科學教育學刊
2012, 第二十卷第一期, 23-39

Chinese Journal of Science Education
2012, 20(1), 23-39

小美在數線上關於分數基準化問題的解題表現

劉祥通*　康淑娟

國立嘉義大學　數理教育研究所

(投稿日期：民國100年5月10日，修訂日期：民國101年1月19日，接受日期：民國101年2月23日)

摘要：本研究是個案研究，個案小美是一位小六學生，在校的數學成績還不錯，且程序性知識頗為完備，但是對於解較難或課外的數學問題卻是沒有信心，因此，研究者以非例行性分數問題作為研究主要施測工具，例如以工作單為基準量不是1，而尋找分數落點的問題，來瞭解小美的解題表現，並藉助結構式工作單的晤談法進行資料蒐集。研究者特別從個案作圖時的下筆順序，以觀察她的解題行為，而綜合討論則從資源、捷思、監控與信念系統四個向度來分析小美的解題表現。主要發現有：(1)資源：擁有完備的工具性理解，但關係性理解不夠，(2)捷思：未能利用等值關係與新單位量以發展解題策略，(3)監控：解基準量是分數的問題時，未對計畫與決策的大方向有監控的表現，(4)信念系統：忽視了已存在的隱藏約定，屢次有自行設定單位長的想法。

關鍵詞：分數問題、數線問題、數學解題

壹、研究背景與目的

在國小階段，有關分數在數線上的問題，大都是基準量為1的情境，倘若今天不是給定0與1，而是給定0與2、0與3，以基準量為2、3的情境，或甚是非整數(分數)的情境，學生的表現又是如何？Kerslake (1986)的研究指出，當數線為一個單位長(基準量1)時，學生解題較容易成功；而數線為2個單位長(基準量2)時，有些學生解題就有困難了。再者，劉祥通(2007)的研究也指出，當以集聚單位為基準量的問題考驗學生時，學生基準化能力的完整與否也是影響解測度問題的關鍵。

由此可知，等分與部分——整體構念雖是提供分數概念的基礎之一(Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983)，但基準化的能力更是解分數測度構念問題的關鍵(劉祥通，2007)。因此，研究者欲探討小美在數線上關於分數基準化問題的解題表現，尤其是解題時使用哪些資源、捷思、監控與信念系統。

*通訊作者：劉祥通

05-劉祥通.indd 23　2012/3/21 上午 11:08:41

貳、文獻探討

為了回應上述研究問題，文獻探討分為單位量與數線上的點、分數測度構念、單位化與基準化、工具性理解、關係性理解與分數的表徵，以及數學解題與分析作介紹，以下分別敘述之：

一、單位量與數線上的點

單位量在數與量概念中佔有很重要的地位。Euclid的論述強調：「本質上單位是指存在而被稱為『一』的事物」(A unit is that by virtue of which each of the things that exists is called one)；「一個數是由多個單位量構成的組合」(A number is a multitude composed of units；引自Steffe, von Glasersfeld, Richards, & Cobb, 1983)。而Norton與McCloskey (2008)以及McCloskey與Norton (2009)認為單位量即是將一個物件或一個集合視為一個初始單位或是一個整體。因此換言之，單位量即為度量的標準，表示以某一量為基本單位，可能以「1」為一個基本單位，亦可能以非1為一個基本單位，例如一個大於1的數或分數等等為基本單位。

此外，Lamon (1999)的論述提到，當學生分割一單位長時，有一個顯而易見的障礙就是學生無法精確地完成分割。再者，劉祥通(2007)的研究也指出，有大多數的學生在數線上採取「約估法」以逐點描繪的方式，卻不會使用「參考點」作圖，而從學生的觀點而言，他們雖然有「部分與整體」之間的關係，卻缺乏判斷「部分與部分」之間是否相同或是否依比例合理分配的概念，以致於造成解題上的誤差。由此可知，單位量在分數概念上佔有相當重要的地位，此外，等分與否的認知也是影響學生分數概念的因素。

二、單位化與基準化(norming)

Lamon (1996)的論述指出，所謂的「單位化」，是採取適當的測量單位至指定量的一種認知指派(cognitive assignment)，至於選用何種測量單位，則需要考慮指定物的性質。在單位化的過程當中，學童要進階到以單位分量及非單位分量為基本單位量進行運算。以$\frac{3}{4}$為例，我們可以視為3個$\frac{1}{4}$，也就是將$\frac{1}{4}$單位化，形成一個新的單位；亦可視為1個$\frac{3}{4}$，將$\frac{3}{4}$單位化成一個新的單位。

Saenz-Ludlow (1994)的論述指出，兒童能否找到適當的單位，將指定的部分量分盡，再利用這個單位重組成全部或集合，這種能力即為單位化(unitizing)能力，此能力是兒童能否解決分數問題的關鍵。而單位化能力的養成與撕裂(splitting)活動有密切的關係，撕裂活動同時由分割與疊代(iterating)活動所組成，而撕裂活動數值化的結果則是單位分數。例如，如何找出一線段的$\frac{1}{5}$，則需要：(一)有分的動作；(二)每一等分要相等；(三)要將全部分完。而試圖獲得線段的$\frac{1}{5}$是「分割」的動作；將5個$\frac{1}{5}$的線段拼湊成原線段則是「疊代」的動作(McCloskey & Norton, 2009; Norton & McCloskey, 2008)。

Lehrer, Jaslow與Curtis (2003)主張分割長度(partitioning lengths)的活動是分數乘法學習的自然情境(natural context)，例如一段紙帶對折再3等分的活動可以對應$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$的分數乘法，又折疊一段紙帶的$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{2}$，此活動與$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$的分數乘法符號相對應，再者，疊代活動與分數乘法相對應，例如$\frac{1}{8}$疊代11次即為$\frac{11}{8}$，Lehrer等也強調以上具體活動的方法對兒童的學習更有意義。

而「基準化」就Lamon (1990)的觀點

即認為集聚單位一旦建立後，用此集聚單位以重新詮釋新的數量情境的過程。例如Freudenthal (1983)所說的「把地球的直徑大小想像成毫米(1mm)，那麼太陽的大小則為一個直徑10公分，且與地球距離為10公尺的球體」。Lamon (2001)的論述指出，測度構念的掌握是要能根據給定的單位量做出相對量大小的能力。

再者，研究者認為基準量則常運用於比較另一量的「基準化」過程中，如以數線上的「$\frac{4}{3}$」位置為基準，找出比較量「$\frac{11}{6}$」位置，而其中的「$\frac{4}{3}$」長度或大小稱為「基準量」。

三、工具性理解、關係性理解與分數的表徵

近年，Skemp (2006)強調二種數學理解，一是工具性的理解(instrumental understanding)，二是關係性的理解(relational understanding)。

工具性的理解相當於程序性知識，而關係性的理解相當於概念性知識。Skemp (2006)以$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$為例，學生能計算出$\frac{8}{15}$是屬於工具性理解，而能瞭解$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$的意義是$\frac{4}{5}$的$\frac{2}{3}$，則屬於關係性理解。研究者認為一旦有了關係性理解就容易從$\frac{4}{5}$找出$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$的位置，也就是關係性理論有助於分數關係位置的表徵。

研究者以$\frac{11}{6} \div \frac{4}{3}$為例，學生會計算$\frac{11}{6} \div \frac{4}{3} = \frac{11}{6} \div \frac{8}{6} = 1\frac{3}{8}$，此乃程序性知識，也稱為工具性理解，但要知道以$\frac{4}{3}$當做基準量(1)，比較量$\frac{11}{6}$就變成$1\frac{3}{8}$，熟悉這種知識是關係性理解。關於給定$\frac{4}{3}$座標位置以找$\frac{11}{6}$位置的問題，學生能將$\frac{4}{3}$化成$\frac{8}{6}$，以$\frac{1}{6}$為公共測量單位(common measurement unit；國立編譯館，2000)，比較$\frac{11}{6}$與$\frac{8}{6}$，而在$\frac{8}{6}$右邊3個$\frac{1}{6}$找到$\frac{11}{6}$的位置，研究者認為擁有這種分數表徵能力又是更高層次的能力。

Mayer (1985)強調為了表徵一個問題，一個學生必須能夠將所有問題的元素(elements)整合成一個連貫的整體(coherent whole)。再者，Dufour-Janvier, Bednarz與Belanger (1987)認為表徵是一個概念的具體化。根據以上兩篇文獻的論述，研究者認為學生在數線上的表徵能力可以說是解題表現的重要指標。而在本文的解題表現其實就是看學生在數線上的表徵能力。

四、數學解題與分析

什麼是問題解決(problem solving)？簡稱為解題，依照美國數學督學學會(Carl, 1989)的立場文獻主張，解題是一種歷程，利用先前已獲得的知識以解決新的或不熟悉情境的歷程。而Barba (1990)對解題的定義是，目標待獲取，但直接的途徑是暫時被封鎖的一種情境的歷程。

而數學解題是一種組合，可以用來溝通數學想法，也是一個情境用來調查關係，以及一種觸媒用來連接數學概念與技巧(Cambell & Bamberger, 1990)。正如Barba (1990)所強調，數學解題是一種多面向的構念(a multifaceted construct)，它與吾人思考問題的方式以及學習問題的方式有關。

Polya (1957)提出數學解題的四個階段：理解題意、制定解題策略、執行解題策略、與回顧，上述四個階段不但幫助數學教育學者瞭解解題的本質，也幫助數學教師協助學生提升學生的解題能力。

關於Polya (1957)的解題歷程中回顧答

案的合理性，研究者認為是一種後設監控的行為，這種行為並不一定是在完成解答之後才有，而是在制定解題計畫與執行解題計畫的過程中一直存在著，它不是外顯的行為。再者，解題者解題也未必有驗算等動作以回顧答案的合理性，常常俟研究者追問「你怎麼知道你的答案是正確的？」，這時解題者才回顧解題策略，若是解題者能採取其他策略或解題途徑以證實答案的正確性，表示此解題者有良好的監控能力。

Mayer (1992)從問題解決和認知心理學的觀點，指出解題的過程包含兩個步驟，問題表徵(problem representation)與問題解答(problem solution)，而問題表徵細分成問題轉譯(problem translation)與問題整合(problem integration)；問題解答又細分成解答的計畫與監控(solution planning and monitoring)與解答的執行(solution execution)。

Mayer (1992)又主張問題轉譯是語意知識(semantic knowledge)，問題整合是基模知識(schematic knowledge)，而解答的計畫與監控是策略知識(strategic knowledge)。Mayer把問題整合界定為基模知識，而在說明基模知識時，以面積公式為例。但研究者認為Mayer所說的基模知識(面積公式)比較像先備知識，反而失去了問題整合的意涵，再者，Mayer把解答的計畫與監控並置在一起，對於研究分析者分析解題實難以區辨。

Schoenfeld (1985)的分析架構，選取以下四點作為解析個案解題表現的主要方向：

(一) 資源(resources)：解題者擁有有效地把手頭上的問題解決的知識，包括直觀與非正式知識、演算法程序與理解進行工作的相關商定的規則。

(二) 捷思(heuristics)：解題者解非例行性問題所利用的策略與技巧，包含所畫的圖、所利用的相關問題與所重新形成的問題(reformulating problems)。

(三) 監控(control)：關於資源與捷思的選擇(selection)與執行(implementation)的整體決定(global decisions)，包含計畫、監控、決策的評估與有意識的後設認知行為。

(四) 信念系統(belief system)：解題者對數學世界的看法，其決定性的因素，包含關於自己、關於環境、關於題材與關於數學等決定個體的解題行為。

研究者認為Schoenfeld (1985)的分析架構，簡言之，資源可以看成解題者的先備知識，捷思可以說是解題者在解題過程中利用先備知識所發展的策略，而解題者的信念系統當然會影響其解題行為，但是，信念系統的範圍很廣，包括對自己的信心，對數學的情意等等，單單分析幾個數學的解題行為不易獲得真正的解題者信念系統，只是瞭解信念系統的一小部分。

參、研究方法

本研究屬於個案研究，研究者為了瞭解小美對於不同問題的解題表現，研究者是先根據研究問題設計結構化的工作單(structured task)，此工作單提供結構式的問題給學生解題，待學生完成工作單後，再以學生的解題表現與落筆順序做為訪談的素材。此種方法的特色是探索的工作單問題是結構的，訪談的問題卻是依照學生的解題表現與解釋的想法而調整。此研究方法稱為結構式工作單晤談法(structured, task-based interviews)，此方法的訪談，可以依照四個步驟進行(Goldin, 2000)：

一、提出非引導式的提問(nondirective follow-up questions)，例如，可以講詳細一點嗎？

二、當非自發性的反應出現時，給予最小的

建議(minimal heuristic suggestions)，例如，可以用一些物體展現嗎？

三、當預期性的行為沒有發生時，給予引導式的建議(the guided use of heuristic suggestions)，例如，你有發現一些規律嗎？

四、給予解釋性或後設性的提問(exploratory, metacognitive questions)，例如，你能解釋如何想出這個問題嗎？

如果受訪者能正確回應第一步驟的提問，二、三步驟的提問就可以省略，而第四個步驟的問題有檢驗受訪者是否「知其所以然」的功用，訪談時多次使用它。

一、研究對象

參與本研究的個案小美(化名)，喜好閱讀文學，並有著很好的寫作能力，在校數學成績非常好，且對於解工作單問題所需具備的程序性知識的建立頗為完備，她能利用約分、擴分做分數加減與乘法運算以及瞭解分數的倍數關係，不過，她受訪時坦承對數學沒有自信。數學成績好但對數學沒有信心的學生是很多的，小美屬於這類型的學生，是具有代表性的，而且研究者發現到小美個性活潑開朗，與研究者有很好的互動關係，不僅表達能力好，亦敢於發問。因此，本文透過小美這個個案的研究可以提供豐富的資料以做為解釋(interpretation)之用，也可以達到我們瞭解的最大化(maximize what we can learn; Stake, 1995)。因此，研究者試著想瞭解小美能否將以上先備知識遷移並應用到數線上的問題解決。

二、研究者

為了瞭解小美解題時的自發性想法，在小美對解題做圖形表徵時，研究者提醒她盡量精準的標示其解題想法以及不得使用直尺作圖，但她能否畫精確，不是研究的真正目的，而是研究的手段，期望藉由她作圖的方法與順序，以判斷她能否利用先備知識以解題，而測度概念是抽象的，小美在不得使用直尺的情況下，她解題(作圖)的表現將有助於研究者瞭解她對分數基準化問題的掌握。當小美解題正確時，研究者會根據其自發性的解法問她「為什麼？」以促動她思考並表達出自己的想法，並關注下列幾個問題：小美利用了何種數學知識？如何使用它以發展解題策略？解題時是否展現監控的行為？是否有判斷答案合理性的監控行為？是否可以窺見數學信念系統的一部分？

三、工作單問題

為了要探討小美基準化的能力，在問題的設計上，研究者刻意在數線上將每一種問題情境的基準量大小控制等長，期望小美能夠根據給定的基準量找出相對量的位置。

工作單結構與說明如表1。

表1：工作單結構

題號	工作單題目	尋找比較量的落點
1	以1基準量	$\frac{7}{6}$
2	以2基準量	$\frac{11}{8}$
3	以2基準量	$\frac{13}{6}$
4	以3基準量	$\frac{16}{9}$
5	以$\frac{4}{3}$基準量	$\frac{11}{6}$
6	以$\frac{3}{4}$基準量	$\frac{5}{6}$

註：工作單的題目先以整數1、2、3為基準量，接著，題5以分數$\frac{4}{3}$為基準量找比較量$\frac{11}{6}$，而題6基準量$\frac{3}{4}$與比較量$\frac{5}{6}$，此二個分數是不為倍數關係的兩個異分母的分數，可能對小美是最大的挑戰。

四、資料蒐集與分析

(一)資料蒐集

研究者用工作單的解題紀錄、畫圖表徵、訪談錄音與錄影以收集小美自發性解題表現，詳細資料蒐集說明如下：

1. 為了要瞭解小美的先備知識，研究者先進行20分鐘的先備知識測驗：

   先備知識測驗：計20分鐘

   例如求解：(1) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$，(2) $\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\times\square$，(3) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，(4) $\frac{16}{9}=\square$(請化成帶分數)，(5) $\frac{11}{6}\div\frac{4}{3}$，(6) $5\frac{5}{6}\div\frac{3}{4}$

2. 工作單問題資料蒐集說明：
   (1) 解1-4題(基準量是整數，比較量是分數)，解完一題，依據解題行為進行訪談，再繼續解下一題，再訪談，共計2小時。
   (2) 解5-6題(基準量為分數，比較量是分數)，先解第5題，依序解題、訪談、提問、檢驗成果。第6題也是同樣依此順序，共計2小時。

(二)資料分析

研究者以工作單解題表現與訪談的內容作為資料來源。工作單的解題表現，主要是呈現小美的自發性解題為何。為了更清楚瞭解小美的真正想法，研究者再針對她的自發性解題，進行深入的訪談。

由於工作單題目都是告知基準量的位置，要求小美標示出比較量的位置，題意明確，比較沒有理解題意的問題，又小美在尋找單位量以及比較量的過程中，往往可以看到她的先備知識、策略、監控與直觀的信念系統，因此採用Schoenfeld (1985)資源、捷思、監控與信念系統的分析架構。

而分析面向可分為，資源：探討有關先備的分數工具性知識與關係性知識。捷思：探討能否利用資源發展成策略。監控：探討標示圖形時，能否按比例關係精準標示出位置與是否有判斷位置合理性的表現。信念系統：探討解題行為是否出現對數學題材或對自己信心與能力的隱藏的認知。

為了增進資料詮釋的信度，除了基於已有的經驗所衍生的假設必須和錄音與錄影記錄加以辯證之外，採取「類型比對」(pattern-matching; Yin, 2003, p. 116)，持續考驗小美以去除單一事件(event)的過度闡釋，也藉此加強內在效度(Yin)。如問題1、2、3和4，同樣基準量都是整數，尋找比較量為分數的問題；問題5與6，同樣都是基準量為分數，比較量也是分數的問題，只是問題5基準量與比較量的分母不同，因此難度更高。

肆、研究結果與討論

結果與討論共分兩部分，一、基準量是整數的1-4題的結果與討論；二、基準量是分數的5-6題的結果與討論，包含提問與提問後的解題表現分析，依序分述如下。

一、基準量是整數的1-4題的結果與討論

從下筆順序可以更瞭解小美的解題想法，茲建表2以方便讀者閱讀。

表2：小美1-4題作圖的下筆順序

題號	基準量	比較量	下筆順序
1	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}, 1\frac{1}{6}$
2	2	$\frac{11}{8}$	$1, \frac{1}{8}, 1\frac{3}{8}$
3	2	$\frac{13}{6}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 2\frac{1}{6}$
4	3	$\frac{16}{9}$	$1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, 2-\frac{2}{9}$

題一，對於基準量為1而求$\frac{7}{6}$的位置，小美表示「$\frac{7}{6}$的位置會比1多一點。如果將前面的平均分配一下，分成6分，就可以找到大概的位置。」(圖1)，因此研究者進一步提問「你可以說出$\frac{7}{6}$正確一點的位置嗎？」，小美：「嗯，我也不知道耶，就大概而已。」由此，研究者判斷小美未能將各分數之間關係的先備知識應用於數線的作圖上，小美尋找$\frac{1}{6}$的位置時，只有「分割」的動作，並未有「疊代」的動作，因此從其作圖的行為與說明來看，只是「約估」的行為。

題二，本題為基準量2的問題，根據小美的作圖(圖2)前後的$\frac{3}{8}$距離並不相等，小美作圖當下可能認為$\frac{3}{8}$只要是8「分」中的3分即可，還未意識到$\frac{3}{8}$應是8「等分」中的3分，也有可能是未發揮監控能力。因此研究者提問1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{8}$的相互關係，藉以判斷小美是否擁有這些知識，依據小美的回答「$\frac{1}{8}$和$\frac{1}{2}$的關係，就是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$；$\frac{1}{2}$的一半是$\frac{1}{4}$；$\frac{1}{4}$的一半是$\frac{1}{8}$。」可以發現她瞭解並擁有這些作圖的必備知識(**資源**)，但並未將此知識運用在作圖上而發展出解題方法(例如折半法，**捷思**)，以畫出較精確的位置。且小美也未發揮後設**監控**的能力，以致於前後的3 8 距離明顯不相等(**監控**)。

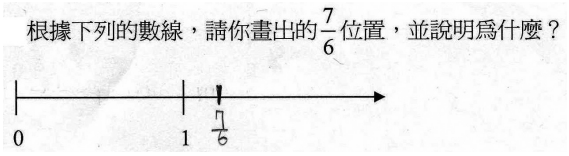

圖1：小美的初始解題

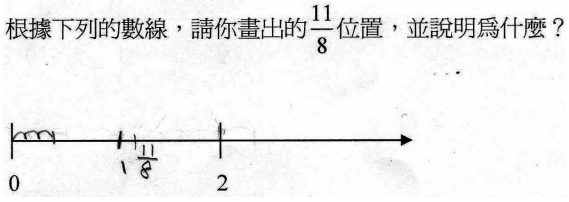

圖2：小美的初始解題

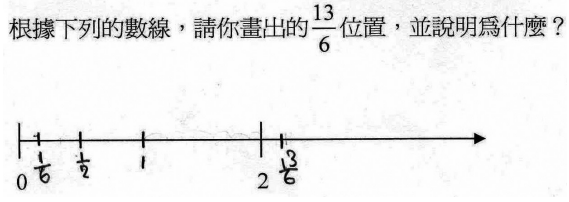

圖3：小美的初始解題

根據Chazan與Ball (1999)的研究發現，在8等分一個單位長的情境下，給一個七年級學生，請他標示7個等分點的位置，結果學生把第一個點標示成是$\frac{1}{7}$，然後依序$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{4}{7}$……$\frac{7}{7}$(應是$\frac{1}{8}$、$\frac{2}{8}$……$\frac{7}{8}$)，特別要強調的是，她的第4個點是$\frac{4}{7}$，第7個點是$\frac{7}{7}$，造成了$\frac{4}{7}$標示在$\frac{1}{2}$的位置上，$\frac{7}{7}$標示在1的左邊。此個案也一樣未發揮監控能力以察覺「$\frac{4}{7}\neq\frac{1}{2}$，以及$\frac{7}{7}$的位置應是在1的位置」。此研究結果與本文的研究結果相似。

題三，由小美提到「1的一半$\frac{1}{2}$啊，將$\frac{1}{2}$三等分會有三分，就可以找到$\frac{1}{6}$了。」，研究者認為小美擁有如此的先備知識(**資源**)，並能將此先備知識應用於作圖的策略(**捷思**)上，而研究者提問小美「那你覺得這邊的$\frac{1}{6}$(指$\frac{1}{6}$)和這邊的$\frac{1}{6}$(指2$\frac{1}{6}$的$\frac{1}{6}$)有沒有一樣長？」(圖3)，根據小美的回應「我有想一下，有比一下」，研究者判定比起第一、二題，小美有經思考並且實地動手**監控**前後兩段$\frac{1}{6}$的長度。

題四，小美說明如何找$\frac{1}{9}$的距離「因為$\frac{16}{9}$還不到2啊，然後直接分成9分了(第一種方法)；或者也可以把它分成3個啦，把1

等分成3分，一個就是$\frac{1}{3}$，然後再把$\frac{1}{3}$分成3分就是$\frac{1}{9}$，因為這裡就是18嘛(意指$\frac{18}{9}$的地方)，16就是比它少一點點。(第二種方法)」，可見小美擁有二個方法找$\frac{1}{9}$的距離**(資源)**。而在作圖的策略上，小美回答研究者的問話，認為以$\frac{1}{3}$為媒介的作圖方式(第二種)，更準確地畫出$\frac{1}{9}$**(捷思)**。由此可知小美已能判別出第二種作圖策略比第一種作圖策略更能精準畫出$\frac{1}{9}$，也可推知小美對分數基準化的能力以及精準畫圖的監控能力已有提昇**(監控)**。當研究者希望小美可以更精準的說出$\frac{16}{9}$與$\frac{18}{9}$的間隔時，小美答道「前面2格」，並對照其作圖(如圖4)，研究者認為小美於此題的分數測度運用上更為精準，**監控**能力相較之前的第一、二與三題來得更好，運用資源在圖形表徵上的策略也更為精闢**(捷思)**。

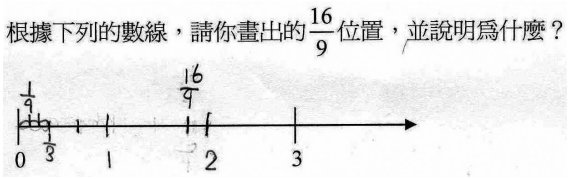

圖4：小美的初始解題

根據上述所敘，研究者整理出1-4題小美解題行為的「資源」、「捷思」、「監控」，表格如表3。

二、基準量是分數的5-6題的結果與討論

(一)提問前

為了節省篇幅，茲建表4以呈現提問前小美5-6題的解題表現。

題五，小美的解題策略「因為$\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}=1\frac{2}{6}$，$\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$，所以他們2個數就是差了3格

表3：小美1-4題的解題表現

題號	資源	捷思	監控
1	a. $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$	a. 未利用$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$	a. 未做好監控
2	a. $\frac{1}{8}=1\frac{3}{8}$	a. 未利用$\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$	a. 未做好監控
3	a. $\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$	a. 利用$\frac{1}{2}$的3等分找$\frac{1}{6}$	a. 前後$\frac{1}{6}$的距離相等
4	a. $\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}(2-\frac{2}{9})$	a. 利用$\frac{1}{3}$的3等分找$\frac{1}{9}$	a. 以2當作參考點 b. 前後$\frac{2}{9}$的距離相等

表4：提問前，小美5-6題的解題表現

題號	基準量	比較量	資源	捷思	信念系統	監控
5	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{6}$	a. $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$ b. $\frac{11}{6}\div\frac{4}{3}=\frac{11}{6}\div\frac{8}{6}=1\frac{3}{8}$	a. 未利用解題資源	a. $\frac{4}{3}$當作1	a. 未注意$\frac{3}{3}$即是1 b. $\frac{11}{6}$應在$\frac{4}{3}$之後
6	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	a. $\frac{5}{6}\div\frac{3}{4}=\frac{10}{12}\div\frac{9}{12}=1\frac{1}{9}$	a. 未利用解題資源	a. $\frac{3}{4}$當作1	a. 未注意$\frac{4}{4}$即是1 b. 未注意$\frac{1}{4}$的一半是$\frac{1}{8}$

$\frac{2}{6}$，然後就取個概數。」，她先藉由分數運算找出$\frac{11}{6}$與題目基準量$\frac{4}{3}$相差3格$\frac{1}{6}$，並期待透過$\frac{1}{3}$而找到$\frac{1}{6}$，進而得到答案**(捷思)**。小美的解題策略是正確的，不過當無法從數線中立即看出1的位置時，不知從$\frac{4}{3}$找了$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$，而在找1時卻忽略了$\frac{4}{3}$與$\frac{2}{3}$的中間點即是$\frac{3}{3}$**(資源)**，小美便自行假設1的位置(手指著$\frac{4}{3}$的位置)。研究者認為小美忽視已知的約定，自行假定單位長1的位置**(信念系統)**，影響其解題策略甚深，小美並未從$\frac{4}{3}$找$\frac{3}{3}$而得到1**(監控)**，接著小美也未發揮**監控**能力，以致於未察覺她標示的$1\frac{5}{6}$在$1\frac{2}{6}$左邊，這是明顯的錯誤(圖5)。

題六，從小美「因為$\frac{3}{4}$，就是4分中的3分……1分就是$\frac{1}{4}$，所以1在這裡。」可以發現，小美能理解$\frac{3}{4}$有3個$\frac{1}{4}$**(資源)**，並且可以由此推導出1的位置**(捷思)**，不過之後，研究者問「那你怎麼決定$\frac{5}{6}$？」小美答「如果不看1，這裡就是$\frac{1}{3}$」(指著$\frac{1}{4}$的位置)，由此我們可以看到小美錯把$\frac{3}{4}$重新當作1，而忽略了原先從$\frac{3}{4}$找出來的1**(監控)**，再次出現「自行設定單位長」的解題／作圖思維**(信念系統)**。且又誤判$\frac{1}{4}$的一半等於$\frac{1}{2}$**(監控**；圖6)，關於這一點，研究者認為可能是因為小美一時疏忽所導致的錯誤，或是其先備知識不穩固所致**(資源)**；也可能是她認為單位長可以

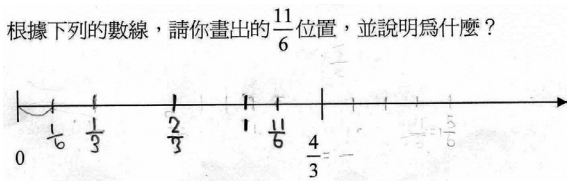

圖5：提問前，小美解題方式

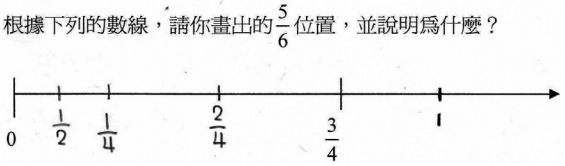

圖6：提問後，小美解題方式

自行設定的關係**(信念系統)**。

小美在先備知識測驗，即寫出$\frac{5}{6} \div \frac{3}{4} = \frac{10}{12} \div \frac{9}{12} = 1\frac{1}{9}$，依她所列的式子，如果她能夠轉譯成從$\frac{9}{12}$找$\frac{10}{12}$，接著設定目標以找出$\frac{1}{12}$的長度，先找出子目標$\frac{1}{4}$，再從$\frac{1}{4}$找$\frac{1}{12}$，這一題即可解題成功，而小美解題失敗，部分原因可能是表徵系統轉換出了問題，研究者推究原因，學校教材沒有相對應的表徵系統，學校教師也可能沒有相對應的表徵教學以幫助學生理解分數的基準化問題，因此小美自行設定$\frac{3}{4}$與$\frac{4}{3}$為1的行為，雖是出乎研究者的預期，但她的解題表現卻也是可以理解的。

(二)提問後

為了節省篇幅，茲建表5以呈現提問後小美5-6題的解題表現。

501 S：假裝1在這裡好了。(手指著$\frac{4}{3}$的位置，圖5)

502 T：這裡題目給你的是$\frac{4}{3}$，可以改變成1嗎？

503 S：不行，好吧，那$\frac{4}{3}$在這裡，分成4格，那一格就是$\frac{1}{3}$，那3格就是1了，這裡是1**(捷思)**，這裡加上這一格就是$1\frac{1}{3}$，再把$\frac{1}{3}$分成2格，因為$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$，所以$\frac{1}{3}$的一半就是

表5：提問後，小美5-6題的解題表現

題號	提問	資源	捷思	監控
5	a. $\frac{4}{3}$是給定的 b. 從$\frac{4}{3}$標示$\frac{1}{3}$的位置	a. $\frac{1}{3}$找$\frac{1}{6}$	a. $1\frac{1}{3}=1\frac{2}{6}$ b. 從$1\frac{2}{6}$找$1\frac{5}{6}$	a. 以$1\frac{2}{6}$當作參考點往後3個$\frac{1}{6}$即是$1\frac{5}{6}$
6	a. $\frac{3}{4}$是給定的 b. 從$\frac{3}{4}$標示$\frac{1}{4}$的位置 c. $\frac{2}{4}$看成$\frac{1}{2}$以找$\frac{1}{6}$	a. 瞭解$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ b. 瞭解$\frac{1}{4}$的一半是$\frac{1}{8}$	a. 3等分$\frac{1}{2}$得到$\frac{1}{6}$ b. 誤以為$\frac{1}{4}$的一半是$\frac{1}{2}$	a. $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ b. 以1當作參考點，並利用$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$了**(資源)**，所以這一段長就是$\frac{1}{6}$了。

……

511 T：可不可以請你把$\frac{1}{3}$清楚的標出來，也把1標出來。

512 S：這裡是1，所以……我好像畫錯了，所以這邊是$\frac{1}{3}$，那這裡就等於$1\frac{1}{3}$(指$\frac{4}{3}$)，就是$1\frac{2}{6}$，因為和$1\frac{5}{6}$差了3格$\frac{1}{6}$，所以差了3分，嗯！我畫的好像不太對！**(監控**；圖7)

513 T：哪裡不對？

514 S：嗯……？

515 T：你剛剛提到$1\frac{1}{3}$就是$1\frac{2}{6}$，那$1\frac{2}{6}$跟$1\frac{5}{6}$的關係是什麼？

516 S：$1\frac{5}{6}$比$1\frac{2}{6}$大，多3格$\frac{1}{6}$。**(資源)**

517 T：但是這裡是$1\frac{2}{6}$ 。(指著$\frac{4}{3}$的位置)

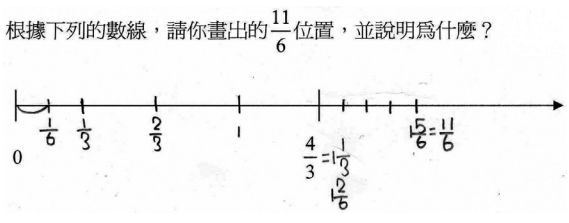

圖7：提問前，小美解題方式

518 S：對厚！我真的搞錯了，它比$1\frac{2}{6}$多3格，所以這裡是$1\frac{5}{6}$。**(監控)**

題五，小美自行設定單位長1，研究者提出非引導性的提問(行號502)，而小美確認$\frac{1}{6}$的位置之後，研究者給予最小建議的問話，以突顯1的正確位置(行號511)，且小美發覺自己畫的不太對但又不確定自己的癥結點在哪，研究者給小美認知衝突的情境(行號515)以提問小美，待小美發現錯誤後，研究者再次給予最小建議(行號517)提醒小美$1\frac{2}{6}$的位置，小美發現她$1\frac{5}{6}$與$1\frac{2}{6}$的位置似乎有些矛盾**(監控)**並確認自己的作答錯誤，而重新解題成功。

601 T：你怎麼知道1在那裡呢？

602 S：因為它是$\frac{3}{4}$，就是4分中的3分，不到1啊，這一段就是3分，平均分配1分就是$\frac{1}{4}$，所以1在這裡。**(資源**；圖6)

603 T：那你怎麼決定$\frac{5}{6}$？

604 S：就是如果不看1，這裡就是$\frac{1}{3}$，這樣變成一格就是$\frac{1}{3}$。(指著$\frac{1}{4}$的位置)

……

609 S：好吧，如果這是$\frac{3}{4}$，那這裡變成就是$\frac{1}{4}$。

610 T：好，$\frac{1}{4}$決定下來囉！

611 S：好吧，如果這是$\frac{3}{4}$，那這裡變成就是$\frac{1}{4}$。然後那這段就是$\frac{1}{2}$。(指著$\frac{1}{8}$的位置；圖7)

612 T：這裡是$\frac{1}{2}$的話，那你的意思是$\frac{1}{2}$比$\frac{1}{4}$小囉？

613 S：耶……對厚！

614 T：其實你的$\frac{1}{2}$已經畫出來了！你沒注意到而已！

615 S：……(沉默)。

616 T：好!老師提示你喔！這裡的$\frac{2}{4}$就是$\frac{1}{2}$。你的$\frac{1}{2}$已經畫出來了。(圖8)

617 S：嗯！

618 T：你的1在這裡，所以$\frac{2}{4}$在這裡，那該如何從$\frac{1}{2}$去決定$\frac{1}{6}$？

……

624 T：這$\frac{1}{4}$就不要看了！因為我們不需要畫$\frac{1}{4}$，我們把$\frac{1}{2}$三等分，找出$\frac{1}{6}$的位置！

625 S：$\frac{1}{6}$就是在這裡，1在這裡，回頭利用$1-\frac{1}{6}$，那我們就找$\frac{5}{6}$。

626 T：好！那要講一次給老師聽！說說看！，例如【$\frac{1}{4}$怎麼找？】；【那$\frac{1}{6}$怎麼找？】；【$\frac{5}{6}$又怎麼找到呢？】

627 S：【它是$\frac{3}{4}$代表這裡分成三分，這一段就是$\frac{1}{4}$啦。】，【這裡就是$\frac{2}{4}$，$\frac{2}{4}$就是$\frac{1}{2}$，把$\frac{1}{2}$三等分，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$那就是$\frac{1}{6}$，或者說$\frac{1}{2}$就是$\frac{3}{6}$，三等分也是$\frac{1}{6}$。】，【1就是$\frac{6}{6}$嘛，所以1$-\frac{1}{6}$就是$\frac{5}{6}$。】

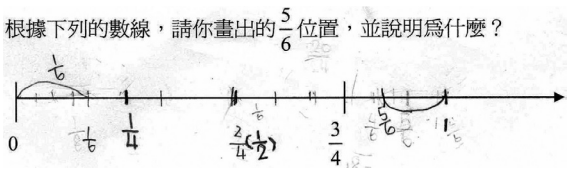

圖8：提問後，小美解題方式

題六，研究者追問小美1的位置(行號601)，如同Goldin (2000)的非引導性提問「Can you tell me more about that ?」小美說出1的位置之後，研究者給予最小的建議(行號603、610、614)，促使小美領悟最重要的關鍵即是發現$\frac{2}{4}$為$\frac{1}{2}$，不過小美卻未發現此關係，依研究者判斷她可能認為$\frac{1}{6}$小於$\frac{1}{4}$，然後忘了研究者要求她要精準作圖，直接把$\frac{1}{6}$畫在$\frac{1}{4}$的左邊，也可能是其他因素，導致於未運用等值分數的觀念$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$的位置，因此研究者再給予較進階的引導式建議(行號616、618、624)，最後研究者給予解釋性與後設性的提問以確定小美是否理解，而小美即能用自己的話重述一次(行號627)。如此，也驗證上述的對於小美的學習有成效，能精準的利用$\frac{1}{6}$的長度來找出$\frac{5}{6}$的位置，可見提問後小美的監控能力有改善。

伍、結論與建議

一、結論

本研究主要在探討小美在數線上關於分數基準化問題的解題表現，因此，做結論時研究者綜合小美的解題分析，依據四個變項，做出四點結論。

(一)資源：小美擁有完備的工具性理解，但關係性理解不夠

Lesh認為解題行為最關鍵在於個體對問題情境的概念模型(conceptual model)。專家的表現是因為穩固概念模型的擁有。相反地，學生的困難在於他們的概念模型的不穩固(引自Schoenfeld, 1985)。Polya (1965)主張在數學學習，知其所以然(know-know)遠比訊息擁有(possession of information)更重要。到底什麼是「知其所以然」？研究者認為除了工具性理解外，也需具備關係性理解。

小美解第5題時，在找1時卻忽略了$\frac{4}{3}$與$\frac{2}{3}$的中間點即是$\frac{3}{3}$，又解第6題時，從$\frac{3}{4}$找到了$\frac{2}{4}$與$\frac{1}{4}$，忽略了$\frac{4}{4}$即是1，以上二題的解題可見，小美的概念模型不夠穩固，以致於影響了解題表現。

Lesh, Post與Behr (1987)強調表徵系統內的轉換(transformations within representation systems)，在關係性理解與解題表現上的重要性。再以第6題為例，小美解題失敗，部分原因可能是關係性理解不夠或是表徵系統轉換出了問題。

(二)捷思：未能運用分數等價關係與新單位量，以發展出解題策略

小美熟悉於操作運算，卻拙於建立連結，她雖然會約分、擴分與分數的倍數關係等先備知識，但卻無法靈活運用於解題策略上，Lamon (2002)的論述也有相同的發現，相對於推理方面建立連結，學生往往在操作運算方面比較有把握。因此他／她們往往無法將運算方面的能力轉移到推理的連結。例如小美無法將$1\frac{1}{3}$看成$1\frac{2}{6}$，以及$\frac{2}{4}$看成$\frac{1}{2}$。

誠如Janver (1987)所述，理解(understanding)雖是像冰山(iceberg)，隱藏的部分比外露的部分多，但是它是可以用明確的心理動作的體現(the realization of definite mental acts)來檢驗。研究者認為分數基準化的理解也是如此，藉由數線上的表徵，可以判斷學生是否能以新單位量($\frac{1}{6}$)詮釋$\frac{11}{6}$與$\frac{4}{3}$的關係，以及新單位量($\frac{1}{12}$)重新詮釋$\frac{5}{6}$與$\frac{3}{4}$的關係。

(三)監控：解基準量是分數的問題時，並未對計畫與決策的大方向有監控的表現

解5、6題時，小美並未針對計畫與決策的大方向有監控的表現，整體來說，她在監控方面的能力是有待啟發的。Ringel與Springer強調自我控管(self-monitoring)的重要性，認為它是記憶作業(memory task)中有效的控制行為的一個成分(引自Schoenfeld, 1985)。小美解第5題時已經從$\frac{4}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{3}$進而找$\frac{1}{6}$，如果將$\frac{4}{3}$看成$\frac{8}{6}$或$1\frac{2}{6}$的話，她就幾乎解題成功了，也許她在解題當下沒有在記憶作業中做好自我控管，接著錯把$\frac{4}{3}$當作1，又跳到1去找$\frac{1}{4}$，解第6題時也是如此。

(四)信念系統：忽視了已存在的隱藏約定，屢次有自行設定單位長的想法

Schoenfeld (1985)所主張信念系統是個人探索(approach)數學與數學任務(task)的一

種觀點(perspective)，而Lester, Garofalo與Kroll (1989)強調此種信念系統組成了個體對於自身、數學、解題與題材的主觀知識(subjective knowledge)，此主觀知識又影響了解題時的決定。研究者認為小美可能是因為主觀知識的影響，假定單位長可以自行設定，導致容易解題錯誤。

再者，研究者認為小美如此部分的信念系統可能是源自於課室的經驗，例如教師解題時可能隨意約略在數線上表徵位置又或者在黑板上畫出不一樣的單位長，也可能是源自於課本的例子，不同例子中1的長度也可能差距很大，而這些經驗可能使得小美認為只要粗略找到分數的位置即可，並誤以為單位長是可以自行決定的，但以1與$\frac{3}{4}$兩個數而言，長度是可以改變的(variant)，不過$\frac{3}{4}$與1的相對長度是不可能改變的(invariant)，研究者認為如此的約定(convention)是隱藏(implicit)於教材之中，授課教師若不刻意強調此關係，一般學生可能不會察覺到如此對應的關係。

二、建議

根據研究結果，本文將提出以下幾點建議：

(一)分數等值關係的基模是解題的重要資源，學生是否已建立分數的等值關係，需要教學者更加留意

以第5題為例，給定的基準量為$\frac{4}{3}$，而要標示出$\frac{11}{6}$的位置，就兩者之間的關係來看，$\frac{4}{3}$與$\frac{11}{6}$即可衍生出共測單位$\frac{1}{6}$，而$\frac{1}{6}$的獲得則需藉由$\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$的等值關係。由此可知，共測單位的獲得，需要分數等值關係的建立，也是解題的重要資源，不過小美並未將分數等值關係作為其解題資源，以致於解題失敗。

而這也使得研究者省思，學生對於分數的等值關係大多只停留於約分與擴分的操作運算，是否能將等值分數的概念靈活運用於解題的過程中，是需要再留意的。

(二)不論基準量設定多少，如何找「1」是重要的捷思策略之一

任何一個題目所要求的分數的位置取決於單位量的位置，因此從數線所給定的基準量找到「1」是解題的重要捷思策略。然而當基準量為分數時，學生對於如何找到單位長「1」的位置較易感覺困難及混淆，且從小美的解題表現發現，在數線上如何找到「1」的位置而不受其他分數的影響是困難的，因此如何從數線所給的基準量抽離開來，單純只看數線上的單位長「1」，這樣的能力需要加以培養。

(三)基準量與比較量(目標量)，以及基準量與單位量的不變關係是監控能力的重要指標

「1」的相對位置是固定的概念，看似簡單卻容易被忽略。小美會自行設定單位長或是「1」的位置，忽略基準量與單位量之間不變的相對關係，而造成解題錯誤。研究者認為這樣的解題行為可能是源自於課室的經驗，在課室教學過程中，該對應關係的建立也許被老師忽略了，亦或是被學生遺忘了。

然而此概念為解題是否成功的重要關卡，倘若學生沒有依此概念監控解題行為，即使擁有正確的解題資源，仍無法有效解題，因此建立學生「1」的相對位置是固定的概念是重要的。

(四)強調分數「等分」的概念，以奠定學生正確的概念基礎

分數啟蒙教學時，老師應強調$\frac{3}{8}$是8「等分」中的3分，鑑於本研究個案小美以及劉祥通(2007)的受訪個案往往使用「約估」法以找尋分數的落點，推究原因，學生可能認為$\frac{3}{8}$只是8「分」中的3分即可，其實是8「等分」中的3分。有鑑於此，教學者應特別強調是8等分中的3等分，以奠定學生正確的「資源」。

(五)以七巧板或百格板檢驗「單位的大小可以設定，相對的關係不能改變」的想法

本研究有關於信念系統的研究發現較少，只發現了小美忽視了已存在的隱藏約定，屢次有自行設定單位長的想法，可惜訪談的當下沒有想到用什麼策略繼續考驗她的想法與信念系統。有一種七巧板是一個很好的檢驗工具，理由是若將七個組合成的大正方形視為一個單位，那麼2個「大」的直角三角形分別是$\frac{1}{4}$的大小，2個「中」的直角三角形分別是$\frac{1}{8}$，2個「小」的直角三角形分別是$\frac{1}{16}$，而一個「小」正方形是$\frac{1}{8}$。若把小正方形假設是1.00，其他六個板的大小多少？而組合後的「大」正方形會多少？同理，百格板的小立方塊是1.00單位的話，一個長條即是10.00，一個大方塊板即是100.00。如果，假設一個大方塊是1.00的話，一個長條即是0.10，一個小立方塊就是0.01。以上二種策略都是考驗「單位的大小可以設定，相對的關係不能改變」，未來研究是可以繼續考驗小美與其他個案。

誌謝

本研究蒙國科會計畫(NSC 98-2511-S-415-003-MY3)經費補助，特致謝忱，也感謝審查委員的洞見與細心審查，使得本文更有價值。

參考文獻

1. 國立編譯館(2000)。**國民小學數學第十一冊教師手冊(六上)**。臺北市：作者。
2. 劉祥通(2007)。**分數與比例問題解題分析：從數學提問教學的觀點**(增訂一版)。臺北市：師大書苑。
3. Barba, R. H. (1990). Problem-solving pointers. *Science Teacher*, *57*(7), 32-35.
4. Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.
5. Cambell, P. F., & Bamberger, H. J. (1990). The vision of problem solving in the standards. *Arithmetic Teacher*, *38*(9), 14-17.
6. Carl, I. M. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Arithmetic Teacher*, *82*(5), 388-391.
7. Chazan, D., & Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics*, *19*(2), 2-10.
8. Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning*

of mathematics (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

9. Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.
10. Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
11. Janver, C. (1987). Translation process in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
12. Kerslake, D. (1986, July). *Children's perception of fractions*. Paper presented at the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. London.
13. Lamon, S. J. (1990). *Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming*. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Learning. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 325 335)
14. Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170-193.
15. Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
16. Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: Form fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
17. Lamon, S. J. (2002). Part-whole comparisons with utilizing. In B. Litweller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 yearbook* (pp. 162-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
18. Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook* (pp. 100-121). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
19. Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
20. Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 75-88). New York: Springer-Verlag.
21. Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Sliver

(Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

22. Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman.
23. McCloskey, A., & Norton, A. (2009). Using Steffe's Advanced Fraction Schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(1), 44-50.
24. Norton, A., & McCloskey, A. (2008). Modeling students' mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, *15*(1), 48-54.
25. Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
26. Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Vol. 1). New York: Wiley.
27. Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 50-85.
28. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
29. Skemp, R. R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(2), 88-95.
30. Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
31. Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application*. New York: Praeger.
32. Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

05-劉祥通.indd 38 2012/3/21 上午 11:08:44

科學教育學刊
2012, 第二十卷第一期, 23-39

Chinese Journal of Science Education
2012, 20(1), 23-39

Amy's Problem Solving Performance for Fractional Norming Problems Situated on Number Lines

Shiang-Tung Liu* and Shu-Juan Kang

The Graduate Institute of Mathematics & Science Education, National Chiayi University

Abstract

The research subject, Amy, is a sixth grader. She is used to getting high scores in mathematics. However, she does not have enough confidence to deal with non-routine problems. In order to observe how she overcame obstacles during problem solving, she was given some number line problems involving unfamiliar situations. These fractional problems involving both reference quantity and target quantity had not been taught yet at her school. This case study adopted structurally task based interviews to collect data. To capture her critical thinking in solving problems, the researchers observed how she located each fractional number, especially the sequence of pinpointing all related numbers on number lines. The conclusions of this study were drawn from the aspects of resource, heuristic, control and belief systems. The major findings are as follows: 1. Though Amy had a resourceful instrumental understanding, her relational understanding was insufficient for problem solving. 2. Amy did not utilize the equivalent fractions and new units to develop problem solving strategies. 3. When the reference quantities were fractions, Amy did not control well the planning and decision-making needed for problem solving. 4. Amy didn't realize the implicit constraints of number line problems. As a result, she often ignored the given unit system and created another unit system which was confused with that conventionally used.

Key words: Fractional Problems, Number Line Problems, Mathematical Problem Solving

* Corresponding author: Shiang-Tung Liu

05-劉祥通.indd 39 2012/3/21 上午 11:08:44