會變成擴分。
A3：因為要是也乘分母的話，就變成擴分。
A4：因為乘分母的話，份數會增加，而分子的量卻不變。
A5：因為分母是分成的份數，如果乘分母的話，就等於把份數再多增加。

142　T：沒上台說明過的先說。……有人要自己上來！……。
143　S10：分母乘的話就變成擴分！
144　T：你可以舉例說明嗎？

145 S10：$\frac{1}{2}$都乘就變$\frac{2}{4}$，就是擴分……。

146 T：你能說清楚擴分和分數乘法的不同嗎？

147 S10：……。

148 T：有誰要幫忙說明？

149 S29：譬如一個蛋糕分成10份，每個人都拿2份就是$\frac{2}{10}$個，三個人就會拿$\frac{6}{10}$個，也就是10份裡的6份，如果分母也乘的話，就會變成$\frac{6}{30}$，就是30份裡的6份……。

從行142可知，教師希望每個學生都有機會上台說明解法，這樣才不會使得愈敢發表者愈能提升發表能力，而不敢發表者永遠沒有機會發展發表能力。

即使S10已舉例說明何謂擴分(行145)，教師仍然以進一步的診斷式問句「你能說清楚擴分和分數乘法的不同嗎？」回饋學生的講解(行146)，並藉由S29的說明(行149)，讓學生透過彼此的互動、澄清與說明，讓全班同學辨識表面相似(擴分和分數乘法都涉及分數和乘法)，但意義不同的算則的意義，以避免學生混淆算則，並可加以澄清與鞏固學生對分數整數倍算則意義的了解。

伍、結論與建議

一、結論

(一)融入式診斷教學法之實施成效

本融入式診斷教學實驗雖然只進行十二堂課，然而從後測、延後測的測驗結果顯示，實驗組的表現均顯著優於控制組，然而兩組學生在教學實驗前的學校數學成績和前測成績都沒有顯著差異，顯示本融入式診斷教學具有良好的教學成效。尤其是作為延後測試題之一的學校期中考試題，其結果顯示接受融入式診斷教學的實驗組學生，在授課節數與控制組學生相同的情況下，其學校考試成績亦不遑多讓，甚至更為優異，顯示融入式診斷教學不僅可以提升學生關於分數概念的理解程度，亦可提升學生關於分數運算的學習成效與在校成績的表現。

(二)促成融入式診斷教學法的教學效果較佳的教學策略

在進行融入式診斷教學的過程中，教師可根據診斷教學原則融入課本內容，實施可行的教學策略，以協助學生澄清分數概念／運算，並診斷學生的概念是否清楚、正確。根據研究結果所得較佳的教學策略如下：

1. 教師可透過「刪減」具相同概念的課本題目與「同時呈現」概念與想法相同的題目以節省教學時間，並能將節省下來的時間充分協助學生澄清與鞏固學生的分數概念。這是一般現行小組討論式教學鮮少考量的教學策略。
2. 現行的小組討論式教學，教師會在學生出現正確答案或算則時，討論就告一段落，然而融入式診斷教學會以診斷式問句要求學生進行更深入的概念澄清，以鞏固學生對於所學概念的獲得。
3. 教師可修改課本題目並透過討論，以使學生有機會察覺自己的錯誤。例如「一盒方塊酥有24塊，$\frac{1}{2}$盒和$\frac{1}{3}$盒，哪一個比較多？$\frac{1}{2}\square\frac{1}{3}$」改成「一盒巧克力有6個，$\frac{1}{2}$個巧克力和$\frac{1}{3}$盒巧克力，哪一個比較多？」。
4. 教師應掌握機會利用進一步的問題提供回

饋，引起學生認知衝突、澄清相關概念。例如：

(1) 當學生出現錯誤解答，教師應以診斷式問句引起學生認知衝突、澄清相關概念。例如教師提問「第二組表示2個 $=\frac{1}{6}$，請問有沒有少寫了什麼？」，以加強學生的單位量概念。

(2) 即使學生正確解答，教師可以用文獻中學生常犯的錯誤來追問以加強概念的理解。例如教師可追問「為什麼只加分子，分母不加？」，以協助學生澄清與鞏固學生對於同分母分數加法算則意義的理解。

(3) 教師可透過診斷式問句讓學生分辨／比較表面相似但意義不同的概念／算則的意義。例如教師提問「如果兩個分數的分母不一樣的時候，可以直接相加嗎？」、「為什麼會乘以分子，卻不乘分母呢？」，以協助學生分辨與比較「同分母分數加法與異分母分數加法」以及「擴分與分數乘法」的異同，產生一個新的整合知識的結構，並可透過討論形成分數加法與分數乘法的關鍵原則。

(4) 教師可透過診斷式問句，利用不同的脈絡與情境讓學生對於先前所學概念產生持久和可轉移的了解。例如教師提問「在什麼樣的情況下才可以直接分子相加？」、「如果兩個分數的分母不一樣的時候，可以直接相加嗎？」以鞏固學生對於分數加法算則產生持久的了解。

5. 透過本次教學實驗，教師會以診斷式問話促使學生在課堂中會多次嘗試運用符號表徵或圖形表徵進行解題，進而會注意到解分數問題的表徵多樣化，例如會以多元表徵的方式比較分數之大小，顯示學生對分數概念具有較深入的理解，能夠以意義化的方式學習分數。此研究結果呼應了Cramer等(2008)、Mamede與Nunes (2008)以及Panaoura等(2009)的研究發現：兒童在多重表徵的學習環境下可以發展較好的分數概念。

6. 先前文獻(楊德清、洪素敏，2003；詹婉華，2003；Cramer et al., 2002; Iwasaki & Hashimoto, 2000)顯示學生解分數問題時，常常只注意分數符號的大小，而忽略單位量的重要性。在本次教學實驗過程中，教師在不同的佈題中，多次透過提問、引導學生討論強化學生對於單位量概念的理解，例如教師在協助學生澄清與理解同分母分數加法算則的意義時，即使學生已經正確解出答案，教師仍會透過「為什麼只加分子，分母不加？」的診斷式問話，促進學生對於單位量概念的思考。

根據上述內容，證實一設計良好之融入式診斷教學活動，在結合製造學生認知衝突、師生熱烈溝通、討論、思考、反省，與勇於分享解題經驗之教學互動的學習情境下，兒童的分數概念／運算學習將能夠充分澄清與成長。

二、建議

本研究除再次證實了診斷教學關於國小學生分數迷思概念的良好教學成效，研究者並將診斷教學概念融入現有的數學教科書的活動中，透過增刪、延伸教科書的教學活動的方式設計為融入式診斷教學活動，且成效卓著。幾點建議如下：

(一) 課程設計者於進行課程編撰時，應充分瞭解學生所產生的迷思概念，進行安排適量且能夠引起學生認知衝突的教學活動，並於教師手冊上提供教師參考範例與可能的診斷式問句，以協

助教師能夠針對學生常犯的迷思概念進行診斷教學活動。

(二) 由研究結果可瞭解，教師應有適當的診斷教學知識、技能以及對學生數學知識的瞭解，方能落實融入式診斷教學。師資培育機構的職前或在職進修課程，可考慮納入診斷教學知識、技能以及學生數學知識的課程內容，以推廣與落實融入式診斷教學概念於數學教室中，相信對建立學生正確的數學概念具有莫大幫助。

(三) 在職教師平日進行教學準備時，可考慮從原有的教學活動中，刪除類似的教學活動或同時呈現類似的教學活動，以較快速的方式進行原有教材的教學活動，則可節省時間利於進行融入式診斷教學活動，方能提供充分的時間讓學生仔細討論與澄清所學概念。

(四) 未來可針對融入式診斷教學法於其他數學概念的教學成效，進行更深入的教學研究。

參考文獻

1. 呂玉琴、鄧寶生(2002)。**兒童數、量、形概念調查及診斷教學之研究——應用直觀規律理論—子計畫一：兒童分數概念調查及診斷教學之研究(II)**(NSC90-2521-S-152-004)。臺北市：行政院國家科學委員會。
2. 李源順(2004)。**九年一貫數學領域分數和小數能力指標的詮釋：子計畫二—分數四則運算**(NSC92-2522-S-133-002)。臺北市：行政院國家科學委員會。
3. 李源順、余新富、李勇諭(2006)。同分母分數加減法的教學研究。**科學教育研究與發展季刊，2006專刊**，114-141。
4. 房昔梅、鍾靜(2005)。國小教師在高年級實施討論式數學教學之行動研究。**國立臺北教育大學學報：數理科技教育類，18**(2)，33-64。
5. 林清山(1989，二月)。**實驗研究法在教育研究上的應用及限制**。發表於科學教育研究方法第一次研習會。臺北市：行政院國家科學委員會。
6. 林筱娟(2011)。**國小二年級分數診斷教學之研究**。未出版之碩士論文，國立屏東教育大學數理教育研究所，屏東市。
7. 林福來(1990)。**比例概念深層結構的了解 II ：高中生複比與非線性比的了解**(NSC-79-0111-S-003-13A)。臺北市：行政院國家科學委員會。
8. 林福來(1999)。**教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法(3/3)**(NSC88-2511-S-003-001)。臺北市：行政院國家科學委員會。
9. 林福來、黃敏晃(1993)。**教與學的整合研究(II)：分數啟蒙的診斷教學**(NSC82-0111-S-003)。臺北市：行政院國家科學委員會。
10. 洪素敏、楊德清、蔡鳳秋(2007)。等值分數補救教學之研究。**課程與教學，10**(3)，125-160。
11. 胡蕙芬、李源順(2005)。分數的整數倍教學實驗。**科學教育研究與發展，2005專刊**，129-153。
12. 張英傑(2004)。**國民小學數學備課用書五下第十冊**。臺南市：南一。
13. 教育部(2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要**。臺北市：作者。
14. 陳玉玲(2000)。**概念改變教學策略對地球運動概念之教學效果——以國小六年級學生為例**。未出版之博士論文，國立政治大學教育學系，臺北市。

15. 陳琪瑤(2005)。關鍵概念面質教學策略對國小四年級學生分數概念改變及數學成就之影響。**教育心理學報，36**(4)，375-393。
16. 黃湘武(1993)。皮亞傑理論在科學教育上的應用研究。收錄於杜祖貽(編著)，**西方社會科學理論的移植與應用**(頁53-62)。臺北市：遠流。
17. 楊瑞智(2004)。**數學五下**。臺北市：康軒。
18. 楊德清、洪素敏(2003)。比較分數大小——從具體、半具體至抽象符號表徵之教學行動研究。**南師學報：數理與科學類，37**(2)，75-103。
19. 詹婉華(2003)。**國小高年級學童分數概念之探究**。未出版之碩士論文，國立台北師範學院數理教育研究所，臺北市。
20. 劉曼麗(2005)。小數診斷教學研究。**科學教育學刊，13**(1)，29-52。
21. 賴麗桂(2007)。**資訊融入國小三年級學童分數診斷教學之研究**。未出版之碩士論文，國立臺北教育大學數學教育研究所，臺北市。
22. Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 49-56). Melbourne, Australia: PME.
23. Bell, A. W. (1992). Abstrat form lectures: Diagnostic teaching. In C. Gaulin, B. R. Hodgson, D. H. Wheeler, & J. C. Egsgard (Eds.), *The 7th International Congress on Mathematical Education* (p. 342). Quebec, Canada: Les Presses De Université Laval.
24. Bell, A. W. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 115-137.
25. Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316.
26. Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144.
27. Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 490-496.
28. Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 17-24). Kirstenhof, South Africa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
29. Herman, J., Ilucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, J., Simpson, A., et al. (2004). Images of fractions "as" processes and images of fractions "in" processes. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 249-256). Kirstenhof, South Africa: Internation-

al Group for the Psychology of Mathematics Education.

30. Hewson, M. G., & Hewson, P. W. (1983). Effect of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. *Journal of Research in Science Teaching*, *20*(8), 731-743.
31. Iwasaki, H., & Hashimoto, M. (2000). Cognitive change of fraction concepts in third graders: Analysis from the view of operational schema. *International Journal of Curriculum Development and Practice*, *2*(1), 1-10.
32. Kerslake, D. (1987). *Fraction: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, England: NFER-NELSON.
33. Lukhele, R. B., Murray, H., & Olivier, A. (1999). Learners' understanding of the addition of fractions. In J. F. Matos, P. Valero, & K. Yasukawa (Eds.), *Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* (Vol. 1, pp. 87-97). Port Elizabeth, South Africa: Port Elizabeth Technikon.
34. Mack, N. K. (2000). Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: The case of multiplication of fractions. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 442 671)
35. Mamede, E., & Cardoso, P. (2010). Insight on students (mis) understanding of fractions. In M. M. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Belo Horizonte, Brasil: PME.
36. Mamede, E., & Nunes, T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. In F. Olimpia, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345-352). Morelia, Mexico: PME.
37. Niaz, M. (1998). A lakatosian conceptual change teaching strategy based on student ability to build models with varying degrees of conceptual understanding of chemical equilibrium. *Science & Education*, *7*(2), 107-127.
38. Panaoura, A., Gagatsis, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2009). Affective and cognitive factors on the use of representations in the learning of fractions and decimals. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 273-280). Thessaloniki, Greece: PME.
39. Pantziara, M., & Philippou, G. (2011). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *78*. Retrieved August 8, 2011, from http://www.springerlink.com/content/t236p70641766173
40. Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, L. (1970). *The child's conception of geometry* (E. A. Lunzer, Trans.). London: Routledge and Kegan Paul. (Original work published 1960)
41. Slavin, R. E. (1984). Team assisted individualization: Cooperative learning and individualized instruction in the mainstreamed

classroom. *Remedial and Special Education*, *5*(6), 33-42.

42. Suh, J. M., & Moyer-Packenham, P. S. (2008). Scaffolding special needs students' learning of fraction equivalence using virtual manipulatives. In F. Olimpia, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 297-304). Morelia, Mexico: PME.
43. Taber, S. B. (2007). Using Alice in Wonderland to teach multiplication of fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(5), 244-250.
44. Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). The intuitive rules theory and in-service teacher education. In F.-L. Lin (Ed.), *Proceedings of the 1999 International Conference on Mathematics Teacher Education* (pp. 205-225). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

科學教育學刊
2011, 第十九卷第五期, 383-408

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(5), 383-408

A Study of Integrated Diagnostic Teaching on Fractions for Elementary Fifth-Grade Students

Shih-Chan Wen

New Taipei City Anho Primary School

Abstract

The purpose of this research is to examine the effectiveness of integrated diagnostic teaching on the learning of fractions. A Quasi-experimental approach is adopted in this research and the lessons on fractions were taught to fifth grade students in elementary school. The research tools included integrated diagnostic teaching activities and assessments. The experimental group was instructed using the method of integrated diagnostic teaching and the control group was taught using the method of small discussion groups. The two groups had similar math ability and fractions concepts before the experimental teaching. They were chosen based on two exams (midterm and final) during their first semester of 5th grade and a pretest on fractions. The results of the integrated diagnostic teaching were analyzed through comparisons and contrasts between these two groups from three sources: (1) results of a fractions test after instruction (a post-test); (2) a retention test; and (3) scores on the school's midterm test in the second semester. In addition, judgments of experimental group students' performance based on classroom observation is also included. The results of this research reveals that the integrated diagnostic teaching can create cognitive conflicts for students and their misconceptions on fractions can be dispelled, clarified and corrected effectively. In addition, it can save teachers' lesson preparation time. The main research results are reported as follows: (1) The post-test, retention test and the school's midterm results revealed that the experimental group achieved higher math scores than the control group. (2) The analysis on classroom observation revealed that integrated diagnostic teaching is beneficial for learning of fractions. It improves students' thinking, reflection and oral expression skills. Further, based on the research results, this study proposes some suggestions for designing integrated diagnostic teaching activities, design of textbooks, instructions, teacher development, and future research directions.

Key words: Misconception, Unit Amount, Equivalent Fraction, Integrated Diagnostic Teaching, Cognitive Conflict