科學教育學刊
2012, 第二十卷第三期, 267-294

Chinese Journal of Science Education
2012, 20(3), 267-294

國三學生數學觀念之研究

李浩然[1、*] **柳賢**[2]

[1]高雄市立光華國民中學
[2]國立高雄師範大學　數學系

(投稿日期：民國100年10月1日，修訂日期：民國101年4月26日，接受日期：民國101年6月4日)

摘要：從數學教育的相關研究可發現，學生的數學觀念會影響其數學學習與解題。因此本研究的目的在於探討國中學生的數學觀念，研究者選取高雄市某國中三年級4個班級共122位學生進行研究，並將所蒐集的晤談資料以現象描述分析法進行分析。研究結果發現，學生的數學觀念包含元素、計算、工具、建模、抽象思考與理解等六個主要焦點面向，若再加以區分可以細分成十種數學觀念類型。此外在性別與數學觀念這兩個因素間並未達到顯著差異，但是在數學成就與數學觀念間，研究者發現高數學成就的學生比低數學成就的學生抱持更為寬廣的數學觀念，而中數學成就的學生之數學觀念則以應用與建模為主，且已達顯著差異(p = .000)。本研究中除了驗證先前的相關研究外，還更深入的分析國中學生的數學觀念，與初步探討國中學生數學觀念與性別和數學成就間的關係；藉此寄望研究結果能提供數學教師與研究者，更瞭解學生對於數學的看法，進而能協助其數學的學習。

關鍵詞：性別差異、數學成就、數學觀念

壹、緒論

一、前言

長久以來「數學是什麼？」與「數學的意義為何？」是數學哲學領域中，常常被人們提及與探討的有趣問題(Grouws, Howald, & Colangelo, 1996)，然而這個問題並沒有一個普遍與一般化的答案。Ernest (1991)認為知識分為先驗和經驗知識兩種，而數學知識被歸類於先驗知識已經持續兩千五百年，早期的數學知識如歐氏幾何等，是建立在從公設和假說經由演繹方式推演得到定理，由於公設被視為是基本真理不需被證實，因此從公設推演而來的定理也必須保證為真。直到二十世紀數學家Hersh (1986)，Lakatos (1986)及Putnam (1986)挑戰了數學是絕對正確的基本假設，這些學者認為數學知識難免有錯，就如同自然科學知識一般，他們從社會學分析的角度來探究數學知

*通訊作者：李浩然

06-李浩然.indd 267　2012/7/17 下午 12:42:53

識的本質。數學家和數學哲學家描述數學為一種心智活動(mental activity)，一種社會建構(social construction)，包含推論、證明和反駁，其結果受到革命性改變的管制，而其效度(validity)決定於社會和文化的判斷(Thompson, 1992)。

數學教育相關研究中關於數學觀念(conceptions of mathematics)的議題於1980年逐漸受到重視，Thompson (1984)以質性研究的方式探討三位國中數學教師發現，教師對數學本質觀念與其實際教學間具有高度一致性，擁有工具主義觀點的教師，重視規則和過程的解說；抱持問題解決的數學觀念，重視讓學生沈浸於數學過程之活動。Kesler (1985)研究四位高中數學教師發現，具有二元論數學觀念的教師，在教法上與他們的觀念一致，而具多元觀念的教師，其教學行為範圍卻從絕對權威到探究的教學模式，因此從相關文獻的結果可推論，教師的數學觀念會影響其教學活動。然而Grouws等(1996)指出學生數學觀念的研究常常被忽略，建議可藉由探討學生的數學觀念來瞭解其數學學習。Star與Hoffmann (2005)提到探討學生數學觀念有兩個重要因素，探討學生數學經驗的潛在本質與瞭解學生未來數學學習與成就的導向。Crawford, Gordon, Nicholas與Prosser (1994, 1998)的研究結果推論，大學生的數學觀念會引導其數學認知活動與數學學習方式。Petocz等(2007)的延伸研究也指出抱持更寬廣數學觀念的大學生，比較能夠順利的完成大學學位，從前述相關研究的結果可推論大學學生的數學學習經驗會影響其數學觀念，而數學觀念又會引導其未來的數學學習方式與學習成果；但從文獻探討的過程中卻未能發現國內中學數學觀與數學學習之相關文獻，因此這個部分是值得加以探討，所以研究者預於本研究中對於數學觀念與其數學成果間的關係進行初步的探討。

從文獻探討過程中可發現，數學觀念的研究從1980年開始逐漸受到教育研究者的重視，不過此議題偏向探討數學教師或職前教師的數學觀念對實務教學的影響，直到1990年中期才開始探討學生對數學本質觀念；但研究族群偏重於大學生，對於國中與國小學生在數學本質觀念上的研究較少被提及。但許多研究卻指出學校的數學學習對於中小學生而言是困難的(e.g., Hughes, 1986; Schunk, 1996; Simon & Tzur, 2004)，尤其是國中剛從具體運思轉換成形式運思階段，學生的數學學習會受到其經驗、態度與信念的影響(Grouws et al., 1996)，而數學觀念蘊含於經驗之中是一種個人與數學間的關係，會影響學生的數學學習與數學認知活動的執行，因此探討學生的數學觀念，可以協助研究者瞭解學生的數學行為與表現(Noddings, 1990)；此外Crawford等(1994)的研究也顯示數學觀念與數學學習方式有高度的相關，具有片段數學觀念的學生其數學學習方式較為表面；而擁有整合性結構的數學觀念的學生其數學學習方式較深入。從上述文獻可以推論學生的數學學習觀念會引導數學學習方式，且透過分析學生的數學觀念還可瞭解其數學行為；為了能深入瞭解臺灣學生數學學習現況，可從其數學學習方式與數學行為進行分析。因此探討學生的數學觀念可以協助數學教育研究者與教學者，從學生的數學經驗面向來分析學生數學學習與數學行為，進而瞭解其數學學習問題。然而臺灣在數學觀念的研究僅限於教師數學觀念與其數學教學的關係，對於學生數學觀念的探索是很缺乏的。

TIMSS 2003年(Martin, Mullis, Gonzalez, & Chrostowski, 2004)與TIMSS 2007年(Martin, Mullis, & Foy, 2008)國際學生數學與科學成就報告均指出，臺灣地區八年級女學

生數學成就平均比男生稍高一些，但並未達顯著差異；黃國清(2008)應用IRT三參數模式來估計七年級男女生的數學成就，結果顯示女生的數學成就高於男生且達 .010顯著水準，這些研究顯示出性別在數學成就上的不同結果，但是並沒有研究探討國內學生的數學觀念在性別上是否有落差。數學成就方面Mason (2003)與Lepmann與Afanasjev (2005)研究均指出高低數學成就的學生在數學觀念上是有所不同但並未達顯著性；臺灣雖然在TIMSS 2003年與TIMSS 2007年的國際數學成就評比表現不錯，但從標準誤中發現學生間的個別差異從1999年到2007年並沒有降低現象。因此研究者期待現場數學教師與研究者透過分析臺灣學生的數學觀念，可瞭解隱含於學生對數學想法背後的數學學習與數學活動經驗，藉此更深入瞭解國內學習者的數學學習背景後，設計提升臺灣國中學生數學觀念的相關教材進行實際教學，探討是否能縮短高低數學成就學生間的差異。

雖然國外在數學觀念上已經有相關的研究，但是Crawford等(1998)與Petocz等(2007)研究提到學生數學觀念會受到不同教育脈絡與文化的影響而有所不同；因此研究者欲探討目前臺灣國中學生的數學觀念，並與國際相關研究進行比較。故本研究以臺灣國三學生為對象，運用現象描述分析法(phenomenography)探討臺灣國中學生數學本質觀念後，進一步分析性別、數學成就與數學觀念的關係。

二、研究目的與問題

本研究目的首先以現象描述分析法的方式，瞭解國三學生數學本質觀念後，進而探討男女學生在數學本質觀念的差異；以及探討不同數學成就學生其數學本質觀念，並從研究的過程中瞭解性別、數學成就和數學本質觀念之間的關係。

依據上述的研究目的，本研究擬探討下列研究問題。

(一) 探討國三學生所擁有的數學觀念為何？

(二) 探討國三男女學生數學觀念之差異為何？

(三) 探討不同成就的國三學生數學觀念之差異為何？

貳、文獻探討

一、觀念(conceptions)與數學觀念(conceptions of mathematics)

Ernest (1989)提到觀念是一個信念的系統(belief system)其本質是情意，Ponte (1994)認為觀念是由許多概念(concepts)所組成其本質是認知，而Thompson (1992)以廣義的角度來詮釋觀念，他認為觀念可以是個人有意識與潛意識的信念(conscious or subconscious beliefs)、概念、意義(meaning)、原則(rules)、心靈影像(mental images)和喜好(preferences)。所以Agudelo-Valderrama (2004, 2008)認為觀念蘊含了個人的知識、信念與態度，三種成分相互糾纏的部分。從現象描述分析法的角度而言，Johansson, Marton與Svensson (1985)提到觀念並非是肉眼可以看見的物件或事物，而是一種個人和現象間的關係；Nyaumwe (2004)也提到觀念是個人對現象的想法與想像。因此觀念是一種介於個人與現象間的質性關係，可被定義為個人理解周遭物件或現象的基本方法，蘊含於個人的經驗之中。本研究所定義的觀念以較為寬廣的角度來界定，主要採用Thompson與Nyaumwe的看法，是一種個人的想法與觀點，蘊含於個人經驗之中透過個人的認知活動，形成個人對客觀現象的理解。

而數學觀念所意指為何？Ernest (1989)認為教師的數學觀念是教師對數學本質的觀念，也就是教師對數學本質的信念系統。Thompson (1992)提到教師的數學觀念是教師對數學本質的觀念(conceptions of the nature of mathematics)，也就是個人對數學學科有意識與潛意識的信念、概念、意義、原則、心靈影像和喜好。Crawford等(1994)認為大學生的數學觀念就是對於數學是什麼的看法。Reid, Petocz, Smith, Wood與Dortins (2003)以及Reid, Wood, Smith與Petocz (2005)的研究均認為學生的數學觀念是學生透過對數學經驗所形成對於數學學科的觀點(view)與想法。綜合上述學者的研究可以瞭解，數學觀念是個人透過對數學學習與數學活動的經驗所產生對數學的想法；因此本研究採較為寬廣的定義，將數學觀念視為是學生透過數學學習經驗所形成對於數學學科本質的觀點，此一觀點包含個人對於數學的知識、數學的信念與數學的態度，與Reid等(2003, 2005)的說法接近。

二、學生的數學觀念之相關研究

學生數學觀念的研究比教師數學觀念的研究晚發展，關於學生數學觀念可以從Crawford等(1994)的研究說起，研究者以開放式問卷調查300位大學一年級學生的數學觀念，分析出五種學生的數學觀念，A：數學是數字、規則與公式；B：數學是將數字規則與公式應用於數學解題；C：數學是複雜的邏輯系統，也是一種思考方式；D：數學是複雜的邏輯系統可應用於數學解題；E：數學是複雜的邏輯系統，除了可應用於數學解題外，並能提供一種新的抽象化思維方式來理解現實世界。Reid等(2003)以現象描述分析法的方式訪談22位，大學2 ~ 4年級主修統計與數學的學生，研究發現學生的數學觀念可分為三種主要類型元素、建模以及生活。在元素的觀念上學生認為數學是個別的元素，建模的觀念上學生認為數學是建構模型與使用模型的過程，也就是將現實問題轉換成為數學的模型進行處理；最後一種類型是將數學視為是一種生活的方法，也就是現實世界能以數學來呈現，也可以用數學來思考現實的世界，這種類型聚焦於數學與現實世界的關係。Petocz等(2007)的研究以開放式問卷調查五個城市中1,182位大學生的數學觀念，研究結果擴充了Reid等的研究，從狹義觀念到寬廣觀念可分為五種類型，分別是數字(number)、構成要素(components)、建模(modelling)、抽象(abstract)與生活(life)。此外在中小學生的數學本質觀念方面Grootenboer (2003)以問題引導45位9到12歲的學生，以分組討論的方式進行晤談，研究結果發現學生的數學觀念分為計算、問題解決與思考三種類型；Young-Loveridge, Taylor, Sharma與Hawera (2006)以晤談的方式調查400位2到8年級學生的數學觀念包含數學內容、過程、數學的用途與享受四個部分如下表1所示。

從文獻分析得知學生的數學觀念是具有階層性的，Petocz等(2007)是把Reid等(2003)的研究結果進行細分與擴充，數字類型是指運用數字進行加減運算，與中小學生所提到的加、減、乘、除計算(Grootenboer, 2003)和Young-Loveridge等(2006)的數學內容一致；雖然Crawford等(1994)的A類型也是聚焦於數字的運算與操弄，但此類型的數字運用範圍較廣不只侷限於加、減、乘與除的基本運算還拓展到數學的公式與規則。在構成要素方面Reid等所提的偏向於各個層面的數學元素，而Petocz等則是將數學視為是一個公式、方程式和規則的工具箱應用於數學上；這與Grootenboer所提數學是發現策略

表1：學生數學觀念文獻比較表

提出者	Crawford等(1994)	Reid等(2003)	Petocz等(2007)	Grootenboer (2003)	Young-Loveridge等(2006)
對象	大學生(300位)	大學生(22位)	大學生(1,182位)	9到12歲(45位)	2到8年級(400位)
方法	開放式問卷	晤談	開放式問卷	討論式晤談	晤談
數學觀念類型	A：數學是數字、規則與公式		1. 數字	1. 數學是加、減、乘與除運算	1. 數學內容：數字、運算
	B：數學是將數字規則與公式應用於數學解題	1. 構成要素	2. 構成要素	2. 數學是問題解決	2. 數學的用途：日常生活、未來
		2. 模型	3. 建模		
	C：數學是複雜的邏輯系統，也是一種思考方式 D：數學是複雜的邏輯系統可應用於數學解題		4. 抽象	3. 數學是思考	3. 過程：學習、思考與解題
	E：數學是複雜的邏輯系統可應用於數學解題並提供新的抽象化思維方式來理解現實世界	3. 生活	5. 生活		4. 享受

進行問題解決及Crawford等B類型接近，不過Young-Loveridge等還將此觀念延伸於生活與未來職業等方面。Petocz等所提的建模與Reid等的模型，都是強調數學與物質世界的連結，也就是將部分現實問題轉換成為數學的模型進行解決。此外在抽象類型上，認為數學是用數字與符號所建立的邏輯系統或結構，而Reid等的研究並沒有提到這個部分；Crawford等的研究將這個部分細分為C、D兩類型，C類型除了認為數學是複雜的邏輯系統外還強調也是一種思考方式與Grootenboer提思考的觀念接近，D類型是進一步提到可應用數學這個邏輯系統來解複雜困難的數學問題；然而中小學生在這個部分則是將數學視為是學習、思考與解題等動態思考的過程(Young-Loveridge et al.)。最後在生活類型上Petocz等和Reid等在這個部分都認為現實世界能以數學來呈現，也可以用數學來理解現實的世界，也就是Crawford等的E類型，將數學視為是一種邏輯系統可提供抽象化思維方式來理解現實世界；Young-Loveridge等的研究中還發現，有少數中小學生認為數學是數字的遊戲可讓人享受其中。

三、數學觀念與性別差異

從Leder (1992)的研究發現1980年開始，關於性別在學生數學學習與數學成就方面的研究，逐漸受到數學教育研究者的重視，且從1990年初期許多跨國的國際性數學調查研究如TIMSS或PISA的研究陸續被提出，調查結果均提到性別在數學能力與數學成就上的差異。然而性別與數學觀念的研究，從文獻搜尋的過程中研究者發現此議題較少被探討，但學生的數學觀念會潛在影響其數學認知行為，因此Stage與Kloosterman (1995)從文獻探討的過程中推論，可藉由瞭解學生的數學觀念，來解釋學生在性別與數學成就上的差異。但是Lepmann與Afanasjev

(2005)探討七年級學生數學本質及數學內容等相關信念時發現，不同性別的學生關於數學本質觀念並無顯著差異。同樣的Hall (2002)的研究指出，國二女學生偏好從絕對的觀點來看數學，而男學生則傾向從相對開放與問題解決的觀點，但是兩者之間的差異性不大。Mason (2003)的研究指出國三女生認為數學是可應用的觀點其百分比高於男生，且女生認為數學的學習需經由概念的理解來達成。相關文獻分析發現，從性別差異的角度探討學生的數學觀念，發現國中男女生其數學觀念會有些微的落差，但是經由統計考驗並無顯著差異；研究者想透過現象描述分析法的方式深入的瞭解臺灣國三學生數學本質觀念在性別上的差異，並與國外的研究進行比較。

四、數學觀念與數學成就

Garofalo (1989)從對相關研究分析的結果推論不同數學觀念會影響其數學行為與表現；Crawford等(1994, 1998)的研究將大學生的數學觀念與數學學習方式進行卡方考驗後發現，大學生的數學觀念與其數學學習方式具有顯著關連性，擁有數字、計算與圖形等片段數學觀的學生其數學學習的方法偏向記憶與練習，具備整合性數學觀的學生其數學學習方法偏向問題的探索與概念間的理解。Ponte, Matos, Guimaraes, Leal與Canavarro (1994)從學生的晤談資料中發現擁有較強過程觀點與規則導向之數學觀念的高中生，比較能夠受目標引導而找到正確答案獲得較好的成績。Wong (2000)從開放式問卷分析的結果發現認為數學是絕對真實的學生，在解決數學問題時會運用例行性的問題解決模式；當學生認為數學是符號與規則時其解題模式，偏向以x、y方程式來解決問題。因此從相關文獻可推論學生的數學觀念會影響其數學學習、數學解題與數學成就。Mason (2003)從其研究的晤談結果發現，高數學成就的學生比低數學成就的學生，更認同數學是需要理解且有用的學科外，還更有信心解決數學難題；但是Lepmann與Afanasjev (2005)對於七年級高低數學成就的學生數學觀進行統計考驗分析發現，高成就的學生認為數學是一種問題解決的過程以及可應用於日常生活中，低成就的學生則偏向認為數學是運用計算機進行計算，但經統計考驗後發現並沒有達顯著差異。因此從相關的質性研究可推論，學生的數學觀念與其數學成就是具有因果關係；但從量化的研究則無法將其結果推論到一般的母群體。由於相關研究僅針對高成就與低成就的學生進行分析，這樣的結果在研究方法上缺乏完整性，因此本研究準備將學生的數學觀念與數學成就間的關係，從高、中、低這三類數學成就的學生進行更進一步的分析。

參、研究方法與實施

這個章節研究者從研究方法與設計、研究對象、資料蒐集與資料分析等四個部分進行說明。茲分述如下：

一、研究方法與設計

「現象描述分析法」於1979年首次被提出(Marton, 1988)，1980年代初期Marton將現象描述分析法引入教育相關文獻中，現象描述分析法是一種質性的研究方法，目的用來瞭解個人對經驗世界的觀念，Marton認為現象描述分析法主要是用來調查人們的經驗或思考各種現象差異的一種質性研究模式，因此現象描述分析法的目的是用來蒐集與分析個人的經驗(Åkerlind, 2005)。Cano與Cardelle-Elawar (2004)也指出現象描述分析法是，藉由訪談的方式蒐集資料後進行深度

的分析，研究者著重於描述和系統化個案對於現象的理解。而本研究目的首先要探索國中學生對數學學科本質的觀點與想法，因此研究者想透過現象描述分析法來調查國中學生的數學觀念。

第二階段研究者依據學生性別進行分析，試圖瞭解男女生在數學觀念上的差異。研究者將研究樣本近三次的數學月考成績平均後進行排序，將學生分成高分組、中分組與低分組三組，高分組的學生其數學成績為前27.00%，低分組的學生其數學成績為後27.00%，中分組的學生則介於前27.00%與後27.00%之間的學生，接著研究者從這三類不同數學成就的學生，探討其數學觀念。最後研究者期望能瞭解國中學生在性別、數學成就與數學觀念三者間所存在的關係。段表

二、研究對象

本研究對象選取原高雄市市區某所國中，以立意取樣的方式選取研究者任教學校的國三班級為樣本。該國中全校共有38個班級屬於教育部規定的中型學校，國三有13班每班人數約為33人，每週均上4節數學課。該校學生於國一新生入學時，以國小五六年級的國語和數學成績進行S形常態編班；研究晤談之前研究者針對全校13個國三班級學生，近三次的數學月考成績進行變異數同質性檢定，除特殊班外其他12個班級的數學平均成績均未達顯著差異；且每班學生的數學成就均屬常態分布。因此研究者從這12個班級中，選取4個願意參與研究班級的學生，以現象描述分析法的方式進行關於數學觀念的晤談。研究對象中原本應該有129位學生，但是其中有4位學生於訪談日請假，另外還有3名學生不願意參加訪談，因此有7位個案學生流失，所以共122位國三的學生，參加學生年齡約15歲，其中包含57位男同學與65位女同學。

三、資料蒐集

本研究資料分成兩個部分，質的部分則以個案學生的訪談資料為主，量的部分則是以個案學生的數學成績為主。質性的晤談方面，本研究所採用的現象描述分析法是透過訪談的方式蒐集資料，Richardson (1999)提到此方法以學生對現象的描述出發，透過對受訪者的描述瞭解學生對現象的看法後，分析蘊含於現象背後的經驗；因此晤談的問題修改自Crawford等(1994)、Knuth (2002)、Reid等(2003)和Petocz等(2007)的研究，晤談問題如下表2所示。

晤談時研究者先讓學生依據主要晤談問題1. 根據你的經驗，你認為數學是什麼？進行回答後再提出第二個主要晤談問題繼續讓學生針對數學的想法進行補充說明，如果學生能回答主要晤談問題則晤談結束；若主要晤談問題太過抽象導致學生無法回答時，研究者才引入引導性晤談問題，讓學生從數學學習經驗中組織與建構對數學的觀念後，再回到主要晤談問題如下圖1。在122筆學生晤談資料中，有114位學生(93.44%)在主要晤談問題時已能將其數學觀念清楚描述，但

表2：國三學生數學觀晤談問題階

主要晤談問題	1. 根據你的經驗，你認為數學是什麼？ 2. 當有人問你什麼是數學你會如何回答？
引導性晤談問題	1. 你如何學數學？(Reid et al., 2003) 2. 你學數學的目的為何？(Knuth, 2002; Reid et al., 2003) 3. 請問數學在你未來的學習與職業中扮演什麼樣的角色？(Petocz et al., 2007)

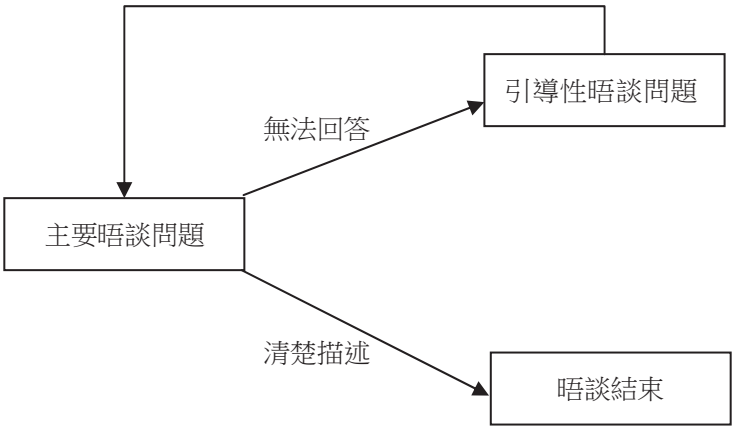

圖1：晤談流程圖

仍有8位學生(6.56%)需要以引導性問題做為輔助後，再針對主要晤談問題進行訪談，學生才能描述出對數學本質的想法。此外資料分析時研究者為了避免引導性晤談所造成的誘答偏差，因此以「主要晤談問題」所蒐集的資料進行分析。每位訪談者用錄音帶將學生的晤談過程記錄下來，後轉譯為逐字稿進行分析，早期的研究大部分將樣本設定為高中以上的學生，但是從本研究的晤談結果發現，國中學生其實已經能從其學習的經驗中對於數學觀念有某種程度的看法。

本研究於2011年3月1日至2011年4月16日間進行晤談，研究者徵求個案學生的學校、教師、家長與學生同意後，每個星期二與四的上午於各班的自習課中安排兩位訪談人員與學生同時進行晤談。因晤談的時間跨越三年級下學期第一次月考，因此研究者再徵求個案學生的學校、教師、家長與學生同意取得個案學生的三次月考數學成績，其中兩次為上學期第二次與第三次之月考成績，另一次為下學期第一次月考之數學成績進行平均，作為學生數學成就的分類依據。

四、資料分析

首先研究者於資料轉譯時將四個班的學生分別以A、B、C、D表示，並搭配其班級座號進行編碼，例如第一班7號編碼為A07。在資料分析的部分Richardson (1999)提到現象描述分析法的資料分析過程與紮根理論接近，研究者需不斷的重複閱讀轉譯的文字稿後，針對學生對現象的描述進行層次性的分類(Reid et al., 2003, 2005)是一種由下而上的分析方式。本研究在資料分析上參考Eklund-Myrskog (1997)、及Tsai與Kuo (2008)所提的方式進行分析。首先研究者不斷重複閱讀學生的轉譯資料後，將關於數學本質的句子進行畫線並將關鍵字圈出；接著針對畫線的句子與關鍵字進行異同性的比較，最後研究者建構出不同類型且具有層次性的數學觀念，用來界定學生所擁有的數學觀念。研究者從訪談資料中擷取相關句子進行分類說明如下：

A01：數學裡面有許多的數字如1、2、3、$\sqrt{5}$之類的數字和符號x、y、z，以及許多的公式，所以數學就是由這些數字、符號與公式所組合而成的。

B29：數學就是數字、圖形和加、減、乘、除運算這些啊！

研究者從A01語料中的關鍵字「數字」、「符號」與「公式」進行註記，作為辨識學生的數學觀念之關鍵；B29的回答也可發現類似的關鍵字如「數字」、「圖形」與「加、減、乘、除運算」。經由晤談資料的關鍵字分析其結構性意涵後發現，這兩位學生呈現出對數學的觀念是片段離散的元素觀念，因此研究者將這兩位學生歸類為，數學是數字、符號、圖形與公式等的元素觀念。此外當學生的數學觀念出現多元的面向時，研究者則摘錄其主要觀念，也就是用學生的中心想法來呈現(Tsai, 2009)。例如A07：「數學就是將加、減、乘與除的計算方法用在買東西算錢等生活應用上，讓我們生活能更加便利」。由晤談的內容可以知道學生對數學的觀念包含計算與生活上的應用，但是其主要觀念偏向於生活中的應用，因此研究者將其歸類於解決日常生活中的問題。

Marton (1981)提到現象描述分析法是要研究人對客觀現象的概念，也就是通過對人們所作的描述進行研究和分類，找出人們經歷現象的過程所形成的各種實質有差異性的概念。因此本研究的第一個階段，研究者期望藉由現象描述分析法，分析學生數學觀念上的差異。編碼的調整歷程：兩位評分者首先根據晤談資料將學生的數學觀念分類成1. 數學是數字、圖形、規則、與公式。2. 數學是加、減、乘、除計算。3. 數學是解決教科書中的數學問題等十種類型，再根據其數學結構間的關係將這十種類型歸納成六種焦點面向。例如：D27：「觀察生活中的事物，再從生活中尋找出來規律」；D27學生的晤談資料所提到的是建模循環歷程中的模式簡化階段(Lesh & Doerr, 2003)。B25：「從生活之中的現象推導出數學的規則後，以數字和符號形成數學的公式或定理」；B25學生所提的數學觀念則是建模循環歷程中的抽象(abstract)化模型階段(Lesh & Doerr)。研究者首先將這兩筆訪談資料分別歸類於5. 數學是數學規則的探索。6. 數學是數學模型的建立，由於這兩種類型均是數學建模循環歷程中的一部分，再將其劃歸為數學建模焦點。研究信度方面，研究者針對這十種類型的國中學生數學觀念，以1 ~ 10阿拉伯數字進行評分者一致性編碼，由研究者(R1)與協同研究者(R2)分別進行資料評判，整個研究過程共有122筆學生的晤談資料，兩位研究者在分類上達相同的有106筆，因此評分者一致性百分比為$\frac{106}{122}$ = .87且Kappa一致性係數為 .85，歐用生(1991)指出若評分者一致性能達 .80以上，即顯示研究分析具有良好信度。

研究的第二階段，研究者將學生的數學觀念，搭配其背景資料，也就是以學生的性別進行卡方考驗，瞭解不同性別學生在數學觀念上的差異以及此差異是否有達顯著考驗，接著研究者以高、中、低三組數學成就的學生先以描述統計的方式，瞭解不同數學成就學生其數學觀念上的差異，並評估其是否有達到顯著性。最後研究者將學生的數學本質觀念、數學學習成就與性別三種資料進行多變量分析，期望能找出個案學生在這三個成分之間的交互關係。

肆、研究結果

一、國三學生數學觀念

透過現象描述分析法，研究者將學生的訪談資料進行分析後發現，國中學生的數學觀念可分為以下十種類型，研究者進一步針對這十種數學觀念再進行歸納，歸納出六個主要的焦點面向如下所示：聚焦於元素、聚

焦於計算、聚焦於工具、聚焦於數學建模、聚焦於抽象思考以及聚焦於理解與探索。接著研究者則針對這些數學觀念進行描述，並提出訪談證據。

(一)聚焦於元素

這個焦點面向，學生是從數學的表徵元素來認識數學是一種離散的想法，他們認為數學是經由一些個體元素所組成的，例如數字、符號與運算等，晤談的過程中學生只有簡單的陳述數學可能包含的元素，並沒有提及元素間的關係。

1. 數學是數字、圖形、規則、與公式等元素組合

這個類型中學生將數學視為是數字、圖形、符號與公式等許多個別的元素所組成的集合，也就是一些小集合所組成的大集合。

A01：數學裡面有許多的數字如1、2、3、$\sqrt{5}$之類的數字和符號x、y、z，以及許多的公式，所以數學就是由這些數字、符號與公式所組合而成的。

A02：數學就是由很多數字與公式所組成的啊！

B17：數學是圖形、數字與作圖。

B29：數學就是數字、圖形和加、減、乘、除運算這些啊！

C10, C19：數字、圖形、單位與符號。

(二)聚焦於計算

這個焦點面向，學生從數學技能的角度來認識數學，學生認為數學是計算的方法與規則。

2. 數學是加、減、乘與除的計算方式

在這個類型方面，學生認為數學是藉由數字或符號所進行的加、減、乘與除的運算法則；或是運用數字來套公式的計算方式，學生只提到數學的運算方法，沒有提到數學的用途與功能。

A04, B31：數學就是計算，加、減、乘、除的計算。

B02, C20：運用數字進行加、減、乘與除等計算。

B23, C15：使用大量的數字進行計算。

C08, D13：可以用來計算的方程式或公式。

C11：是一種代數與幾何的計算(例如計算多項式的加、減、乘、除，以及圖形面積的計算)。

C22：一種計算的工具其中包含數字和符號(也就是加、減、乘、除運算啊！)。

(三)聚焦於工具

這個部分學生將數學視為是一種用來解決問題的工具，其中第三類型的學生認為數學是應用計算或公式來解決教科書上的數學練習問題，第四類型的學生則認為數學是與生活有關並能協助解決生活中的問題，以下針對這兩種類型進行說明。

3. 數學是解決教科書中的數學問題

這個類型的學生認為數學是用來解決教科書上所提及的數學問題，其方法是運用所學過的數學公式或概念，如：乘法公式或畢氏定理等，來解決教科書上的基本練習問題，其目的是為了能通過數學的測驗與完成數學的學習。這個階段的學生認為數學的目

的是運用所學的數學概念與計算解決課本中的數學問題，是一種偏計算與練習的數學應用。

A05：就是解決數學課本中的問題，這樣才能在考試中考及格啊！
C01：計算書上的數學題目。
C04：應用數學概念和計算解決老師講的數學問題，這樣才能把數學學好。
C06：計算和數字有關的數學問題。
D31：運用學過的數學概念算出課本題目中的答案。

4. 數學是解決日常生活中的問題

這個類型的中學生已經開始提到數學與實際生活間的關係，他們認為數學是為了解決現實生活中的問題而發展出來，因此將數學視為是一種工具，讓人們藉由數學來簡化生活中的問題後進而能解決問題，以便利我們的生活。從晤談的結果發現學生開始理解數學與生活間的關係，此類型的學生開始認為數學是為了協助人類簡化生活中的問題進而解決問題，因此數學是讓我們的生活日趨便利的工具。

A20, B04, B12：用來解決日常生活中的問題。
B14：數學是一種工具用來解決生活中的問題。
C18：人們用來解決生活上問題的方法(如買賣)。
C25：是一種用來簡化與解決生活中問題的工具。
D28：運用數學定義、概念與關係解決生活中的問題。

(四)聚焦於建模

這個焦點方面，學生認為數學是探索自然現象或日常生活中事物間的關係，藉由觀察與歸納的方法尋找出事物間的規則；類型六的學生則更進一步的提到，數學除了規則的探索外，還進一步將這些關係以數學的模型來進行表徵的過程。

5. 數學是數學規則的探索

學生認為數學不再是一種運算的工具，而是從自然現象中探索關係與規則的過程，這些關係蘊藏於我們所處的生活環境中，藉由觀察與歸納的方式將生活中的規則尋找出來，也就是Lesh與Doerr (2003)所提到的模式簡化階段。

A07：數學是因應生活的需要所產生，藉由數學可用來瞭解事物間的規則與關係。
A09：數學家從生活中的情境中所推導出的規則與公式。
A15：前人從生活中所發現的運算規則。
B15：數學是研究圖形與數字間的關係與規則。
D27：觀察生活中的事物，再從生活中尋找出來的規律。

6. 數學是數學模型的建構

此類型的學生對於數學的觀念仍是從生活現象出發，但是這些學生所關注的焦點除了從自然現象中觀察出數學的原理、原則外還進一步的提到運用數字與符號將數學的理論進行呈現，這也就是數學建模過程中的模式抽象化階段(Lesh & Doerr, 2003)。

B25：從生活之中的現象推導出數學

的規則後，以數字和符號形成數學的公式或定理。

B27：運用邏輯的思考與規則將生活中的現象化約成數學的公式。

C07：先人從日常生活中透過觀察和實驗後，所尋找到的數學公式或原理。

C29：數學家對自然世界中的現象產生疑惑之後，經由探索的過程中找出數學的規則後，以數字和符號來表達數學的理論與規則。

D28：數學是數學家從生活中以歸納的方法所發現的規律。

(五)聚焦於抽象思考

學生認為數學是一種運用數字與符號進行邏輯思考的抽象化思維歷程，Petocz等(2007)也提到抽象思考的數學觀念應該是一種純粹抽象化的過程概念。這個部分研究者從學生的晤談資料中發現了兩個層次。層次一就是類型7，學生認為數學是一種運用數字與符號進行的思考過程；層次二學生則認為數學是運用思考來解決數學難題的解題歷程屬於類型8。

7. 數學是抽象思考活動

數學是一種思維活動歷程，這個過程中學生認為數學是透過數字與符號進行思考且受到邏輯系統的規範，而數學定理與性質是在這樣的抽象思考過程中所產生。學生在這個類型中強調數學是思考的過程且在邏輯系統規範之下進行，此一數學觀念與Petocz等(2007)所提的抽象的數學觀相似，且這個層次的學生已經從具體物思考逐漸提升到藉由數字與符號來進行數學思考。

A01, A17：利用數字和圖形來進行邏輯思考。

A15, A19：是一種常常需要思考的科目，數學的特性就是需要一直的思考，也就是運用數字和符號進行邏輯推理的過程。

A29：數學是透過某些事物(例如：數字或符號)進行邏輯推理的過程。

A31, D3：數學是運用數字和符號進行邏輯思考後思考，將數學概念推導出來。

D07：是一種數字與符號的邏輯思考的過程，而數學的理論是在這樣的系統中推導出來的。

8. 數學是運用抽象思考解決複雜的數學問題

層次二的學生除了認為數學是一種邏輯思考活動外，晤談中還進一步瞭解這個層次的學生認為此邏輯思維活動的目的是為了解決更高層次的數學問題，並藉由問題解決的歷程得到新數學理論的啟發(例如：B14)，這個階段的數學觀念類似Tall (2004)所提從公設化的數學系統中思考數學的問題。

A16, C05：理解前人所提的數學概念後，並用邏輯思考來解決困難的數學問題。

B13：運用數字符號進行邏輯思考，解決前人未能解開的數學問題。

B14：數學家運用抽象思考為了解決複雜的數學問題，也就是從啟發到發現數學理論的歷程。

C17, D16, D20：運用數字和符號來思考數學難題。

C24：是一種思考解決困難數學的問題，藉由解決複雜數學問題的思考過程，讓頭腦靈活。

(六)聚焦於理解與探索

最後一個焦點，則是學生整合自然觀察與抽象思考所提出的觀念，這個類型的學生除了認為數學是用來協助人們理解現實世界的方法外，還有少數的學生能更進一步提到數學能協助人們持續發現新的自然現象與提供探索新自然現象的方式。

9. 數學是對於現實世界的理解

這個類型的學生認為數學概念與理論的發展，是為了理解與解釋我們所處的自然世界的現象，這樣的想法是一種整合性的數學建模觀念(Petocz et al., 2007)，透過假設與驗證的思維歷程來探索與解釋蘊含於生活中的數學現象。

A19：人類運用創意以數學邏輯思考來理解世界。

B16：數學是數學家從生活中透過思考所形成，且能用來解開科學理論與現象的鑰匙。

B25：數學是運用已知的理論來推論與解釋生活中的現象與問題。

C23：數學是人類發明數字和符號用來簡化現實現象後，用來理解所生活的世界。

D23：數學是先針對生活的現象進行猜測性的假設，之後設計數學實驗實施實驗(數學證明)來驗證自己的假設的過程。

10. 數學是對現實世界的持續探索

最後一種類型，學生除了認為數學能協助理解自然現象外，少數的學生還更深入的提到藉由已知的數學概念或理論，探討未知的自然現象，也就是在解釋自然現象的同時，又能從中發現新的現象或研究問題後進行更深一層持續性的探討。

B13：從前人尚未解決的數學問題中進行分析後，再從特殊的條件情況下所發現新的數學規則與理論，並可以進一步解釋現實生活。

C30：數學是發現新自然現象的過程，也就是數學家從數學公式中進一步的思考，提出新的數學方程式後發現新的現象。

D17：數學是從前人的數學問題中進行研究後，發現新的研究問題並進行再探索的循環過程。

二、國三學生數學觀念的分布情形

(一)整體國三學生數學觀念的分布概況

根據上述的分類，研究者以描述統計分析如下表3，結果發現只有6.56%的學生認為數學是數字、圖形與規則等元素，但是有19.67%的學生認為數學是加、減、乘與除的計算，是所有類型的數學觀念中比例最高的。在焦點面向上，應用和建模的人數比例相對其他焦點是較高的，在數學是工具觀念方面共有22.95%，其中9.80%的學生認為數學是用來解決教科書上的數學問題，另外13.10%的學生則認為數學是用來解決日常生活中的問題；數學建模方面，有14.80%的學生認為數學是規則與樣式(pattern)的探索過程，另外還有9.80%的學生認為數學除了是規則的探索外，還會用數字與符號將此

表3：國三學生數學觀念分布表

數學觀之焦點面向	人數	百分比	數學觀念之細分與描述	人數	百分比
聚焦於元素	8	6.56%	1. 數學是數字、圖形、規則、與公式	8	6.56%
聚焦於計算	24	19.67%	2. 數學是加、減、乘、除計算	24	19.70%
聚焦於工具	28	22.95%	3. 數學是解決教科書中的數學問題	12	9.80%
			4. 數學是解決日常生活中的問題	16	13.10%
聚焦於數學建模	30	24.59%	5. 數學是數學規則的探索	18	14.80%
			6. 數學是數學模型的建立	12	9.80%
聚焦於抽象思考	23	18.85%	7. 數學是邏輯思考活動	8	6.60%
			8. 數學是運用邏輯思考解決數學問題	15	12.30%
聚焦於理解與探索	9	7.38%	9. 數學是對於現實世界的理解	5	4.10%
			10. 數學是對現實世界的持續探索	4	3.30%
總數	122	100.00%		122	100.00%

關係以數學模型來呈現。然而在數學是抽象思考的焦點上(18.85%)，有6.56%的學生認為數學是運用數字與符號進行邏輯思考的歷程；另外12.30%的學生則認為數學是運用符號與邏輯思考來解決複雜數學問題的解題歷程。相對而言較少比例的學生認為數學是用來理解我們所生活的世界(7.38%)；這個部分有4.10%的學生認為數學是對現實世界的理解，另外3.30%的學生則能進一步認為數學是對現實世界的持續與進階探索；因此McLeod (1994)提到讓學生從理解世界的觀念來看數學是不容易的，但仍有少數的學生能從宏觀的角度思考數學的本質。

(二)國三男女生數學觀念分布概況

若從男女學生的數學觀念進行百分比分析如下表4，較多比例的女生認同數學是規則的探索與抽象思考的過程觀念。然而男學生在數學是加、減、乘與除計算以及解決教科書的數學問題之觀念上，所持的百分比則比女生要高，尤其是在計算類型上有26.32%男學生抱持此一觀念，女同學則只有13.85%。若從焦點面向進行分析，可發現男學生的數學觀念聚焦於計算及工具兩種焦點共占52.64%，而女學生在這兩看法上僅有33.85%。但是在數學建模及抽象思考上就有接近5成的女學生(49.23%)支持此一觀念，而男學生在這兩類型上只占36.84%；此外有9.23%的女學生聚焦於現實世界的理解而男生則僅有5.26%。整體而言，國中男學生的數學觀念比較偏向工具主義的焦點面向，認為數學是計算、解教科書的數學問題與解決日常生活的數學問題；而女學生偏重於數學建模與抽象思考，其數學觀念偏向更整合性的層次。研究者進一步將男女學生的數學觀念進行卡方百分比同質性檢定，從焦點面向(chi-square = 4.926, df = 5, p = .425)進行分析，結果並未達到顯著差異；此外在十種類型的數學觀念上，由於細格人數過少因此研究者不進行卡方檢定。

(三)國三學生數學觀念與數學成就間之概況

接著分析不同數學成就學生在數學觀念上的差異，研究者將學生分成高、中與低數學成就三個部分，針對其數學觀念之分布如下表5進行說明。首先從低數學成就的學生進行分析，有接近一半的學生(48.48%)認

表4：國三男女生數學觀念分布概況表

數學觀之焦點面向	男生 *n*(%)	女生 *n*(%)	數學觀念之細分與描述	男生 *n*(%)	女生 *n*(%)
聚焦於元素	3(5.26)	5(7.69)	1. 數學是數字、圖形、規則、與公式	3(5.26)	5(7.69)
聚焦於計算	15(26.32)	9(13.85)	2. 數學是加、減、乘、除計算	15(26.32)	9(13.85)
聚焦於工具	15(26.32)	13(20.00)	3. 數學是解決教科書中的數學問題	7(12.38)	5(7.69)
			4. 數學是解決日常生活中的問題	8(14.04)	8(12.31)
聚焦於數學建模	12(21.05)	18(27.69)	5. 數學是數學規則的探索	7(12.28)	11(16.92)
			6. 數學是數學模型的建立	5(8.77)	7(10.77)
聚焦於抽象思考	9(15.79)	14(21.54)	7. 數學是邏輯思考活動	2(3.51)	6(9.23)
			8. 數學是運用邏輯思考解決數學問題	7(12.28)	8(12.31)
聚焦於理解與探索	3(5.26)	6(9.23)	9. 數學是對於現實世界的理解	2(3.51)	3(4.62)
			10. 數學是對現實世界的持續探索	1(1.75)	3(4.62)
總數	57(100.00)	65(100.00)		57(100.00)	65(100.00)

註：男女生數學觀焦點差異(六種焦點) chi-square = 4.926, $df = 5$, $p = .425$ ($p > .050$)。

表5：國三高、中、低數學成就學生數學觀念分布概況表

數學觀念之焦點面向	數學觀念之細分與描述	高成就 *n*(%)	中成就 *n*(%)	低成就 *n*(%)
聚焦於元素	1. 數學是數字、圖形、規則、與公式	1(3.03)	3(5.36)	4(12.12)
聚焦於計算	2. 數學是加、減、乘、除計算	1(3.03)	7(12.50)	16(48.48)
聚焦於工具	3. 數學是解決教科書中的數學問題	2(6.06)	8(14.29)	2(6.06)
	4. 數學是解決日常生活中的問題	2(6.06)	10(17.86)	4(12.12)
聚焦於數學建模	5. 數學是數學規則的探索	9(27.27)	7(12.50)	2(6.06)
	6. 數學是數學模型的建立	6(18.18)	5(8.93)	1(3.03)
聚焦於抽象思考	7. 數學是邏輯思考活動	1(3.03)	3(5.36)	4(12.12)
	8. 數學是運用邏輯思考解決數學問題	5(15.15)	10(17.86)	0(0.00)
聚焦於理解與探索	9. 數學是對於現實世界的理解	3(9.09)	2(3.57)	0(0.00)
	10. 數學是對現實世界的持續探索	3(9.09)	1(1.79)	0(0.00)
總數		33(100.00)	56(100.00)	33(100.00)

註：高、中、低數學成就學生數學觀焦點差異(六種焦點) chi-square = 45.044, $df = 10$, $p = .000$ ($p < .050$)。

為數學僅是加、減、乘、除計算；此外還約18.18%的學生將焦點放在工具上，且其中又約有2/3的學生認為數學是用來解決日常生活中的問題。在元素焦點方面，12.12%的學生認為數學由數字、符號與圖形所組成的元素，遠高於高成就與中成就學生。雖然也有12.12%的學生認為數學是抽象思考的過程，但並沒有提到思考應用與理解與探索的部分。

中數學成就學生的數學觀念，在計算焦點上比例明顯降低，轉而偏向工具焦點(32.15%)，其中有14.29%的學生認為數學是用來解決教科書中的數學問題，另外17.86%的學生認為數學是用來解決日常生活中的問題。此外各約有兩成的中成就學生認為數學是建模與抽象思考這兩種面向，比低數學成就類型的學生高出約1/10；但是僅有5.63%的學生認為數學是理解世界的方式。

高數學成就的學生主要聚焦於數學建模(45.45%)，其中有27.27%的學生提到數學是規則的探索，另外還有18.18%的學生進一步指出除了探索自然世界的規則外，還將這些規則化約成數學模型來表徵。此外有接近兩成的學生將焦點放在抽象的思考活動方面，且高成就的學生在這個部分上的表現與中成就學生接近。最後在數學是理解世界方式的類型上，高數學成就的學生僅占18.18%，比例雖不高但是已經遠高過其他數學成就的學生；這個部分有一半的學生認為數學是對於現實世界的理解，另一半的學生則進階的提到數學是對現實世界的持續探索。

最後研究者將學生的數學成就與其數學觀念，進行卡方考驗，探討高、中、低數學成就的學生，在六種不同焦點的數學觀念百分比同質性考驗(chi-square = 45.044, df = 10, p = .000)達顯著差異；十種類型的數學觀念上，因為有些細格人數過少因此研究者不進一步做卡方檢定。雖是如此，但是在不同數學成就的六種焦點面向上，仍有子類別內人數太少的現象，在此研究者僅做保守的解釋。並期待未來的研究能蒐集較大的樣本，解決統計考驗上的限制。

三、綜合討論

(一)國三學生數學觀念表現之討論

研究者將國中學生數學觀念與文獻進行比較如下表6，聚焦於元素方面的學生認為數學是由數字、圖形、單位或符號等元素所組成的，此類型與Crawford等(1994)研究中A類型：數學是數字、圖形、規則、與公式等元素組合相似，但Crawford等在此類型中還強調在數字的應用。第二種類型的學生主要將數學視為是運用數字進行單純的加、減、乘與除運算，與Grootenboer (2003)所提數學是數字的加、減、乘與除運算類型相同。聚焦於工具焦點的學生將數學視為是一個工具袋，是真理、規則及技巧聚集而成(Ernest, 1989)，這個部分就是Petocz等(2007)所提構成要素，然而研究者從晤談中發現此觀念還蘊含了兩個層次的數學觀。層次一學生認為數學是用計算或公式來解決教科書上基本的數學問題；而層次二的學生開始將數學與生活結合，認為數學是協助人類解決生活中簡單問題的工具，如算錢與結帳等應用和Young-Loveridge等(2006)的數學用途觀念一樣。建模焦點方面，這個部分與工具焦點相比更強調數學與物質世界的連結(Petocz et al.)，不僅將數學的基本運算或公式應用於生活中，而是把現實世界中複雜的問題，轉化為數學的模型後，進行深入的探索。這個焦點可細分為下面兩種類型，類型五是學生認為數學是一種關係與規則的探索過程，也就是Lesh與Doerr (2003)所提的模式簡化階段；類型六則進一步透過數學關係的探索形成數學模型，就是數學建模過程中的模式抽象化階段(Lesh & Doerr)。聚焦於抽象思考這個部分與建模焦點不同處在於，數學是運用數字與符號進行邏輯抽象思考，是一種跳脫現實抽象的數學世界；學生的晤談資料又可細分為運用數字與符號進行邏輯思考，與運用抽象思考來解決數學難題的解題活動這兩個層次，與Crawford等所提的C、D類型相同。最後在理解與探索的 焦點方面，將數學視為是一種理解世界的方式(Crawford et al.; Petocz et al.; Reid et al., 2003)，其層次比數學建模焦點更為全面和完整，與Kehle與Lester (2003)所提的數學建模循環歷程相似，學生一開始先透過瞭解、分析和探索現象來建立數學模型，接著運用此數學模型來簡化與解釋一切已知自然世界的現象，這個部分與Petocz等和Reid等所提的生活類型相

表6：國三學生數學觀念與文獻分析比較表

焦點面向	本研究數學觀念細分	文獻的數學觀念與說明	本研究數學觀念說明
聚焦於元素	1. 數學是數字、圖形、規則、與公式等元素組合	數學是數字的學習和應用各種方法來改變數字(Crawford et al., 1994)。	數學是數字、圖形、符號與公式等許多各別的元素所組成的集合。
聚焦於計算	2. 數學是加、減、乘與除的計算	數學是加、減、乘與除基本計算(Grootenboer, 2003; Petocz et al., 2007)。	數學是藉由數字或符號所進行的加、減、乘與除的基本運算。
聚焦於工具	3. 數學是解決教科書中的數學問題	構成要素：數學被認為是一個工具箱，如公式，方程和規則用來解決數學問題(Petocz et al., 2007)。	這個類型的學生認為數學是用所學過的數學公式或概念來解決教科書上的數學問題。
	4. 數學是解決日常生活中的問題	數學的用途：日常生活、未來(Young-Loveridge et al., 2006)。	將數學視為是一種工具與方法，人們藉由數學來簡化生活中的問題後進而解決問題，以便利我們的生活。
聚焦於建模	5. 數學是數學規則的探索		數學是從自然現象中以觀察與歸納的方式探索關係與規則的過程，就是Lesh與Doerr (2003)所提的模式簡化階段。
	6. 數學是數學模型的建構	模型：數學是建構模型與使用模型的過程，就是將部分現實問題轉換成為數學模型進行處理(Reid et al., 2003)。 建模：Petocz等(2007)將模型的觀念轉譯成建模觀念，是將數學與物質世界進行強力連結。	學生關注的焦點除了從自然現象中觀察出數學的原理、原則外還進一步的提到運用數字與符號將數學的理論進行呈現，這也就是數學建模過程中的模式抽象化階段(Lesh & Doerr, 2003)。
聚焦於抽象思考	7. 數學是抽象思考活動	數學是複雜的邏輯系統，也是一種思考方式：數學是運用數字和符號進行精確的邏輯思考(Crawford et al., 1994)。 抽象：數學是邏輯系統或結構，數學是困難、純粹和抽象的(Petocz et al., 2007)。	數學是一種思維的活動歷程，在這個過程中學生認為數學是透過數字與符號進行思考且受到邏輯系統的規範。
	8. 數學是運用抽象思考解決複雜的數學問題	數學是複雜的邏輯系統可應用於數學解題：數學是抽象的推理過程，可用來解決問題(Crawford et al., 1994)。	數學是一種邏輯思考活動外，這個層次的學生認為邏輯思維的目的是為了解決更高層次的數學問題。
聚焦於現實世界的理解與持續探索	9. 數學是對於現實世界的理解	生活：數學是生活中不可缺少的，且現實世界可以用數學來表示，是比建模觀念更全面的方式(Petocz et al., 2007)。	數學概念與理論的發展，是為了理解與解釋我們所處的自然世界的現象，這樣的想法是一種整合性的數學建模觀念。
	10. 數學是對現實世界的持續探索		數學從理解自然現象的過程，發現新現象或研究問題後進行更深層的探討與精鍊的歷程。

同，研究者還發現有少數的學生認為數學除了能解釋自然現象外，還能不斷發現或提出更深入的問題來對自然世界進行更深入的探索。

接著針對本研究結果與國外大學生及中小學生的數學觀比較後發現，在元素、計算與工具等觀念上有一致性的發現，然而在建模觀念方面，國外中小學的研究只有提到數學的應用，並沒有提到數學結構與現實世界的連結。雖然Grootenboer (2003)和Young-Loveridge等(2006)的研究中有提到思考與問題解決，但是並沒有指出思考過程中的邏輯關係與抽象化歷程，而這些在本研究與國外大學生的研究中學生有較深入的描述。此外建模方面國外大學生的研究指出數學是將部分現實問題轉換成為數學模型進行處理(Reid et al., 2003)，本研究從晤談資料中可加以細分成規則探索與模型建構這兩個部分；在現實世界的理解上Petocz等(2007)的研究只提到數學是對於現實世界的理解，本研究還發現有少數學生認為數學是對現實世界持續探索的動態循環歷程。整體而言國外中小學生的數學觀比較偏向計算與工具方面，而大學生的數學觀除了計算與工具等觀念外，還強調建模、抽象思考與理解世界。本研究的樣本雖是國中階段的學生，但已學過大部分國中數學內容其中還包含數學證明的部分，因此數學觀以工具、建模與抽象思考為主；但研究者並未發現Young-Loveridge等所提的享受觀念，這可能受到國三升學壓力所致。

從上述的數學焦點來討論彼此間的層次關係，第一個層次將數學看做是數字、圖形、符號與公式等的元素觀念(Crawford et al., 1994)是一種離散片段缺乏數學結構的看法；另外一部分學生把數學視為加、減、乘與除的運算(Grootenboer, 2003; Petocz et al., 2007)，這兩個類型是Crawford等和Petocz等認為是數學觀念中最基本的層次，前者是從符號表徵的角度來描述數學，後者則是以數學技能的角度，因此研究者將此兩種類型視為同一層次。第二層次則是將數學視為是應用的工具與Ernest (1989)所提工具主義觀點相似，國中學生將數學視為是一種計算工具分別用來解決教科書與生活中的問題。第三個層次則包含數學建模與抽象思考活動這兩種類型，Petocz等將這兩種數學觀念視為同一層次，且Tall (2002)提到數學思考可以分為兩個維度，從自然事物開始的自然思考，另一個則從符號開始進行的形式思考，數學建模是透過情境的轉化將現實生活中特定問題的條件轉譯成數學模型進行瞭解、探索與解決(Reid et al., 2003)，是一種從自然情境出發的思維；而抽象的觀念則是以邏輯系統出發的思維模式，用來思考數學世界中的複雜問題(Crawford et al.)。因此建模與抽象這兩個層次比「工具」的焦點面向要高，因為「工具」的焦點面向偏向透過公式使用來解決例行性數學問題或簡單的生活問題，僅停留工具使用的層次。最後一個層次將數學視為是理解世界的方式，此焦點更強調數學與現實世界的連結，人類透過數學來理解自然界所產生的現象，Petocz等提到這個層次與數學建模和抽象思考相比是以一種以更寬廣全面的觀點來看待數學。綜合上述所論，研究者參考Petocz等的大學生數學觀念關係圖，描繪出國三學生的數學觀念關係圖如圖2。

(二)國三學生數學觀念與性別差異之討論

本研究將國中男女學生的數學觀念進行量化分析，發現若將性別與數學觀念進行卡方百分比同質性檢定並未達到顯著差異，此結果與Li (1999)與Lepmann與Afanasjev (2005)的研究吻合；這說明了男女生在數學

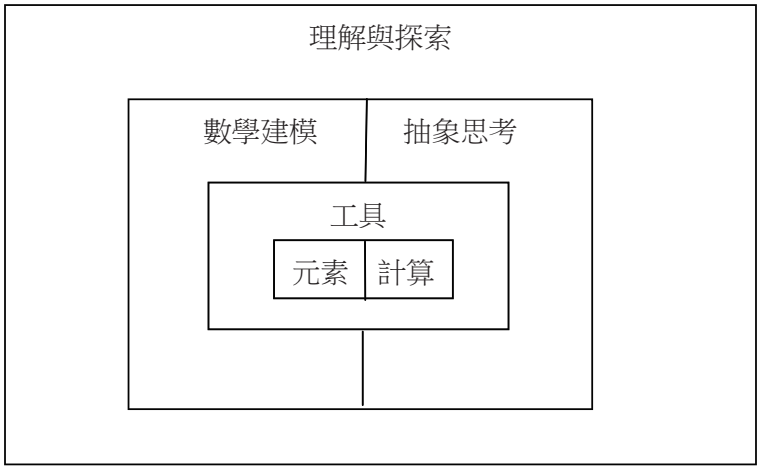

圖2：國三學生數學觀念關係圖

本質觀念上可能會有些微的落差，但並沒有達成顯著差異。

從描述統計來分析，在數學技能的觀念上約有26.32%的男生認為數學是加、減、乘與除的計算而女生在這個部分只有13.85%，此結果與Stage與Kloosterman (1995)針對大學生進行的研究接近，研究中指出男大學生認為數學是一種運算方式的看法比女大學生多。此外本研究有26.32%的男生抱持著數學是應用工具的觀念女生只有20.00%，這個部分有較多的男生認為數學就是解決教科書中的數學問題，女學生傾向認為數學是應用公式解決生活中的問題，此結果與Brunner, Krauss與Kunter (2008)研究吻合，該研究指出九年級的男生在處理教科書中的數學問題表現要比女生好，Geist與King (2008)研究也指出男學生在進行數學思考時或學習數學時偏好透過教科書上的數學問題進行數學推理。這些研究結果間接解釋為何本研究中較多男學生認為數學是一種解決教科書上的數學問題，可能是受到男女學生的數學學習傾向的影響。

接著在數學建模上，有16.92%的女學生認為數學是規則的探索，男學生僅占12.28%，這可能是因為，女生進行數學思考時偏好以歸納的方式，也就是藉由觀察與歸納後形成一般化的數學原則，來解釋經驗世界的問題(Geist & King, 2008)。然而在數學是形式化的抽象本質觀念上，Zakaria與Musiran (2010)的研究發現女生認為數學是絕對正確且形式化的抽象觀念的比例比男生要高，本研究也有類似的結果，研究者發現接近21.54%的女學生認為數學是一種嚴謹的邏輯思考，略高於男學生(15.79%)。然而Gurian (2001)的研究卻指出男生在運用符號進行演繹思考的推理表現較好，女生則在運用具體物進行歸納思考的表現較為突出，與本研究結果有較多女學生傾向認為數學是一種抽象思考過程有所落差，這是未來研究可以繼續加以探討的議題。

(三)國三學生數學觀念與數學成就之討論

本研究將學生的數學成就與數學觀念進行卡方考驗，研究者以六種主要不同焦點的數學觀念進行的百分比同質性考驗(chi-square = 45.044, df = 10, p = .000) p < .050已達顯著差異。此研究結果與Garofalo (1989)、Crawford等(1998)及House (2006)等

學者的研究結果相互呼應。值得一提的是Lepmann與Afanasjev (2005)研究以7年級學生為樣本進行調查，雖然結果指出不同數學成就的學生在其數學觀念上有所不同，但並未達顯著差異，本研究以9年級的學生為樣本進行考驗，結果已達顯著差異，因此研究者推測可能因為國中階段的數學學習成長轉變所致。

接著研究者將低、中、高三種不同數學成就學生的數學觀念進行分析與比較，發現低數學學習成就的學生，有接近一半(48.48%)的學生單純的認為數學是一種加、減、乘與除的運算，這與Lepmann與Afanasjev (2005)的研究接近。中數學成就的學生在數學是加、減、乘與除的觀念與低數學成就的學生相比降為12.50%，但是在數學是工具的焦點上提升到32.15%；此外在數學建模的焦點從9.09%提升到21.43%；運用邏輯思考解決數學問題上占有約17.86%，這個部分的比率高於其他數學成就的學生。高數學成就學生的工具焦點與中、低數學成就學生相比降為12.12%，在數學建模的觀念則提升到45.45%是所有成就中最高的；且在數學是理解世界方式則有18.18%，比中、低數學成就的學生還高出約13/100以上，此結果顯示有較多高成就的學生比低數學成就學生認同數學是一種理解世界的方式，以較為寬廣的數學觀念(Petocz et al., 2007)來看待數學。因此整體而言，不同數學成就學生的數學觀念是有所差異，低數學成就的學生所擁有的數學觀念偏向局部的元素與計算的觀念，中數學成就的學生逐漸轉向應用、建模與抽象思考的觀念，他們偏向認為數學是一種運用計算或公式來解決課本與生活中的問題。高數學成就的學生認為數學是建模的過程或是理解世界的方式，逐漸轉向一個較寬廣且整合的角度來看待數學。

(四)國三學生數學觀念、數學成就與性別之討論

研究者將學生的數學觀念、性別與成就三個變相進行卡方百分比同質性考驗，研究結果發現，不同數學成就的男女生其數學觀念間並沒有顯著性差異，如表7所示。

最後研究者將學生的數學觀念、性別與數學成就三個變相轉換成百分比如下表8進行分析。從不同數學成就的男女生其數學觀念來看，低數學成就的男生普遍抱持計算的觀念(61.11%)；低數學成就的女生雖然在此一觀念比例也是最高的(33.33%)，但是在元素、工具與抽象思考的焦點上亦占1/5，這三個部分都比低數學成就的男生要高。中數學成就學生的表現上，中成就女生的數學觀念在計算的部分比低數學成就的女生減少，且逐漸將焦點轉向工具、建模與抽象思考這三個面向，而中數學成就男生將焦點著重於數學工具焦點上占39.13%。高數學成就方面，高數學成就的女生這個部分的表現集中於數學建模(52.94%)，而數學是理解世界的方式的類型上百分比也高於高成就的男生；

表7：國三高、中、低數學成就的男女學生其數學觀念卡方檢定表

		高數學成就	中數學成就	低數學成就
		性別	性別	性別
數學觀念	chi-square	4.908	2.355	5.885
	df	5	5	4
	Sig.	.427(a, b)	.798(a)	.361(a)

表8：不同數學成就與性別的國三學生其數學觀念分布概況表

數學觀念之焦點面向	高數學成就(%)		中數學成就(%)		低數學成就(%)	
	男	女	男	女	男	女
聚焦於元素	0.00	5.88	8.70	3.03	5.56	20.00
聚焦於計算	6.25	0.00	13.04	12.12	61.11	33.33
聚焦於工具	18.75	5.88	39.13	27.27	16.67	20.00
聚焦於數學建模	37.50	52.94	17.39	24.24	11.11	6.67
聚焦於抽象思考	25.00	11.76	17.39	27.27	5.56	20.00
聚焦於理解與探索	12.50	23.53	4.35	6.06	0.00	0.00
總百分比	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

反觀高數學成就的男生則聚焦於數學建模(37.50%)與抽象思考活動(25.00%)。

整體而言，低數學成就男女學生的數學觀念是以計算的觀念為主，女學生在這個部分的數學觀念稍微分散，在數學是元素、應用及抽象思考觀念上也有約1/5的比重。中數學成就的男生在計算類型比例與低數學成就的男生相比有下降的現象，有從運算的焦點轉向工具主義的應用焦點的趨勢；中數學成就的女生則是聚焦於工具、建模及抽象思考活動這三種類型。高成就的學生逐漸將焦點轉向建模的觀念，但是在數學是抽象思考活動與數學是理解世界的方式上，比其他成就的學生多，尤其是高成就的女生在數學是理解世界的方式上的人數偏多，轉向較為寬廣的數學觀念。由於本研究樣本人數僅有一百多人，因此分散之後每個細格的人數間差異並不多，所以僅能初步的略述其差異，並沒有深入的描述彼此之間細微的轉變。

伍、結論與建議

一、結論

(一)國三學生常見的數學觀念聚焦於數學是計算、應用與建模

中學生的數學觀念主要分為以下六種焦點面向，聚焦於元素、計算、工具、數學建模、抽象思考活動與現實世界的理解。此一研究結果綜合了Crawford等(1994)和Petocz等(2007)的研究成果，因此研究者從學生的資料進行分析後，發現這六種焦點方面中學生偏向認為數學是計算(19.67%)、數學是應用的工具(22.95%)以及數學建模過程(24.59%)，這三種類型的百分比均接近1/5是所有焦點中最高的。在數學是工具的焦點面向可再細分為兩個層次，第一層次學生認為數學是用計算或公式來解決教科書上基本的數學問題(9.80%)，屬於類型3的數學觀念，而層次二的學生開始將數學與生活結合，認為數學是協助人類解決生活中計算問題的工具，是屬於類型4的數學觀念，這兩個部分以應用計算與公式解決日常生活的問題類型上比重較高(13.10%)。而數學建模類型上，可細分為規則的探索與數學模型的建立，前者是從現象中找出規則，後者則是將這些規則轉換成數學的模型來呈現，這個部分學生們大多只提到數學是規則的探索(14.80%)。因此在這六種主要焦點面向上，中學生偏好數學是建模的焦點(24.59%)，第二高的類型是數學是工具的焦點占22.95%，接著則是將數學視為是單純的加、減、乘與除的計算焦點占19.67%；然而在數學是抽象思考的焦點上也有18.85%的比例。但在數學是由數字、

圖形、單位或符號等元素所組成的局部觀念(6.56%)，以及數學是理解世界方式的寬廣觀念(7.38%)，這兩種兩極的觀念所占的比率比較少。

(二)國三男生的數學觀念著重於計算與應用，女學生則是在數學建模與抽象思考的過程觀念上略高於男生

男女學生在數學觀念上的百分比同質性考驗結果並未達顯著差異，若是從百分比進行分析可發現，超過1/4的男學生認為數學是加、減、乘與除的計算，另外還有26.32%的男學生認為數學是工具，將這兩個部分合併起來則有52.64%的男生支持這兩個類型的觀念；女生在這兩個類型只有占33.85%。而在數學建模的類型上，女學生在這個部分的比例是所有焦點中最高的占27.69%，比男學生21.05%要高。此外在抽象思考與解題活動的焦點上女生占21.54%，男生僅有15.79%；且這個部分男生比較偏向認為數學是運用邏輯思考解決數學問題這個類型(12.28%)。

(三)國三低、中、高數學成就學生的數學觀念是從局部的觀念朝向寬廣的整合性觀念

本研究依據學生月考表現將國三學生分為低、中、高三種數學成就類型，進行百分比同質性考驗結果p = .000已達顯著水準。研究結果還發現低數學成就學生的數學觀念偏向數學是計算(48.48%)以及數學是工具的焦點(18.18%)。中數學成就學生的數學觀念，以數學是工具為主(32.15%)，不過在數學建模(21.43%)及抽象思考活動(23.22%)這兩種類型與低數學成就學生相比有明顯的增加；因此從低與中數學成就學生的數學觀念轉變來說，已經從數學是元素或工具的焦點轉向數學建模與抽象思考活動焦點。高數學成就與中數學成就的學生相比在數學是計算與工具這兩種焦點上從44.65%降為15.15%有明顯降低的趨勢；而在數學建模(45.45%)及數學是理解世界的方式(18.18%)這兩種類型有明顯的提升，這顯示高數學成就學生的數學觀念已經從工具主義的焦點朝向建模或更寬廣整合性的焦點邁進。從上述的結果可以瞭解低中高數學成就學生的數學觀念是從局部的元素與工具的焦點轉向工具、建模與抽象思考的焦點，最後朝向更寬廣整合性對世界理解的焦點前進。

二、建議

根據前述的結果與討論，本研究提出教學與研究兩方面的建議：

(一)教學上的建議

研究結果發現教師在數學教學時首先可以讓學生認清數學的元素與加、減、乘與除的計算對數學而言僅代表局部的觀念，透過數學建模的活動以及邏輯推理的過程來體驗數學理論的建立，最後讓學生能夠藉由這些數學理論來解釋生活中的現象。性別差異上男學生則較能接受藉由教科書的數學問題引導其數學學習，而女學生則偏好透過建模的活動建構數學的概念與理論，Geist與King(2008)也提到女生進行數學思考時偏好以歸納思考的方式解決日常生活中的問題，因此教師在數學教學時可多融入日常生活的議題來引導女學生進行建模來學習數學。

(二)研究上的建議

本研究首先透過現象描述分析法找出中學生的數學本質觀念，研究方法上因為數學觀念對少數國中學生較為抽象，因而引入引導性晤談問題，但學生對數學觀念的描述可能也會受到引導性晤談問題的誘答，所以後

續研究可以開發更合適的晤談問題或工具進行瞭解。接著在研究結果方面，研究者針對不同性別以及不同數學成就的數學觀念分別進行分析與比較，此研究結果僅能初步說明不同性別以及不同數學成就學生的數學觀念分布概況，並無法深入解釋數學觀念、數學成就與性別間的關係。而國三男生在數學是計算與工具的比重比女生高，女學生則在數學是建模活動與抽象思考過程觀念略高於男生，這些結果的原因為何？此外低數學成就學生之數學觀念以局部的元素與工具主義的焦點為主，中數學成就學生則偏向數學建模與邏輯思考的活動焦點，而高數學成就學生的數學觀念則朝向寬廣的整合性的數學解釋焦點前進，不同成就的學生在數學學習過程中受到哪些因素的影響而導致其數學觀念有所差異？由於本研究屬於初探性的研究，以立意取樣的方式進行，雖具有內在效度，但因樣本抽樣的限制而缺乏外在效度，因此研究結果僅提供相關研究的參考，且需保守的進行統計解釋。後續研究可朝向開發國中學生數學觀念問卷的方向發展，並以隨機抽樣的方法讓樣本更具有代表性，如此才能更清楚客觀的瞭解臺灣學生的數學觀念，進而設計相關的課程藉此引導與瞭解學生數學觀念的轉變與演化，上述的這些問題是未來研究方面值得深入探索的議題。

參考文獻

1. 黃國清(2008)。數學學習成就之性別差異研究——以九年一貫課程七年級數學綱要為例。**中等教育**，**59**(4)，40-56。
2. 歐用生(1991)。內容分析法。收錄於黃光雄、簡茂發(編著)，**教育研究法**(頁229-253)。臺北市：師大書苑。
3. Agudelo-Valderrama, C. (2004). *Explanations of attitudes to change: Colombian mathematics teachers' conceptions of their own teaching practices of beginning algebra*. Unpublished doctoral dissertation, Monash University, Melbourne, Australia.
4. Agudelo-Valderrama, C. (2008). The power of Colombian mathematics teachers' conceptions of social/institutional factors of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 37-54.
5. Åkerlind, G. S. (2005). Variation and commonality in phenomenographic research methods. *Higher Education Research & Development*, *24*(4), 321-334.
6. Brunner, M., Krauss, S., & Kunter, M. (2008). Gender differences in mathematics: Does the story need to be rewritten? *Intelligence*, *36*(5), 403-421.
7. Cano, F., & Cardelle-Elawar, M. (2004). An integrated analysis of secondary school students' conceptions and beliefs about learning. *European Journal of Psychology of Education*, *19*(2), 167-187.
8. Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J., & Prosser, M. (1994). Conceptions of mathematics and how it is learned: The perspectives of students entering university. *Learning and Instruction*, *4*(4), 331-345.
9. Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J., & Prosser, M. (1998). University mathematics students' conception of mathematics. *Studies in Higher Education*, *23*(1), 87-94.
10. da Ponte, J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. In Bazzini, L. (Ed.), *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the fifth international conference on systematic cooperation between*

theory and practice in mathematics education (pp. 169-177). Pavia, Italy: ISDAF.
11. Eklund-Myrskog, G. (1997). The influence of the educational context on student nurses' conceptions of learning and approaches to learning. *British Journal of Educational Psychology*, *67*(3), 371-381.
12. Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of art* (pp. 249-254). London: Falmer.
13. Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.
14. Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performance. *The Mathmatics Teacher*, *82*(7), 502-505.
15. Geist, E. A., & King, M. (2008). Different, not netter: Gender differences in mathematics learning and achievement. *Journal of Instructional Psychology*, *35*(1), 43-52.
16. Grootenboer, P. J. (2003, July). *The affective views of primary school children*. Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference. Honolulu, HI.
17. Grouws, D. A., Howald, C. L., & Colangelo, N. (1996, April). *Student conceptions of mathematics: A comparison of mathematically talented students and typical high school algebra students*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. New York.
18. Gurian, M., Henley, P., & Trueman, T. (2001). *Boys and girls learn differently! A guide for teachers and parents*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
19. Hall, R. D. G. (2002). *An analysis of views of the nature of mathematics by gender*. Retrieved August 17, 2011, from http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome16/docs/hall.pdf
20. Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 9-28). Boston, MA: Birkhauser.
21. House, J. D. (2006). Mathematics beliefs and achievement of elementary school students in Japan and the United States: Results from the third international mathematics and science study. *The Journal of Genetic Psychology*, *167*(1), 31-45.
22. Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford, UK: Basil Blackwell.
23. Johansson, B., Marton, F., & Svensson, L. (1985). An approach to describing learning as change between qualitatively different conceptions. In A. L. Pines & L. H. T. West (Eds.), *Cognitive structure and conceptual change* (pp. 233-257). Orlando, FL: Academic Press.
24. Kehle, P. E., & Lester, F. K. (2003). A semiotic look at modeling behavior. In R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 97-122). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
25. Kesler, R. J. (1985). *Teachers' instructional behavior related to their conceptions of teaching and mathematics and their level of dogmatism: Four case studies*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, GA.

26. Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(1), 61-88.
27. Lakatos, I. (1986). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 29-48). Boston, MA: Birkhauser.
28. Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 597-688). New York: Macmillan.
29. Lepmann, L., & Afanasjev, J. (2005). Conceptions of mathematics in different ability and achievement groups among 7th grade students. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Proceedings of NORMA 01, the 3rd Nordic Conference on Mathematics Education* (pp. 185-194). Linköping, Sweden: Linköping University.
30. Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
31. Li, Q. (1999). Teachers' beliefs and gender differences in mathematics: A review. *Educational Research*, *41*(1), 63-76.
32. Martin, M. O., Mullis, I. V. S., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
33. Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
34. Marton, F. (1981). Phenomenography–Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, *10*, 177-200.
35. Marton, F. (1988). Phenomenography: exploring different conceptions of reality. In D. M. Fettermann (Ed.), *Qualitative approaches to evaluation in education: The silent scientific revolution* (pp. 176-205). New York: Praeger.
36. Mason, L. (2003). High school students' beliefs about maths, mathematical problem solving, and their achievement in maths: A cross-sectional study. *Educational Psychology*, *23*(1), 73-85.
37. McLeod, D. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 637-647.
38. Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics (Journal for Research in Mathematics Education: Monograph 4)* (pp. 7-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
39. Nyaumwe, L. (2004). The impact of full time student teaching on preservice teachers' conceptions of mathematics teaching

and learning. *Mathematics Teacher Education and Development*, *6*, 19-23.

40. Petocz, P., Reid, A., Wood, L. N., Smith, G. H., Mather, G., Harding, A., et al. (2007). Undergraduate students' conceptions of mathematics: An international study. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(3), 439-459.
41. Ponte, J. P., Matos, J. F., Guimaraes, H. M., Leal, L. C., & Canavarro, A. P. (1994). Teachers' and students' views and attitudes towards a new mathematics curriculum: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(4), 347-365.
42. Putnam, H. (1986). What is mathematical truth? In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 49-65). Boston, MA: Birkhauser.
43. Reid, A., Petocz, P., Smith, G. H., Wood, L. N., & Dortins, E. (2003). Mathematics students' conceptions of mathematics. *New Zealand Journal of Mathematics*, *32*(Suppl.), 163-172.
44. Reid, A., Wood, L. N., Smith, G. H., & Petocz, P. (2005). Intention, approach and outcome: University mathematics students' conceptions of learning mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(4), 567-586.
45. Richardson, J. E. T. (1999). The concepts and methods of phenomenographic research. *Review of Educational Research*, *69*(1), 53-82.
46. Schunk, D. H. (1996). Goal and self-evaluative influences during children's cognitive skill learning. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 359-382.
47. Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.
48. Stage, F. K., & Kloosterman, P. (1995). Gender, beliefs and achievement in remedial college-level mathematics. *Journal of Higher Education*, *66*(3), 294-311.
49. Star, J. R., & Hoffmann, A. J. (2005). Assessing the impact of standards-based curricula: Investigating students' epistemological conceptions of mathematics. *The Mathematics Educator*, *15*(2), 25-34.
50. Tall, D. (2002, November). *Differing modes of proof and belief in mathematics*. Paper presented at the 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand. Taipei, Taiwan.
51. Tall, D. (2004, July). *Thinking through three worlds of mathematics*. Paper presented at the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway.
52. Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 105-127.
53. Thompson, A. G. (1992). Teacher beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.
54. Tsai, C. C. (2009). Conceptions of learning

versus conceptions of web-based learning: The differences revealed by college students. *Computers & Education*, *53*(4), 1092-1103.

55. Tsai, C. C., & Kuo, P. C. (2008). Cram school students' conceptions of learning and learning science in Taiwan. *International Journal of Science Education*, *30*(3), 353-375.
56. Wong, N. Y. (2000). The conception of mathematics among Hong Kong students and teachers. In S. Götz & G. Törner (Eds.), *Proceedings of the MAVI-9 European workshop* (pp. 103-108). Duisburg, Germany: Gerhard Mercator Universität Duisburg.
57. Young-Loveridge, J., Taylor, M., Sharma, S., & Hawera, N. (2006). Students' perspectives on the nature of mathematics. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces: Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 583-590). Adelaide, Australia: MERGA.
58. Zakaria, E., & Musiran, N. (2010). Beliefs about the nature of mathematics, mathematics teaching and learning among trainee teachers. *The Social Sciences*, *5*(4), 346-351.

科學教育學刊
2012, 第二十卷第三期, 267-294

Chinese Journal of Science Education
2012, 20(3), 267-294

Ninth Grade Students' Conceptions of Mathematics

Hao-Jan Lee[1,*] and Shian Leou[2]

[1]Kaohsiung Municipal Guanghua Junior High School
[2]Department of Mathematics, National Kaohsiung Normal University

Abstract

It is well established in the research literature that student's conceptions of mathematics influence their mathematics learning and problem solving. The purpose of this study was to explore junior high school students' conceptions of mathematics. Interview data from 122 junior high school students in Kaohsiung were collected and analyzed using phenomenographic methods. Data from the interviews suggests that students' conceptions of mathematics focus on six dimensions: elements, calculation, instrument, modeling, abstract thinking and understanding. Analysis of the data showed no gender differences on the various dimensions; however, a significant difference between mathematics achievement and conceptions of mathematics (p = .000) was observed. The analysis also suggests that high achieving mathematics students hold broader conceptions of mathematics than low achieving mathematics students and that middle achieving mathematics students appear to focus on application and modeling. It is hoped that the results of this study will provide insight for mathematics teachers and researchers into the views students hold about mathematics and the basis for helping students improve their mathematics learning.

Key words: Gender Different, Mathematics Achievement, Conceptions of Mathematics

* Corresponding author: Hao-Jan Lee

06-李浩然.indd 294 2012/7/17 下午 12:42:57