科學教育學刊
2011, 第十九卷第六期, 483-506

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(6), 483-506

科技大學工程學生導數概念理解之研究

黃志賢

明志科技大學　電機工程系

(投稿日期：民國100年1月10日，修訂日期：民國100年9月19日，接受日期：民國100年12月14日)

摘要：本研究以APOS (Action-Process-Object-Schema)理論與表徵理論為理論架構，目的在於探討科技大學大一工程學生的導數概念基模，以做為導數概念教學設計之參考。研究對象為21位接受傳統微積分教學的科技大學大一工程學生，研究方法包括問卷調查及半結構式一對一訪談，以Piaget與Garcia的三合一機制(triad mechanism)做為描述導數基模的模型。從理論的觀點，APOS理論與表徵理論的理論架構是有用的且是互補的，讓研究者可以從兩個不同但互補的觀點檢視同一現象。一方面，APOS理論可以用來確定學生能夠在表徵系統內和表徵系統間進行表徵轉換所必要的構思；另一方面，藉由學生在表徵系統的轉換方式的分析，提供學生已經建立的導數基模的成分間的關係。研究結果顯示，學生學習導數概念及其導數基模發展所遭遇的困難分別是數量導數的過程概念及圖形導數的過程概念，這兩個過程概念居導數基模的樞紐位置。

關鍵詞：工程學生、行動—過程—物件—基模(APOS)、表徵、導數

壹、緒論

根據2003年國際數學與科學教育成就趨勢調查(Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS)的調查資料顯示臺灣學生在數學學習上，有「高成就、低興趣及低自信」的傾向。這顯示了臺灣的學生在考試的壓力下，過於重視單調的算則而對數學學習產生不了興趣；未能具備組織化及結構化的數學知識網絡，而對自己的解題過程缺乏自信。傳統的數學教學與學習都是在「老師示範、學生模仿、試題練習、熟練解題方法」的流程中進行，導致學生只注重計算結果的正確與否，而忽略了計算背後概念所代表的真正意義。這樣的教學與學習特性顯現在整個數學學習過程中，學生只是不斷的模仿、練習及背誦程序性知識，並且把計算得快又準當作是數學能力的重要指標。只重視程序性知識而不重視概念性知識的理解的學習習慣，在學生進入大學學習微積分課程時就遭遇極大的困難。另一方面，臺灣在少子化及廣設大學的衝擊下，大學生的數學能力有越來越低落的趨勢。因此，提升其數學概念理解能力，以為後續專業教育紮下穩固的基礎是大學數學教育的重要目標。

微積分是大學數學教育的基礎課程，學生必須要能理解微積分的相關概念並能應用。對於工程學生而言，更是專業科目與未

來職場的必備知識。然而，許多的研究顯示學生對於這些數學概念的理解有困難。例如，Bezuidenhout (1998)在他的研究報告中提及：雖然變率是微積分很重要的概念之一，但大一學生卻沒有很好的理解，關於變率的不恰當直觀導致學生產生一些迷思概念。概念理解的不足是造成學生微積分學習困難的重要原因，學生認為微積分只是計算的工具，不重視概念的理解(Aspinwall & Miller, 1997)。因此，如何提升大一工程學生對於微積分概念的理解是大學數學教育的重要課題。

數學教育研究社群對於學生學習數學概念以及數學概念的發展已經有許多的討論，有些是關於過程(process)和物件(object)的概念(Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997; Gray & Tall, 2001; Sfard, 1991)和關於不同的表徵(Goldin, 1998; Goldin & Shteingold, 2001; Gray & Tall)，概念的習得過程可以從對物件的知覺或在物件上的行動開始(Gray & Tall)。APOS理論強調概念的形成具有階段性，建立完整的概念或完整的心智結構可以透過行動(action)、過程、物件和基模(schema)四個階段(Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1991)。APOS理論已被證實可用來詳細描述數學概念的建構，但此理論並未包括與概念理解相關且重要的表徵的角色。特別的是，圖形表徵與其他表徵的分析對建立導數概念基模成分之間的關係是很重要且基本的。

在數學概念的習得過程中，表徵是用來呈現數學概念、溝通和思維必備的工具。多重表徵包括概念的數量形式、代數式、圖形及口語形式，使學生理解不同表徵之間的連結，進而發展更深層和更豐富的概念理解(Haciomeroglu, Aspinwall, & Presmeg, 2009)。「The Principles and Standards for School Mathematics」(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, p. 360)證實了學生「選擇、應用和轉譯數學表徵來解題」的能力是非常重要的。數學想法的溝通是藉由口說語言、書寫符號、表格、圖形或自然的物件等外在表徵(Lesh, Post, & Behr, 1987)，也就是說，理解一個概念就是有能力從不同表徵去察覺這個概念，能夠從給定的表徵裡操弄想法，以及把這個概念的某一表徵轉譯至另一個表徵。由此觀之，學生對數學表徵的處理能力與概念理解程度有著緊密的關係，根據Kendal與Stacey (2000)的研究，教師對某些表徵的強調會影響學生如何處理表徵。

根據以上所述，本研究的目的在於以APOS理論和表徵理論為理論架構，探討科技大學大一工程學生的導數概念基模，以做為導數概念教學設計之依據。

貳、理論架構

兩個概念架構形成本研究的理論基礎，首先，APOS理論用來建構導數概念基模；其次，表徵理論提供概念工具來分析使用不同表徵的彈性以及理解導數概念所扮演的角色。本節簡要描述APOS理論及表徵理論兩個概念架構，並舉一例說明兩者之間的整合。

一、APOS理論

APOS理論強調概念的形成具有階段性，建立完整的概念或完整的心智結構可以透過行動、過程、物件和基模四個階段(Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1991)。行動概念是個體根據明確的算則由外啟動的數學具體物的轉換，漸漸地，當個體對他們的行動加以反思，他們可以內化這些行動為過程，此時個體已經不需要再透過步驟逐一操作並

且可以自由想像。當心智過程可以成為進一步操弄的對象而任意轉換時，這心智過程就被膠囊化(encapsulation)形成一個抽離脈絡且較形式化的物件，物件便成為進一步被操弄的對象。整個過程會將個體帶入較為抽象的層次，因而這整個將具體物轉換以獲得較為抽象新物件的過程，便形成了一個基模。透過這樣的循環過程，學生的基模將會不斷地擴張，所操弄的物件也將會愈來愈抽象，而所學的知識也會愈來愈形式。一個數學基模可以看作是行動、過程、物件概念及其他先前建構的基模的集合體，在問題情境中使用的數學結構(Baker, Cooley, & Trigueros, 2000)。

APOS理論主張知識的形成來自於「行動」，學習者透過重複操弄活動的過程產生實質的經驗，透過反思使經驗產生意義內化到「過程」，再進一步反思將過程視為一個實體進入「物件」階段，最後進入「基模」。新的基模與現有的基模經過同化(assimilation)或調適(accommodation)產生更大的基模或另一個新的基模。這個觀點與Piaget的認知發展理論很接近，Piaget認為基模是認知結構的基本單位，基模隨著學習而改變，透過同化或調適來擴展認知基模或建立新的認知基模(Asiala et al.,1996; Confrey & Kazak, 2006; Dubinsky, 1991)。Piaget認為從行動到運思(operation)到數學物件的過程需要經過反思抽象(reflective abstraction)。Dubinsky進一步將Piaget的反思抽象整理歸納出五類，內化(interiorization)、協調(coordination)、反逆(reversal)、膠囊化／解膠囊化(encapsulation/de-encapsulation)和一般化(generalization)。內化是個體對經驗產生了意義，不需要再倚賴情境進行操作；協調是透過同化或調適去協調兩個或數個小過程，產生一個過程；反逆是認識數學物件的一體兩面，例如：函數及其反函數；膠囊化指的是從動態過程到靜態物件轉換的過程；解膠囊化則是從靜態物件回到動態過程重新建構的過程；一般化指的是已建立的個體基模能應用到更高階的概念。

APOS理論的應用提供了一個解釋模型，以數學概念的基因分解(genetic decomposition)來描述個體如何建構出這些行動、過程和物件以理解某個數學概念的心智模式，而這個基因分解就是研究人員用來解釋數學概念發展的模型。某個特定概念的基因分解並不是唯一的，只是暫時性的，可由實徵性的研究加以修改、調整，再作為下一輪教學實驗的設計架構。我們可以透過APOS理論和基因分解觀察學習者建構知識的過程，也可獲知學習者是否掌握正確概念，更可以解釋學生的概念是如何形成的，教學者也能從中發現學習者的困難以進行教學活動的修正。以APOS的理論架構所分析出來的基因分解不僅可以作為自身理解數學概念的架構，也可作為分析學生如何建構概念的基礎。

為了詮釋學生數學概念基模的發展，本研究透過Piaget與Garcia (1983/1989)的三合一機制(triad mechanism)來描述，這個機制將概念發展區分為三個階段。在內在(intra-)階段，聚焦在一個單一的認知項目，與其他具有相似本質的行動、過程與物件無關，例如，學生認為必須透過微分運算才能獲得$f'(a)$。在互相(inter-)階段，能察覺並確認不同行動、過程和物件之間的關係，但它們可能仍是孤立的，例如，學生在看到許多導數的特殊例子，開始聚集這些例子的相同本質，甚至給予相同的名稱。在超越(trans-)階段，個體將前一階段所發現的關係利用不同行動、過程和物件之間的關係建構成一個一致的結構(Cooley, Trigueros, & Baker, 2007)，

這個一致性的重要性在於決定這個基模所包括的範圍。當一個數學概念基模的發展達到超越階段，才能說學生已經理解這個數學概念。

根據APOS理論、導數概念及研究者的教學經驗，研擬導數概念的基因分解如下：

(一) 學生在學習導數概念之前，應該已經具備的基模包括：1. 點的圖形表徵；2. 直線斜率概念；3. 函數概念(含代數與圖形)；4. 極限概念。

(二) 協調導數基模的割線斜率及平均變率：透過曲線上兩點計算割線斜率的行動及藉由差商計算平均變率的行動；這些行動經由曲線上兩點越來越接近及區間越來越短，逐漸內化為過程；透過極限概念膠囊化上述過程為切線斜率及瞬時變率，由此產生導數的定義。

(三) 協調先備基模及導數基模形成導數概念基模：協調$f'(a)$的詮釋如切線斜率與變率等；協調$f'(x)$的詮釋如切線函數；函數的單調性與一階導數的正負；函數的凹性與二階導數的正負。

Dubinsky及其所屬之數學教育研究團體RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community)中的成員利用使用APOS理論搭配ACE (computer Activities, Classroom task without computers followed by discussion, Exercise)教學環進行研究，他們將課本編製成三部分，第一部分是程式設計活動，利用電腦活動提供學生經驗基礎並幫助學生內化到過程。第二部分課堂討論，給學生有反思的機會。第三部分回家功課，透過適當的練習來增加熟練度，強化心智結構。這樣的APOS框架運用在大學數學課程已有一些成果，除了函數之外，在群論和無窮大的概念也都有貢獻(Asiala et al., 1997; Dubinsky, 1991; Dubinsky, Weller, McDonald, & Brown, 2005; Harel, Selden, & Selden, 2006)。對於微積分相關概念的研究大多以電腦輔助教學，而且缺乏其他理論支撐，導致在推論概念層次的發展時上略顯單薄或不足。舉例而言，每一個概念層次都可能包括不同的數學表徵，每一種導數表徵也都可能包括不同的概念層次。Trigueros與Martínez-Planell (2010)為了彌補這個不足，就以APOS理論及語言符號表徵為理論架構探討大學生雙變數函數的圖形表徵理解情形。因此，表徵理論應可以和APOS理論形成互補的理論框架。

二、表徵理論

在數學學習過程中，表徵是用來呈現數學概念、溝通和思維必備的工具。一般將表徵分成兩個面向，一是外在表徵，另一是內在表徵。外在表徵指的是可觀察的符號、圖表、模型及圖像等，外在表徵對於學生理解數學扮演著整合的角色，也是教室裡數學想法的溝通及理解數學概念的重要工具(Lesh et al., 1987)。內在表徵指的是學生在頭腦裡所建立的某些圖像。學生可以使用外在表徵來產生一個數學概念的內在表徵，當一個數學概念的內在表徵的各種變化及其之間的功能關係能被發展，這個概念就可以說是被習得了(Kaput, 1987)。Hiebert與Carpenter (1992, p. 67)更進一步從學生所創造的內在表徵和外在表徵之間的關係來定義概念的理解。他們認為「當心智表徵是整體表徵網絡的一部分時，數學才算是真的被理解。理解的程度是由表徵連結的數量和強度所決定的。當一個數學想法、程序或事實被更強或更多的連結連接到現存的網絡時，它才算是完全被理解。」另一方面，Janvier (1987)認為一個數學概念的表徵是多重的，多重表徵的意涵是

指用不同的表徵形式來呈現或建構同一個概念，就像是一座星形的冰山，每一個尖端都代表一個表徵形式，而完整的一個數學概念就是整座表徵結構的冰山。每一種表徵都有優於其他表徵的優勢，Tall (1992, p. 21)在談到這些優勢時說「圖形給予質的、全面性的洞察，數量給予量的結果，給予有力的操弄能力。」因此，表徵的使用與轉換對於數學概念的理解就顯得十分重要。

表徵本身的轉換與表徵之間的轉譯，對函數概念的習得與使用是非常重要的(Lesh et al., 1987)。Janvier (1987)注意到函數不同表徵間的轉換的重要性，以符號表徵和圖形表徵為例，這兩個不同的轉換「圖形→方程式」和「方程式→圖形」是兩種不同的洞察。關於微積分教學與學習的文獻都清楚地指出使用多重方式呈現數學概念是有益的(例如，Berry & Nyman, 2003)，藉由多重表徵的介紹，學生可以統合不同的思維模式來加深他們對導數概念的理解，並且連結到他們個人表徵和意像成為常規(NCTM, 2000)。許多研究(例如Even, 1998; Ferrini-Mundy & Graham, 1993)指出學生在表徵的連結和在表徵間彈性地轉換是有困難的，在一個關於微積分學習的綜合研究，Ferrini-Mundy與Graham認為大學生滿足於在不同表徵下得到不同結果，但不清楚這些結果是不一致的。其他的研究(Greer & Harel, 1998; Hong, Thomas, & Kwon, 2000)則指出困難來自於表徵間的轉換，學生表面上似乎有能力連結表徵，實際上並不瞭解連結這些表徵的深層概念。

這支持了Duval (1999, 2006)的主張，他認為數學思維過程不僅需要使用表徵系統，也需要表徵系統的認知整合。從Duval的分析，數學學習與理解需要比較相似的語言符號表徵，有兩種不同的語言符號表徵的轉換：處理(treatments)是在相同表徵系統內的表徵轉換；變換(conversions)是相同物件概念在不同表徵系統間的表徵轉換。Duval認為這些轉換是學生數學學習困難的來源，而若能將此列入教學考量，可以幫助學生克服這些困難。比較同一個表徵系統內相似的表徵和處理以區辨數學物件的相關價值，學生可以注意到數學相關與重要認知的特徵；將表徵從一個系統變換至另一個系統以分離被表徵的物件和表徵的內容，使得表徵系統不再呈現孤立的狀態。

根據函數的不同表徵及導數的概念，本研究區分出導數的三種表徵。導數的數量表徵是差商(difference quotient)和變率(rate of change)，從函數的數量(表格)呈現方式，微分可以被視為計算接近某個值的變率，透過兩個接近的函數值的差商計算：

在區間$[x, x + h]$，$f'(x)$的平均變率 = $[f(x + h) – f(x)/h]$。例如，對函數$f(x) = x^3$，取$x = 1$及$h = 0.001$，$f(x)$在區間[1, 1.001]的平均變率 = $[(1 + 0.001)^3 – 1^3]/0.001 = 3.003001$。當$h$趨近於0時的極限就是瞬時變率。因此，導數的數量表徵涉及任意小的差商的決定，稱之為數量導數。從函數的圖形表徵，導數可以被視為計算曲線的斜率。直觀的來說，曲線的斜率就是放大曲線的某個區域使之起來像是局部的直線，或是切線的斜率，稱之為圖形導數。從函數的符號表徵，導數經常以代數規則呈現，例如，函數的符號表徵為$y = x^3$，其導函數符號為$dy/dx = 3x^2$或$f'(x) = 3x^2$，稱之為符號導數。本文使用導數一詞泛指導數的任一表徵，符號導數指涉使用符號表徵微分的結果(導函數)；如果資訊是以差商及表格等方式呈現，計算平均變率或瞬時變率者，則歸類為數量導數；圖形導數指涉割線和切線斜率。

三、APOS理論與表徵理論的整合

APOS理論和表徵理論讓研究者從不同但互補的觀點來觀察相同的現象，在APOS理論，處理可以藉由相同表徵系統內作用於物件的行動或過程來描述，對這些行動進行反思可以提出有意義的觀點或性質，行動就被內化為過程。加上表徵理論，研究者可以藉由強調區辨觀點或性質的必要性來釐清這些行動所扮演的角色。變換在APOS理論可以用來描述不同物件在同一基模內的關係，或是不同表徵系統的物件、過程或行動之間的關係。另一方面，當我們考量APOS的基模可能包括不同系統裡的過程或物件的表徵時，兩種理論可視為是一致的，茲舉一個例子說明APOS理論與表徵理論兩個理論觀點之間的整合。給定一個函數，把兩個數值代進去計算差商的行動得到平均變率，學生會察覺到兩個數值越接近，平均變率的變化越小，並內化為瞬時變率的過程概念。表徵理論則聚焦在代數式變換為直線圖形，即每一個平均變率代表函數圖形上連接兩點的割線斜率，由此建構了代數式及其對應的圖形兩個不同物件之間的關係。簡言之，根據基因分解，上述過程為：處理行動概念→數量表徵為過程概念→數量表徵，再變換為行動概念→圖形表徵。更進一步，結合上述瞬時變率的過程概念與圖形切線斜率的行動概念，學生會察覺到連續函數的離散近似，例如，能利用$f'(5)$估計$f(5.1)$，並膠囊化為數量導數的物件概念。表徵理論則聚焦在圖形表徵變換為數量表徵，在只有函數圖形而缺乏代數式的情況下，切線斜率與割線斜率代表線性近似，由此建構了圖形與線性近似兩個不同物件之間的關係。易言之，根據基因分解，上述過程為：協調行動概念→圖形表徵與過程概念→數量表徵後，變換為物件概念→數量表徵。

根據APOS理論、導數表徵及導數概念的基因分解，以上述的兩個例子為模式，每一種導數表徵中分別安置行動概念、過程概念或物件概念等，形成理解導數基模的表徵架構如表1所示。這個架構是以表徵能力做為中介來瞭解學生的導數基模，將學生的導數概念理解放置在兩個維度，認識的維度及表徵的維度，並以矩陣的形式呈現，以描述學生在不同表徵系統的理解能力。此一矩陣並不是一個靜態的架構，上述的兩個例子就

表1：理解導數基模的表徵架構

概念層次	表徵		
	符號	圖形	數量
行動	根據微分公式操弄符號，例如$\frac{d}{dx}x^3=3x^2$	使用程序計算切線斜率或割線斜率	使用程序計算平均變率以獲得數量的結果，例如，使用內差法近似平均變率
過程	能內化並區辨符號$\frac{dy}{dx}$、$f'(x)$及y'的微分過程	對圖形的導數具備逐點(pointwise)的概念，例如，可以從函數圖形估計切線斜率	以數量形式理解和應用變率及微分過程，例如，根據數量形式使用$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
物件	能詮釋並膠囊化符號$\frac{dy}{dx}$、$f'(x)$及y'，例如，給予$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$意義	詮釋導函數圖形為函數的表徵，以實體的方式在圖形上操作，例如，能畫出給定函數圖形的導函數圖形	能詮釋數量形式為表徵連續函數的離散近似，例如，利用$f'(5)$估計$f(5.1)$

描述了學生在建立導數概念基模的可能部分路徑，學生建立導數概念基模的過程就是在矩陣的9個格子裡來回穿梭的過程。另外，由於表徵架構的內容是根據導數概念的基因分解，因此，矩陣架構也並非唯一，可由實徵性的研究或不同的研究目的加以修改、調整。以APOS理論觀點來說，如果學生可以藉由一序列的微分規則成功獲得問題的解答，在沒有獲得其他證據之前，我們不能斷言學生具備導數的行動概念，除非學生能從給定的圖形計算切線斜率且能理解平均變率。以表徵理論觀點來說，學生在符號表徵系統的概念發展層次依序為：能根據微分公式進行微分運算、能詮釋符合中y和x的所代表的意義以及能區辨dy/dx和dx/dy的不同，最後是能賦予$d(dy/dx)/dx$意義，即能理解$d(dy/dx)/dx = d^2y/dx^2$。

參、研究方法

APOS理論在數學教育研究上有兩種取向，第一個取向是在學生已經修習完研究主題的課程後，探究學生的概念理解(Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu, & Vidakovic, 2001; Dubinsky et al., 2005; Trigueros, 2000)。另一種取向是使用APOS理論設計教學活動，然後分析學生建構了哪些構思，還有哪些構思沒有建構(Brown, DeVries, Dubinsky, & Thomas, 1997; Dubinsky & Yiparaki, 2000; McDonald, Mathews, & Strobel, 2000)。兩種取向下研究結果可以用來修正初始的基因分解，以便能真實反應學生建構數學概念的途徑。本研究採用第一種取向，目的在於分析大一工程學生導數概念的基模。

一、研究對象

研究對象的母群體是北部某科技大學電機工程系與電子工程系(各兩班)的236名大一工程學生，因本研究採質性研究，為顧及研究結果的有效性，影響研究對象選擇的因素包括：研究對象的數量要能確保研究的廣度；訪談時間的長度要能確保研究的深度；導數教學結束至訪談結束的期間必須縮短，以避免學生因為個人學習記憶或老師教學策略等因素而影響其表現；研究對象應具備較高之學習成就，能充分書寫問卷及回答訪談問題。因此，研究對象的篩選原則包括：來自於臺北地區的公立高工；微積分平時成績在班上的排序為前10%左右；每位研究對象的訪談時間至少50分鐘、測驗結束後6日完成訪談所需時間及學生可接受訪談時段。依據上述原則選出21名學生，男生16名，女生5名。其中，微積分平時成績係以施測前的三次平時考(極限概念一次及導數概念兩次)成績總和為篩選依據。由於研究對象是平時成績前10%的學生，不能代表母體樣本，縱使這些學生的導數概念理解不足，也無法推論到其他學生，這是本研究之限制。

二、研究工具

測驗試題是由四個微分問題所組成，測驗試題的設計是以先前介紹的導數基模的基因分解做為基礎，並檢驗學生從事表徵處理及表徵變換的能力。測驗試題說明如下：

問題1：距離海平面h呎的高度的溫度為$T = f(h)$度(攝氏)，試回答下列問題：

(a) $0 < h_1 < h_2$，算式$(f(h_2) - f(h_1))/(h_2 - h_1)$代表的意義為何？

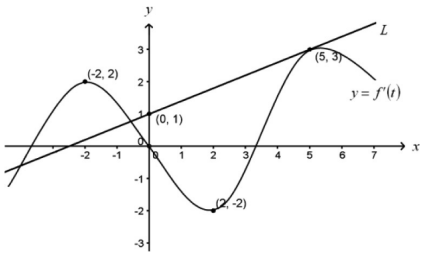
(b)如果已知$f'(1000) = -0.05$，請你估計高度從1,000呎增加到1,001呎時溫度的變化？

問題1(a)是測試學生是否具備數量導數的行動概念；問題1(b)所涉及的導數概念是變化率的數量導數的過程概念，以及符號表徵系統與數量表徵系統之間的變換過程。

問題2：一條曲線的方程式為$f(x)=\sqrt[3]{(x^2+4x)^2}$，求此曲線在$x$ = -1的切線斜率。

問題2的目的是想要瞭解學生從圖形表徵變換到數量表徵的行動概念，學生必須將切線斜率詮釋為數量導數，其中必須透過微分公式計算導函數(符號表徵)。

問題3：直線L是函數$y = f(x)$的圖形在點(5, 3)的切線，如下圖所示。請利用圖形(a)計算$f(5)$的值；(b)計算$f'(5)$的值；(c)估計$f(5.1)$的值。

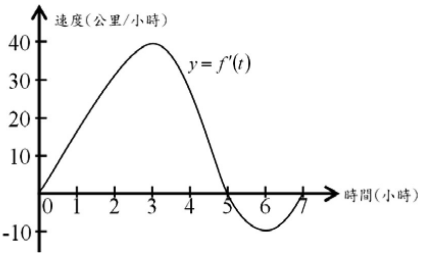


問題3(a)是希望學生能利用函數的圖形表徵處理$f(x)$在x = 5的函數值；問題3(b)探查學生對於函數在某個點的導數和在那個點的切線斜率之間關係的理解，也就是學生是否理解$f'(a)$的值就是通過函數圖形上一點$(a, f(a))$的切線的斜率？在沒有函數的代數式情況下，學生是否能只利用圖形資訊思考並計算導數？問題3(c)是想瞭解學生是否達到數量表徵的物件概念？是否能變換數量表徵導數與圖形表徵？

問題4：下圖是小明開車的速度函數$y = f'(t)$的圖形，請回答下列問題：

(a)畫出小明開車的加速度函數的圖形。

(b)小明在t = 4的瞬時加速度為何？



問題4(a)的目的是希望學生能根據函數圖形畫出其導函數的圖形，涉及符號表徵系統與圖形表徵系統間的表徵變換，也檢驗學生在圖形表徵系統是否已將過程概念膠囊化為物件概念；問題4(b)是想要瞭解學生是否能根據函數圖形計算導數，也檢驗學生在數量表徵系統與圖形表徵系統間的表徵變換。

三、研究步驟

兩系四班學生的數學教師雖然不同，但都使用相同的微積分課本*Thomas' Calculus* (Finney, Weir, & Giordano, 2001)，兩位教師依照課本進行教學。以兩週(6小時)時間進行極限概念的教學及一次平時考，以四週的時間進行導數教學及兩次平時考。導數教學部分，課本以分析的方式定義函數$f(x)$在點$x = a$的導數為$f'(a)=\lim_{h\to 0}((f(a+h)-f(a))/h)$，接著舉一些例題做練習，例如：設$f(x) = x^2 + 1$，利用導數的定義求$f'(1)$；然後討論它的幾何意義是$f(x)$在點$x = a$的切線斜率，最後介紹微分方法(包括基本微分公式、連鎖律、隱微分法等)以及導數的應用。唯一使用的幾何概念是關於差商$f(a + h) – f(a)/h$是通過兩點$(a, f(a))$和$(a + h, f(a + h))$的直線斜率的圖形描述，以及此差商的極限是在點$(a, f(a))$的切線斜率。導數概念教學後第四週(即學期的第10週)進行測驗，要求學生必須書寫解題過程及說明理由，測驗時間為50分鐘。第11週針對21名研究對象進行任務本

位(task based)訪談(Goldin, 2000)，每位學生的訪談時間大約60分鐘至80分鐘，全程錄影及錄音。在進行訪談前，研究者重新閱讀試卷，對學生尚未完全理解的部分做筆記，所獲得的資訊和解題類別提供發展訪談問題的方向，以便對於學生的函數及其導數概念與學生所遭遇的困難獲得進一步的洞察。訪談過程中，研究者先念出題目並提供學生的原始試卷，學生則是先回顧自己的解題過程，然後鼓勵學生描述其想法及解題過程。研究者接著問一些更具體的問題，直到引出學生完整的想法，每一個測驗問題都重覆相同的過程。訪談任務包括：(1)什麼是導數？導數的意義為何；(2)給定某函數的圖形，如何觀察函數在不同點的導數？盡可能精確地畫出導函數的圖形；(3)給定某函數$g(x)$的圖形，盡可能精確地畫出導函數是$g(x)$的函數的圖形等。訪談任務的選擇在於確認受訪談學生的導數概念理解情形在認識導數基模的表徵架構的分布狀況，以做為確認學生導數概念基模層次之依據。

四、資料分析

訪談結束後，所有的試卷及解題原案都經過研究者及另一位數學教育學者獨立地分析，兩人並就分析結果進行協商與討論直到彼此同意。本研究假設從訪談資料透過三合一階段的分析建構學生的導數概念基模，基因分解及認識導數基模的表徵架構用來做為發展明確的準則，來分類學生不同層次的思維。這些準則與學生在解題時所展現討論和思維過程有關，也跟學生在解題時建立不同表徵和性質間的關係的潛能，以及這些關係整合到解釋解題工作的程度有關。

根據上述資料分析，針對學生在九個格子的理解情形做標記，例如，若只能理解「符號—行動」，則在這個格子打上一點；若能分別理解「符號—行動」和「符號—過程」，則以線連接兩個格子。由此確認學生的導數概念理解情形在認識導數基模的表徵架構的分布狀況。資料分析結果可以將21位學生的分布狀況分成三個群組，第一個群組學生的導數基模在表徵架構呈現的是零散的「點」分布，屬於導數基模的內在層次；第二個群組學生的導數概念基模在表徵架構呈現的是「線」分布樣貌，屬於導數概念基模的互相層次；第三個群組學生的導數基模在表徵架構呈現的是「面」分布，屬於導數概念基模的超越層次。

肆、研究結果與討論

根據資料分析結果，21位被訪談的學生可以分成三個群組，每一個群組的學生在基因分解的不同面向呈現概念發展的困難。以下根據不同的層次描述分析結果。

一、呈現導數基模的內在層次

屬於這個群組的學生有7位，他們習得一些計算導數的規則，但無法察覺其間的關係；可以利用記憶的規則解決部分問題；僅能在表徵系統內處理表徵。以表1的表徵架構來描述這個群組學生的導數概念基模，其共同特徵是大多數的學生具備平均變率的概念；在同一個表徵系統裡無法達到物件概念層次，在行動與過程概念層次無法進行三種導數表徵的變換。換句話說，這個群組學生的導數基模在表徵架構呈現的是零散的「點」分布。例如，珮雅對導數概念的認知層次如表2所示，她的導數基模在表徵架構呈現行動—符號、過程—符號及行動—數量零散的「點」分布，她對於導數概念的理解無法在點之間穿梭。

表2：珮雅對導數概念的認知層次

概念層次	表徵		
	符號	圖形	數量
行動	O		O
過程	O		
物件			

珮雅和柏良是這個群組裡的兩個典型代表，本節以他們為例說明屬於內在層次學生的導數概念基模。珮雅能利用差商詮釋$(f(h_2 - f(h_1))/(h_2 - h_1)$代表平均溫度如下：

研究者：說說妳是怎麼想的？
珮雅：題目說高度上升h_2減h_1呎時，溫度會降低$f(h_2)$減$f(h_1)$度，所以這個式子代表兩個高度間的平均溫度。
研究者：可以說是兩個高度間的溫度變化嗎？
珮雅：不一樣
研究者：為什麼？
珮雅：溫度變化是$f(h_2)$減$f(h_1)$。

但有少數學生並不瞭解變化量與變化率之間的差別，認為$(f(h_2 - f(h_1))/(h_2 - h_1)$表示溫度變化，以柏良為例：

研究者：解釋一下你的答案？
柏良：$f(h_1)$是高度h_1的溫度，$f(h_2)$是高度h_2的溫度，就是高度從h_1到h_2的溫度變化。
研究者：那分母$h_2 - h_1$代表什麼？
柏良：高度從h_1到h_2增加$h_2 - h_1$呎。
研究者：兩個相除代表什麼？
柏良：h_1和h_2高度間的溫度變化。

這個群組學生的共同點是只能分別在符號表徵及數量表徵詮釋$f'(a)$的意義，例如珮雅在寫下式子$f(1001) - f(1000)/1$後就不知道該如何計算，也無法詮釋$f'(a)$的意義。

研究者：這個式子代表什麼？
珮雅：高度從1,000呎增加到1,001呎的平均溫度，也就是溫度變化。
研究者：接下來呢？
珮雅：我不知道$f(1001)$和$f(1000)$是多少？
研究者：題目告訴你什麼資訊？
珮雅：題目說已知$f'(1000)$是負0.05。
研究者：這個資訊用得上嗎？
珮雅：應該要用，可是我不知道怎麼用。
研究者：怎麼說？
珮雅：$f'(1000)$要用極限，可是$f(1001)$減$f(1000)$除以1不能用極限來算。
研究者：你知道$f'(1000)$是什麼意思嗎？
珮雅：對$f(x)$微分，然後把1000代進去。
研究者：這是計算方法，我問得是$f'(1000)$的意義。
珮雅：(想了14秒)高度1,000呎的溫度。

珮雅雖無法詮釋$f'(1000)$所代表的意義，但這不會影響珮雅對於$f'(a)$的計算。在給定函數代數式$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 4x)^2}$的情形下，珮雅先將函數寫成次方的形式$f(x) = (x^2 + 4x)^{2/3}$再使用連鎖律進行微分，得到$f'(x) = 2/3(x^2 + 4x)^{-1/3}(2x + 4)$。

研究者：你是怎麼算切線斜率的？
珮雅：微分$f(x)$，然後把-1帶進去。

研究者：為什麼$f'(-1)$是切線斜率？
珮雅：因為算切線斜率就是微分。
研究者：那前一題的$f'(1000)$也是切線斜率嗎？
珮雅：不是。
研究者：為什麼不是？
珮雅：因為題目問的是溫度變化。
研究者：切線斜率和溫度變化不一樣嗎？
珮雅：應該不一樣(然後沉默20秒)，老師有講，可是我忘了。

從珮雅的回應顯示她在給定函數的代數式的情境下，能輕易地將切線斜率轉換為符號導數，使用微分公式計算導數。如此看來，珮雅似乎可以進行表徵系統間的變換，但若給定的是圖形表徵時，她仍是在符號表徵系統裡進行解題。

研究者：好，現在做第2小題。
珮雅：L是直線，要算$f'(5)$的值，那就要微分，我先算這條直線的方程式，上面有兩個點，5減0，3減1，斜率是2/5，代點斜式，y減1等於5分之2乘x。
研究者：嗯！然後呢？
珮雅：微分得到5分之2，所以$f'(5)$等於5分之2。
研究者：如果不計算直線方程式，妳會算$f'(5)$嗎？
珮雅：(想了約8秒鐘)算$f'(5)$就是對$f(x)$微分，然後把5代進去，所以一定要算出直線方程式才能微分。
研究者：那這一題的$f'(5)$和上一題的$f'(-1)$一樣嗎？還是不一樣？
珮雅：(想了約13秒鐘)兩題都是求導數，都要微分，不一樣的是上一題有給方程式，這一題沒有，要自己算。
研究者：妳能不能告訴我什麼是導數？
珮雅：導數就是微分，例如$f(x)$等於x^2，$f'(x)$等於$2x$，$f'(1)$等於2。
研究者：除了微分，導數讓妳想到什麼？
珮雅：(想了約5秒鐘)導數就是切線斜率……，還有極限。

柏良是這個群組學生的另一種代表，他也不清楚導數$f'(1000)$的意義，以為每增加1,000呎，溫度會降低0.05度。

研究者：你這一題是怎麼算的？
柏良：因為題目說升高1,000呎溫度會下降0.05度，所以上升1呎溫度會降低1千分之1乘0.05，等於0.0005度。
研究者：你能不能告訴我$f(1000)$是什麼意思？
柏良：高度1,000呎的溫度。
研究者：那$f'(1000)$是什麼意思？
柏良：f在1000的導數。
研究者：能不能像你剛剛說明$f(1000)$的方式，用溫度來說明$f'(1000)$
柏良：高度1,000呎的……(沉默20秒)，我只知道微分後把1000代進去。
研究者：除了這個之外，導數讓你想到什麼呢？
柏良：導數是切線斜率、瞬時速度(沉默10秒)，還有極限。

研究者：你剛剛所講的這些導數和這一題有什麼關係嗎？

柏良：(想了8秒)這一題講的是溫度，沒有關係。

柏良知道導數可以代表切線斜率和瞬時速度，也和極限有關，但是他完全無法釐清極限、導數和切線斜率三者之間的關係。柏良雖然也可以從函數圖形讀出$f(5)$的值是3，也知道導數是一種極限，但不能理解導數是某種特殊的極限。

研究者：你能不能說明一下你是怎麼算的？

柏良：$2x - 5y + 5 = 0$是切線L的方程式。

研究者：嗯！

柏良：x用5代進去，答案等於3。

研究者：為什麼5代進去得到的值就是答案？

柏良：因為$2x - 5y + 5$是多項式，極限值等於函數值。

研究者：可是題目要你算的是$f'(5)$。

柏良：對啊！導數就是極限值。

研究者：你的意思是導數是極限值也是函數值？

柏良：定義嗎？

研究者：說一下你是怎麼算$f(5.1)$的？

柏良：我剛剛算出$f(5)$等於3，所以$f(5.1)$也是3。

研究者：為什麼？

柏良：極限值存在是3，左右極限存在且相等，$f(5.1)$是右極限，所以也是3。

研究者：為什麼$f(5.1)$是右極限？

柏良：老師在教極限的時候有講過，做表格求極限值，5.1是從5的右邊趨近於5，所以是右極限。

這個群組學生都和珮雅與柏良有著相同的問題，他們使用片段的、不連結的記憶事實來回答問題。沒有證據顯示他們有能力協調導數表徵和導數知識之間的關係，只能在個別的表徵系統進行表徵處理，無法將這些行動概念一般化、抽象化或內化為過程概念，以便於在表徵系統間變換表徵。學生最大的困難來自於無法在行動概念層次的不同表徵系統詮釋$f'(a)$的意義，他們對於導數$f'(a)$停留在行動概念，視為一種運算程序。傳統教學通常是以符號的形式呈現，學生的學習是用操作符號的形式來操作函數，學生並非主動使用其圖形表徵。這個情況證實Kendal與Stacey (2000)所言，教師於教學過程中所強調的表徵會影響學生內在表徵的建構。因此，符號表徵做為導數教學的啟動者的角色似乎值得商確，又哪一種表徵適合用來啟動導數教學？使學生得以發展(或反思)導數概念的支撐，進而有能力協調各種表徵以建構完整的導數概念基模，是值得探究的問題。

二、呈現導數基模的互相層次

總共有12位學生屬於這個群組，他們習得計算導數的規則，開始察覺表徵系統間的關係，並能在部分表徵系統間變換表徵，但是在需要協調這些關係時遇到困難。以表1的表徵架構來描述這個群組學生的導數概念基模，其共同特徵是：在數量表徵系統已接近物件概念層次，在圖形表徵系統已達到過程概念層次，在符號表徵系統已接近或達到過程概念層次；在行動概念層次能進行三種導數表徵的處理與變換，有9位學生能在過程概念層次進行三種導數表徵的處理與變

換。換句話說，這個群組學生的導數基模在表徵架構已呈現「線」的分布樣貌。例如，信宏對導數概念的認知層次如表3所示，他的導數基模在表徵架構已呈現行動—符號、行動—圖形、行動—數量、過程—符號、過程—數量及物件—數量的「線」分布，他對於導數概念的理解已能在兩條垂直線之間自由穿梭。

表3：信宏對導數概念的認知層次

概念層次	表徵		
	符號	圖形	數量
行動	O	O	O
過程	O		O
物件			O

信宏和孟媛是這個群組學生的兩個典型代表，本節以他們為例說明屬於互相層次學生的導數概念基模。信宏在問題1(b)可以清楚地描述導數$f'(1000)$是變化率的意義，而能估算出從1,000呎到1,001呎的溫度變化。

研究者：這一題是怎麼做的？

信宏：f在1000的導數是負0.05，也就是在高度1,000呎時溫度變化率為負0.05。

研究者：然後呢？

信宏：$f(1001)$減$f(1000)$除以1001減1000跟負0.05很接近，所以從1,000呎升高到1,001呎溫度大概下降0.05度。

研究者：為什麼$f(1001)$減$f(1000)$會很接近負0.05？

信宏：因為f在1000的導數是負0.05，可以說是當高度1,000呎時，高度增加1呎，溫度會降低0.05度的意思。

研究者：好，如果題目問得是估計高度從1,000呎增加到1,030呎時的溫度變化，那你會怎麼算？

信宏：(想了10秒鐘)，高度增加太多，如果只利用f在1000的導數是負0.05來算，這樣估計不太準確。

研究者：為什麼？

信宏：因為負0.05是瞬時變率，只有在1,000呎附近才能估計得比較準。

信宏的回答顯示他已經將數量表徵系統的行動概念抽象為過程概念，能理解和應用變率過程。接下來在問題3(b)中，信宏也能理解函數在某個點的導數和在那個點的切線斜率之間的關係，也就是在沒有函數的代數式的情況下，他能利用圖形資訊思考並理解$f'(a)$的值就是通過函數圖形上一點$(a, f(a))$的切線斜率。

研究者：解釋一下你是怎麼做的？

信宏：L是切線，(5, 3)是切點，$f'(5)$是$f(x)$在$x = 5$的導數，也是圖形在$x = 5$的切線斜率，斜率，斜率的話，有兩個點……(喃喃自語) ……5分之2。

研究者：你是怎麼算的？

信宏：L切線通過兩個點(5, 3)和(0, 1)，利用公式算直線的斜率。

研究者：你能不能告訴我，為什麼導數就是切線斜率？

信宏：因為切線是割線的極限，切線斜率是割線斜率的極限，就是導數的定義。

研究者：你認為這一題的$f'(5)$和前面題目的$f'(1000)$有什麼不

一樣？

信宏：基本上是一樣的，都是導數，這一題用來計算切線斜率，前面的$f'(1000)$是用來計算瞬時變率的。

研究者：你的意思是說導數、切線斜率和瞬時變率是一樣的？

信宏：可以這麼說，它本來就有很多意義，看題目問得是什麼。

研究者：除了切線斜率和瞬時變率，聽到或看到導數，你還會想到什麼？

信宏：(思考8秒鐘)應該這麼說，導數是兩個趨近於0的量相除的極限，分子是應變數，分母是自變數。當分子的函數不同，導數就代表不同的意義。

從上述回答可以得知信宏似乎已能透過極限概念膠囊化過程為切線斜率及瞬時變率，由此產生導數的定義，並且能協調$f'(a)$的詮釋如切線斜率與變率等。然而，在問題4，他就無法協調$f'(x)$的詮釋。

研究者：告訴我你是怎麼做的？

信宏：速度微分是加速度，所以我要微分，微分之後才能畫圖。

研究者：嗯！然後呢？

信宏：我要把速度函數算出來再微分。

研究者：喔！怎麼算？

信宏：因為圖形通過(0, 0)、(5, 0)和(7, 0)，所以假設圖形的方程式為$t(t-5)(t-7)$

研究者：然後呢？

信宏：乘開來，$f'(t)$等於t^3-12t^2+35t，微分得到加速度函數$f''(t)$等於$3t^2-24t+35$，是一條拋物線。

研究者：你算出來的速度方程式$t(t-5)(t-7)$是對的嗎？

信宏：(沉默5秒鐘)0代進去，對，5代進去，對，沒錯啊！

研究者：3小時的速度多少？

信宏：3代進去，3乘負2再乘負4，24。

研究者：3小時的速度是24嗎？

信宏：(思考10秒鐘後目光轉至圖形)3小時的速度是40耶！怎麼會這樣！

研究者：速度方程式$t(t-5)(t-7)$是對的嗎？

信宏：不對！

研究者：為什麼不對？

信宏：方程式跟圖形不一致。

研究者：一定要知道速度函數的方程式才能畫加速度函數的圖形嗎？

信宏：有方程式的話比較好畫啊！

研究者：你在前一題也沒有算出方程式，你也可以算出$f'(5)$。

信宏：那一題不用微分，有兩個點我就可以算出切線斜率，也就是導數。而且，我只算一個點，現在要畫圖。

研究者：照你剛剛說的導數是切線斜率，如果不要求畫精確的加速度函數圖形，你可以大概畫一下嗎？

信宏：(想了12秒)t等於0的速度是0，t等於1的速度是16，所以t等於1的加速度是16，t等於2的速度是31，所以t等於2的加速度是31減16除以2減1是15……

然後把這些點連起來，大概這樣。

研究者：31減16除以2減1等於15是t等於2的加速度嗎？

信宏：不是，是平均加速度，但是時間只有一秒鐘而已，可以當作近似值，反正圖形連起來就差不多了。

研究者：好，那你怎麼算t等於4時的瞬時加速度？

信宏：我就是用加速度函數$3t^2 - 24t + 35$，把4代進去，可是我算得加速度函數是錯的。

研究者：嗯，那你現在重新想一想該怎麼做？

信宏：跟剛剛一樣，-13減9除以4減3，答案是-22。

研究者：你能不能用導數符號表示t等於4時的瞬時加速度的？

信宏：$f'(4)$是t等於4的速度，所以$f''(4)$是t等於4的加速度。

研究者：那你剛剛畫的圖形是那一個函數的圖形？

信宏：是加速度函數$f''(t)$的圖形(停頓4秒鐘)，喔！我知道你要問什麼了，我看圖形就知道了，大概負15。

研究者：咦！兩個答案不一樣耶！

信宏：是負15啦，負22只是近似值。

信宏在協調$f'(x)$的詮釋上遇到困難，其中涉及圖形表徵系統內的表徵處理，以及符號表徵系統和圖形表徵系統間的表徵變換。他無法從速度函數$f'(t)$的圖形詮釋加速度函數圖形，而必須透過代數表徵；無法協調$f'(a)$的詮釋如切線斜率為$f'(x)$的詮釋如切線函數。在經過提示之後，信宏雖然開始協調$f'(a)$和$f'(x)$的基模，卻以平均變率取代瞬時變率，未能成功畫出加速度函數圖形(圖1)。縱使信宏可以從圖形察覺不必透過符號表徵計算切線斜率，但對於相似的問題4(b)，卻無法正確地協調。

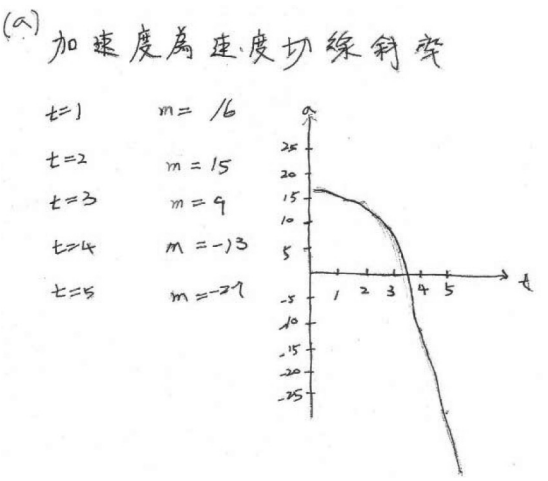


圖1：經過提示後信宏所畫的加速度函數圖形

這個群組的另一類學生與信宏一樣未能從速度函數$f'(x)$的圖形詮釋加速度函數圖形，不同的是他們已經粗具詮釋導函數圖形為函數的表徵，能詮釋切線斜率的符號由正、零、負到正的變化，但是以平均加速度取代瞬時加速度。孟媛是這類型學生的代表，其所畫的加速度函數圖形如圖2所示。

研究者：能不能說明一下你是怎麼想的？

孟媛：加速度是速度的導數，這一題沒有方程式，前面有一題也是這樣，但這一題沒有切線，所以我就算平均加速度。

研究者：妳為什麼計算平均加速度？

孟媛：因為我沒有辦法算瞬時加速度，所以我用平均加速度來算近似值。

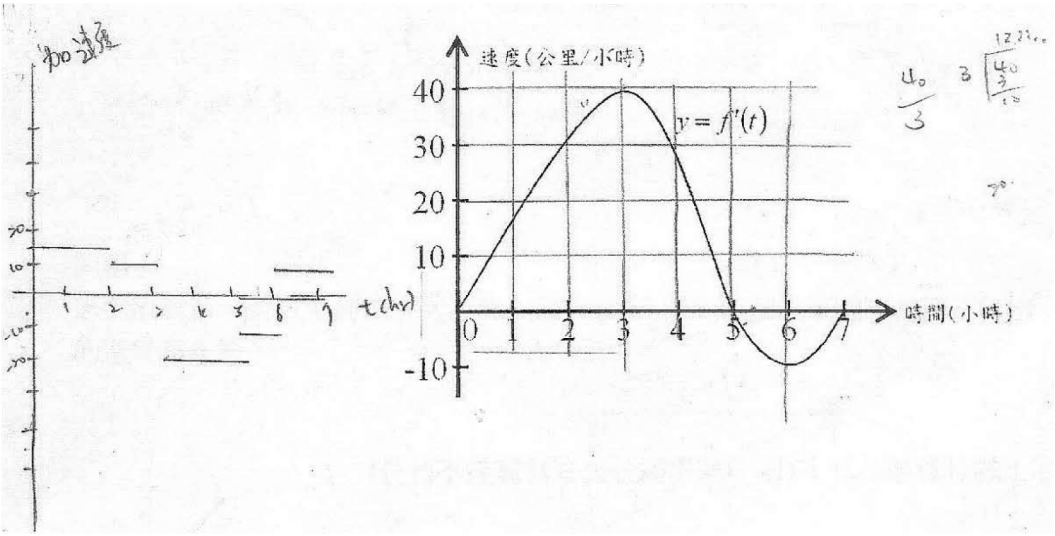


圖2：孟媛所畫的加速度函數圖形

研究者：妳覺得你算得平均加速度和瞬時加速度有多接近？

孟媛：(笑了一聲)很不接近。

研究者：為什麼？

孟媛：時間差越趨近於0就越接近，可是如果這樣算要算很久，所以我算得很不接近。

訪談結果顯示這個群組的學生已經開始協調他們的函數基模和$f'(a)$的意義；他們已經逐漸內化瞬時變率如切線斜率和瞬時加速度的極限過程。他們也已經建構關於他們的行動和導數知識之間的關係，除了可以在個別的表徵系統進行表徵處理，將這些行動一般化、抽象化或內化為過程，也能夠在部分的表徵系統間變換表徵，在不同的表徵系統詮釋$f'(a)$的意義。學生的困難來自於他們對於導數符號$f'(a)$尚未達到物件概念，對於導數基模的認知結構還不穩定，尤其在符號表徵系統和圖形表徵系統間的表徵變換還不能建立穩定的連結。而視覺化(visualization)可以當做是一種表徵之間轉換與連結的工具(Zazkis, Dubinsky, & Dautermann, 1996)，如何促進學生透過視覺化的行動來連結內在構思與表徵是教學設計上須考量的。

這個群組學生在建立導數基模所遭遇的困難可能來自於教學過程中過於強調函數的代數表徵，導致學生對於導數的概念心像發展受到限制，這樣的論點已經有許多研究證實。Leinhardt, Zaslavsky與Stein (1990)等人就認為學生對於函數及其圖形表徵連結的困難，是來自於強調從代數式或表格來建構函數圖形的傳統教學方法，很少提供學生從圖形建構函數的代數式或表格的機會。許多研究都曾討論學生使用圖形詮釋導數所遇到的困難，例如，Amit與Vinner (1990)的研究指出學生將函數的導數與通過函數圖形上給定點的切線方程式畫上等號。Ferrini-Mundy與Graham (1994)也有類似的研究結果，給予學生一個函數的圖形表徵，要求學生畫出其導函數的圖形時，學生仍想要求出此函數的代數式。

學生從函數圖形計算斜率的困難可能來自於無法將逐點的概念膠囊化為詮釋導函數

圖形為函數的表徵，學生只好變換到熟悉的代數表徵，根據函數的代數式計算導函數，然後再依據導函數的代數式畫其圖形，結果是學生無法理解導數是函數的瞬時變率的重要事實。

三、呈現導數基模超越層次

總共有2位學生屬於這個群組，他們習得計算導數的規則，且能察覺其間的關係，並能在表徵系統間變換表徵。以表1的表徵架構來描述這兩位學生的導數概念基模，其共同特徵是：在數量表徵、圖形表徵及符號表徵系統均已接近物件概念層次；在行動及過程概念層次能進行三種導數表徵的處理與變換。換句話說，這個群組學生的導數基模在表徵架構已呈現「面」的樣貌。他們對於導數概念的理解幾乎已能在表1的表徵架構裡自由穿梭。俊凱是此群組學生的代表，在問題3(c)的解題過程，他具備線性近似的概念，能連結數量導數與符號表徵及詮釋$f'(5)$的意義：

研究者：這一題是怎麼算的？

俊凱：在(5, 3)的切線斜率是5分之2，也就是說當x增加一個單位時，y會增加5分之2個單位。

研究者：為什麼你會這樣說？可以說得詳細一點嗎？

俊凱：因為切線斜率是導數。

研究者：可以說得詳細一點嗎？

俊凱：導數是兩個函數值的差除以它們兩個自變數的差，差越來越小趨近於0的極限如果存在，這個極限就稱為導數，代表瞬間變化率，切線斜率只是導數的一個例子而已，函數不同，導數也代表不同的意思，譬如速度和加速度都是。

研究者：好，那為什麼你會說當x增加一個單位時，y會增加5分之2個單位？

俊凱：取極限的話是5分之2，意思是說在那一瞬間，當x增加一個單位時，y會增加5分之2個單位。沒有取極限而且在附近的話，那就可以用來估計近似值。

研究者：嗯！然後呢？

俊凱：現在題目說x增加0.1個單位，所以y增加0.04個單位，3加0.04等於3.04。

俊凱不僅能詮釋$f'(5)$的意義，更協調了函數基模和$f'(5)$的詮釋，進而詮釋$f'(x)$的意義。在問題4(a)能根據速度函數圖形及透過切線斜率的變化情形畫出加速度函數的圖形(圖3)。

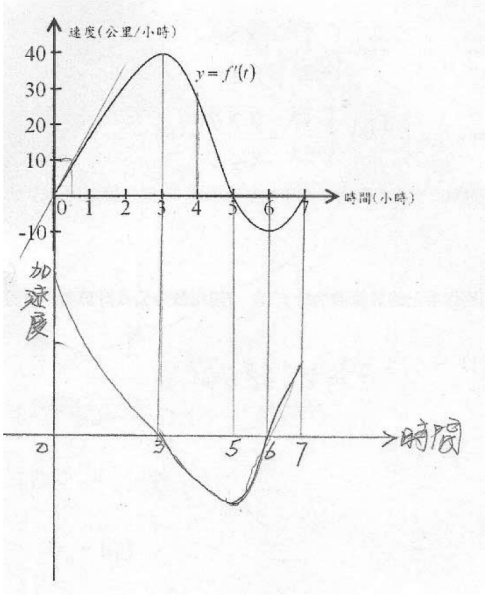


圖3：俊凱所畫的加速度函數圖形

研究者：你在畫加速度函數時，你是怎麼想的？

俊凱：我拿尺來畫切線

研究者：為什麼要畫切線？

俊凱：速度微分就是加速度

研究者：嗯，速度微分就是加速度，可是你沒有微分啊，你是畫切線。

俊凱：對啊，微分的結果就是算切線斜率。

研究者：好，然後呢？

俊凱：我看切線斜率怎麼變化，加速度就怎麼變化。

研究者：好，那你怎麼畫出加速度函數的圖形。

俊凱：你看，切線越來越平(拿著尺沿著曲線畫切線)，然後斜率變成0，然後變成負的，而且越來越陡，通過它(指的是點(0, 5))之後又越來越平，變成0，然後斜率又越來越大。

研究者：嗯，速度函數從原點開始，你的加速度函數不是從原點開始，為什麼？

俊凱：因為函數圖形在原點的切線斜率不是0是正的。

研究者：為什麼3小時的時候速度變成0？

俊凱：因為切線變成水平線，切線斜率為0，所以加速度是0。

研究者：好，下一題，告訴我你怎麼算t等於4時的瞬時加速度？

俊凱：因為題目問物體在$t = 4$的瞬時速度，計算瞬時速度就是計算導數就是切線斜率。

研究者：好，那你怎麼算切線斜率？

俊凱：我畫一條通過(4, 30)的切線，這條切線大概會通過點(5.4, 0)，然後計算通過這兩點的直線斜率是負21.4，所以物體在$t = 4$的瞬時加速度是每小時負21.4公里

研究者：為什麼是負的？

俊凱：因為速度越來越小，所以加速度是負的。

研究者：你為什麼會想要畫切線？

俊凱：如果我知道速度函數的方程式，我就可以對方程式微分來算，這一題沒有方程式，只能用切線斜率，就好像前面有一題就是利用切線斜率算導數，那一題有給切線，這一題沒有，沒有就自己畫。但是算出來的負21.4可能只是近似值，因為切線和x軸的交點座標是我估計的，不過我覺得我估得蠻準的。

俊凱清楚地描述導數$f'(a)$的過程概念，並且膠囊化為物件後，於此物件上進行連續的表徵處理與表徵變換。這個群組的兩位學生與其他群組學生最大的不同之處在於他們有能力在表徵系統內進行表徵處理，也能在不同的表徵系統間從事表徵變換，而此能力可能與視覺化有關。Goldin (1998, 2002)、Gutiérrez (1996)、Hitt (1998)、van Nes與de Lange (2007)都強調表徵、數學視覺化與概念理解之間的關係，Dreyfus (1991)認為學生在一個表徵之所「見」會連結到他們的概念結構，進而主張視覺化應該被視為一種學習工具。

伍、結論與建議

本研究的目的是探究大一工程學生的

導數概念基模，研究結果證實學生對於導數概念的理解涉及一個基模的建立。在內在階段，學生記憶一些微分公式及知道導數是切線斜率，無法建構關於他們的行動和導數知識之間的關係，只能在個別的表徵系統進行表徵處理，無法將這些行動一般化、抽象化或內化為過程，導致缺乏表徵系統間變換表徵的能力。多數的學生屬於互相階段，他們習得計算導數的規則，開始察覺其間的關係，並能在部分表徵系統間變換表徵。這些學生的困難來自於傾向分析式的思維而不是視覺式的思維，例如，對於函數圖形必須藉助方程式才能進行數學思維，不會努力去將問題視覺化，導致這些學生的導數基模發展只是片面性的。僅有兩位學生隸屬於超越階段，學生習得計算導數的規則，且能察覺其間的關係，並具備視覺化的能力進而能協調函數基模、極限概念及導數的各種表徵。另一方面，從資料分析結果發現，學生無法在理解導數基模的表徵架構中自由穿梭的主要障礙是數量導數及圖形導數的過程概念。因此，導數概念教學應該協助學生從內在階段橋接互相階段及從互相階段橋接超越階段，使學生得以協調函數概念等基模發展導數基模。

本研究所設計的測驗工具是以導數概念的基因分解為基礎，從資料分析結果來看，本研究的導數概念基因分解是適當的，但這並不表示這個基因分解提供了導數基模如何發展的確切答案。基因分解是研究者分析學生導數概念理解的工具，而訪談資料提供具代表性的例子證實學生在導數基模發展的三合一階段的數學思維。未來的研究可以本研究架構為基礎，重新擬定基因分解、設計測驗工具及蒐集資料，以進一步探究什麼樣的教學活動可以促進學生在三合一階段的移動。其他的研究亦可以探究此架構如何推廣到其他的數學概念如連鎖率及積分的基模發展，以豐富微積分教學。

從理論的觀點，APOS理論與表徵理論的理論架構是有用的且是互補的，讓研究者可以從兩個不同但互補的觀點檢視同一現象。一方面，APOS理論可以用來確定學生能夠在表徵系統內和表徵系統間進行表徵轉所必要的構思；另一方面，藉由學生在表徵系統的轉換方式的分析，提供學生已經建立的導數基模的成分間的關係，以及單獨使用APOS理論難以釐清的視覺化能力。另外，表徵轉換在APOS理論可以用來描述不同物件在同一基模內的關係，或是不同表徵系統的物件、過程或行動之間的關係。

從教學的觀點，既然數量導數的過程概念及圖形導數的過程概念居導數基模的樞紐位置，數量導數應是導數概念教學適當的切入點，在正式介紹導數的定義及微分公式之前，應該強調數量表徵與圖形表徵的處理與變換。最後，根據研究結果提出導數概念教學建議。例如，先討論離散情境的變率，以數量表徵呈現平均變率和變率；再探討連續情境的變率，強調數量導數與圖形導數之間的互相轉換；再由此定義出切線及切線斜率的計算程序；最後以斜率(變率)為例，正式介紹導數的定義與符號。期望本研究結果能有助於導數概念的教學設計，並能協助大一學生理解導數概念。

誌謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會經費補助(NSC97-2511-S-131-004-MY3, NSC99-2511-S-131-001-MY3)，特此致謝。

參考文獻

1. Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in calculus – Anecdotes or the

tip of an iceberg. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-10). Mexico City, Mexico: PME.

2. Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II* (pp. 1-32). Washington, DC: American Mathematical Society.
3. Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.
4. Aspinwall, L., & Miller, D. (1997). Students' positive reliance on writing as a process to learn first semester calculus. *Journal of Instructional Psychology*, *24*(4), 253-261.
5. Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.
6. Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495.
7. Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(3), 389-399.
8. Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 187-239.
9. Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-346). Rotterdam, The Netherlands: Sense.
10. Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.
11. Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area: In students and in history. *The College Mathematics Journal*, *32*(2), 99-109.
12. Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33-48). Genova, Italy: Universita de Genova.
13. Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
14. Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1.

Educational Studies in Mathematics, *58*(3), 335-359.

15. Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 239-289). Providence, RI: American Mathematical Society.
16. Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Conference of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-26). Cuernavaca, Mexico: PME-NA.
17. Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.
18. Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.
19. Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. G. (1993). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. In J. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 31-46). Washington, DC: Mathematical Association of America.
20. Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In J. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 31-45). Washington, DC: Mathematical Association of America.
21. Finney, R., Weir, M., & Giordano, F. (2001). *Thomas's calculus*. New York: Addison-Wesley.
22. Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.
23. Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured task – Based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
24. Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
25. Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (pp. 1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
26. Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group*

for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 65-72). Utrecht, The Netherlands: PME.

27. Greer, B., & Harel, G. (1998). The role of isomorphisms in mathematical cognition. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 5-24.
28. Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, Spain: Universidad de Valencia.
29. Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, A., & Presmeg, N. (2009). Visual and analytic thinking in calculus. *Mathematics Teacher*, *103*(2), 140-145.
30. Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics education: Past, present and future* (pp. 147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense.
31. Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
32. Hitt, F. (1998). Working group on representations and mathematics visualization. In S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, & W. Columbe (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 241-262). Columbus, OH: ERIC.
33. Hong, Y. Y., Thomas, M. O. J., & Kwon, O.-N. (2000). Understanding linear algebraic equations via super-calculator representations. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 57-64). Hiroshima, Japan: Program Committee.
34. Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
35. Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
36. Kendal, M., & Stacey, K. (2000). Acquiring the concept of derivative: Teaching and learning with multiple representations and CAS. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 127-134). Hiroshima, Japan: Program Committee.
37. Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64.
38. Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and

problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

39. McDonald, M. A., Mathews, D. M., & Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 77-102). Washington, DC: Mathematical Association of America.
40. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
41. Piaget, J., & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press. (Original work published 1983)
42. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.
43. Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. In C. Gaulin, B. R. Hodgson, D. H. Wheeler, & J. Egsgard (Eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 13-28). Québec, Canada: Universite Laval.
44. Trigueros, M. (2000). Students' conception of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. In M. L. Fernandez (Ed.), *Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 93-97). Columbus, OH: ERIC.
45. Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.
46. van Nes, F., & de Lange, J. (2007). Mathematics education and neurosciences: Relating spatial structures to the development of spatial sense and number sense. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *4*(2), 210-229.
47. Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 435-457.

科學教育學刊
2011, 第十九卷第六期, 483-506

Chinese Journal of Science Education
2011, 19(6), 483-506

An Investigation of Engineering Students' Conceptual Understanding of Derivative

Chih-Hsien Huang

Department of Electrical Engineering, Ming Chi University of Technology

Abstract

The present study began as an attempt to explore engineering students' understanding of the concept of derivative. Based on the initial description of how the concept of derivative may be learned (genetic decomposition) an attempt was made to interpret the data using the Action-Process-Object theoretical framework. The insufficiency of this framework alone, led to extending it to the Action-Process-Object-Schema (APOS) epistemological framework which includes a theory of schema development based on ideas of Piaget and Garcia. The Piagetian Triad is suggested as a mechanism for describing schema development in general, and the derivative is used as an example. The Triad of the Intra, Inter and Trans stages of schema development provides the structure for interpreting students' understanding of the derivative and classifying their responses to interview questions about the derivative. The results of this data analysis allowed for a proposed revised epistemological analysis of the derivative. Finally, several suggestions and questions for future study are presented.

Key words: Engineering Students, Action-Process-Object-Schema (APOS), Representation, Derivative