科學教育學刊
2012, 第二十卷第六期, 563-586

Chinese Journal of Science Education
2012, 20(6), 563-586

結合鷹架教學與非例行性數學問題發展學生數學解題能力之研究

簡清華[1]　**蔡佳霏**[2、*]

[1]國立屏東教育大學　數理教育研究所
[2]屏東縣餉潭國民小學

(投稿日期：民國101年2月4日，修訂日期：民國101年8月27日，接受日期：民國101年8月27日)

摘要：本研究的目的在於探討教師及同儕鷹架，影響學生解非例行性數學問題時的解題表現及解題思維。研究個案是從屏東縣某國小二年級學生中，依據在校數學成績，篩選三位學生，其中兩位為數學高程度，一位是中程度；由三人組成一共同學習小組，安排每週一次約一小時的非例行數學問題解題學習，研究時間為期十週。研究期間，研究者透過教室觀察、訪談記錄、文件蒐集……等多元方式來蒐集資料。研究所得結果如下：一、鷹架的運作提升學生對於題意的理解；二、透過學生的近側發展區，鷹架之運作有助於提升學生數學建模及解題能力到達他們自力難以到達的程度；三、鷹架運作能提升學生問題表徵的能力；四、在多元解題的數學同儕鷹架運作下，學生的解題歷程更加精緻化；五、透過不同層次鷹架的搭建，有助於多元化學生的解題策略及提升學生的解題表現。

關鍵詞：非例行性問題、數學解題能力、鷹架

壹、緒論

教育部為了幫助學生學習，屢次修訂課程，簡化數學課程，但數學仍高居學生最討厭學科首位(教育部，2003)。這現象的癥結，基本上，可從認知心理學及數學本質兩方面來討論。從認知心理學的觀點來說，我們每一個人都是利用我們既有的基模來詮釋外來的訊息，以數學學習為例，從小到大，我們建立了許多數學概念及數學方法的基模，當我們面對一個新的數學情境(問題或新的數學材料)時，我們會以我們既有的數學基模來詮釋此一新的數學情境中所包含的數學訊息，並尋找適當的解題方法。

隨著每個人數學學習的境遇不同，所結構的基模也就不同，對於所遇數學訊息的解讀也就不同。但是，不同於文學、藝術、或音樂，數學定義或理論給予各人自由解讀訊息的空間並不大，甚至完全沒有。對於數學定義的錯誤解讀，必然造成後續推論的錯

*通訊作者：蔡佳霏

06-蔡佳霏.indd 563　2012/12/25 下午 07:15:39

誤。但是，數學的本質就是一門抽象的學問，它開始於人類對於自然現象的觀察推理歸納之結果，並進一步對於所歸納推理之結果，作進一步抽象處理所得到的結果。經過文明數千年的演變，數學這一領域內容的發展已超越直覺現象的觀察所得(如單純的數數活動)，而是由許多更高階更抽象的數學理論方法所組成。而抽象這一名詞所隱含的意義告訴我們，為了正確解讀所接觸的數學理論及方法，我們必須利用更高階的智慧對於所接觸的數學材料作進一步解碼。這樣的心智活動本質上是內隱的，其結果為個人新的數學基模。正因為這類高階的心智活動內隱於學習者的心中，其執行的正確與否，不易為外界(老師)所偵知，但其執行結果(基模)對於學習者繼續的數學學習，存有著嚴重影響。

傳統的數學方式通常以老師講解學生聽講的方式進行，學生默默地在心中解讀老師所傳遞的訊息，老師則藉由紙筆測驗的方式判斷學生的想法是否正確。這樣的教學模式之優點在於方式經濟，並且可以在短時間內做到大量產出(大班教學)，而最讓人詬病的，莫過於師生間缺乏互動，老師只能透過考試來偵知學生所學是否正確。但是紙筆測驗只能測得結果(特別是以選擇題進行的測驗模式)，不能測得學生基模的結構模式。Erlwanger (1973)對於一位六年級學生的研究告訴我們，即使學生正確回答問題，也不代表他正確瞭解相關概念，我們通常以考試機器來形容這類擅長考試的學生。這些擅長考試的學生最通常呈現的特徵為大量特殊規則的記憶，這些規則可能為學生自己為求考試順利通過自行發明的(如Erlwanger研究中所呈現的個案)，也有可能記憶自老師上課講解的方法。這些規則的共同特徵為適應的範圍不大，換言之，就是難以舉一反三。當數學學習內容較簡單，所需記憶的規則不多(如中小學)時，使用這種模式學習的學生會有較亮眼成績。可是當數學內容變深變廣時，以記憶規則方式進行學習的學生會因需記憶的規則過多，超出他所能處理的範圍而在數學學習上遭遇挫折，進而厭倦數學，害怕數學(Skemp, 1987)。

針對以上討論結果，我們可以歸得學生內在基模的健全與否，關係他未來數學學習的成敗，而以傳統講授法進行的教學模式難以建構學生適當的數學(概念及方法)基模。有鑑於此，本研究嘗試結合非例行性數學問題(目的在破除學生對於既有解題方法的過度依賴)與鷹架理論(含專家鷹架及同儕鷹架)，透過學生數學想法的發表與討論，專家(在此指授課老師)提問的數學學習模式，希望讓學生能由自己既有基模出發(主動學習)來認知新的數學材料，並因此將新的數學知識概念及解法內化到既有基模結構中，進而建立屬於理解性的基模(Skemp, 1987)。並透過老師提問(專家鷹架)協助學生建立正確的數學基模，以利於學生進一步學習。

為瞭解以上想法的可行性，本研究以個案研究方式，探究學童這種學習模式下，其數學能力的發展歷程，及數學解題能力提升之情形。

基於上述的研究動機，本研究之研究目的如下：

一、探討國小二年級中、高數學成就學生在非例行性數學問題的解題歷程。

二、探討結合教師與同儕鷹架教學對二年級學生數學解題的影響。

針對研究目的提出以下研究問題，作為探究二年級學童結合鷹架理論與非例行性數學問題的教學研究下，分析學童解題能力是否提升。

一、學童是否更能瞭解題意？

二、學童是否能依據題意，分析解題訊息？

三、學童能否成功轉譯數學算式？

四、學童所形成的解題抽象程度是否更高？

五、學童的解題模式是否更精緻化？

六、學童解題的答對率是否提升？

七、是否能應用發展出來的解題模式來解相似題型？

貳、理論基礎

一、認知發展理論

Richard (1987／陳澤民譯，2007)引用Whitney (1985)的論點，認為學童對數學在教什麼不能理解時，而教師或是家長卻又往往誤認為是學童努力得不夠，要求他們不斷地反覆練習，這必然會將焦慮不安的孩子推至更大的危機。

認知心理學派大師Piaget (1971)認為「發展與學習促進心智之成長」，而發展是自發的，但學習必須建立於個體既有的發展之上，配合個體本身認知結構去同化、調適新事物，以產生穩固的概念，以達到真正理解。

Piaget (1971)更認為兒童的認知發展是主動的，而非被動的接受環境的刺激。他提出當個體遇到某事物，便用某種對應的認知結構予以核對、處理時，則此種認知結構稱之為「基模」(schema)。Piaget將基模視為人類吸收知識的基本架構，將認知發展或智力發展均解釋為個體的基模隨年齡增長而產生的改變。換言之，隨著年齡的增長與學習經驗的累積，認知結構也會不斷的擴大與增加。

本研究的對象是國小二年級學童，屬於Piaget認知發展第三階段具體運思(約七歲至十一歲)的前期；此時期的學童已累積利用感官探索與生活所得的一些經驗，心智發展也漸趨成熟，已可進行邏輯上的思考，其基模功能的特徵是能根據具體經驗思維以解決問題，能理解可逆性的道理，也能理解守恆的道理。

二、基模相關理論

根據Marshall, Pribe與Smith (1987)的說法，基模(schema)為一個知識結構，這個知識結構中包含了我們如何辨識特定情境及採取相對應行動的必要訊息。Marshall等認為基模包含以下成分：1. 與基模相關的事實知識；2. 判斷基模結構與所遭遇經驗是否吻合的一組條件；3. 滿足基模限制的一組情境目標；及4. 當基模結構符合時必須的作為。

Rumelhart (1980)也發展出一套基模的特徵，這些特徵包括：1. 必須具備變數；2. 能存身於其他基模結構中；3. 代表由具體到抽象多重層次的知識；4. 表徵知識而非定義知識；5. 為一個主動的過程；6. 為一個認知的機制。根據Marshall等(1987)評論，他們認為Rumelhart對於基模所作出的定義相當重要，因為它清楚定義出基模是什麼。Rumelhart主張在教學上的意義為當個體從外界獲得知識的時候，個體會試著將新的知識融入既有基模(那些協助它認知此一新知識的基模)中，並且個體會將新的知識切割為許多具普遍化的區段，並將這些知識分類儲存，以利事後回憶。當個體接收新的知識時，這個新知識會被編入既有基模中或自成一個新的基模。基模為一個組織好的心智結構，個體使用這個心智結構來認知與吸收外來訊息。

Skemp (1987)的看法與Rumelhart (1980)的主張接近，也認為基模是由概念連結而成

的一個概念結構(conceptual structure)，而概念的形成和認知的抽象活動有關。在形成較低階概念時，每次我們認知一件事情就會把它拿來和之前經驗的事物作比較、分類。

Skemp (1987)強調基模是個相對概念，大基模中含有小基模，基模與基模之間也是有橫向聯繫。基模不一定是正確無誤的概念架構，它有可能只是零零散散沒建立好的規則關係，也可能由誤解的概念之集合。有些學生喜歡記憶公式，並藉由套用公式來解題，這些公式也是他的基模之一種。過去所累積的解題經驗也屬於基模的一種。

本研究採取Skemp (1987)的觀點來詮釋基模，所謂基模就是個體和外界互動(學習)所建立的一個概念結構或是知識結構，每一個概念又是包含若干個先前概念，概念是由分類和抽象而來，最初級的概念只是個體接受外來的感官加以分類和歸檔，而概念是抽象化的結果，得到的概念經過分類抽象得到更高階的概念。按照Skemp的說法，任何個體學習的知識或概念都會和他原來的基模(概念結構)連結(至少分類配對)成為他基模的一部分。這些基模亦有可能沒有和先前既有的基模產生緊密的連結和抽象，這時候，我們可以說個體的學習(心智活動)只使用了Skemp所說的直覺的智慧，學習者並沒有對於新概念的內容進行更深入反思，只做到工具性的理解的層次，並沒有達到關係性的理解(Skemp不認為工具性理解可以說是一種理解)。Van Hiele (1985)認為學生會去記憶規則的原因，是因為老師所介紹的東西是高於學生所能理解的層次。換言之，就是新的學習材料不能為既有的基模所同化吸收，學習者為了達成教學者的期望，只好以強行記憶的方式來吸收新的材料。因此，學生之所以以工具性理解來學習新的數學材料，並不全然是學習者學習習慣造成(尤其是國小低年級的學習者)，而常常是教學者並沒有配合學生既有的基模進行教學。

三、Benny的數學學習模式

1973年Erlwanger的文章中，介紹了一位使用數學科個別處方教學法(Individually Prescribed Instruction mathematics, IPI)學習的學生Benny。在使用IPI課程學習的學生中，Benny屬於進展較好的一位。老師也認為他是班上，數學表現最好的學生之一。但是在深入訪談之後，Erlwanger卻發現Benny只是很會使用自己發明的規則湊出電腦要的答案，他並不是真正的理解所學習數學的內容。比如說，當做小數乘法問題時，根據答案的規律性，他發現如果乘數和被乘數後面小數位數加起來有兩位，那麼答案小數點後面也要有兩位小數，這樣的發現使他能順利的通過小數乘法這個單元。但是因為這樣的理解並不是屬於前面所提的關係性理解，所以當被問到如何解「4 + 1.6」這樣的題目時，他也會仿造之前所發現的規律，把1.6視為16，而與4相加，先得整數答案為20，之後再因為1.6後面有一位小數位數，將小數點置於0之前，得答案2.0。像Benny這樣的迷失概念，許多研究都有類似發現，只是在這些研究中，他們通常將造成這類情形的原因，歸諸於受到之前數學單元之影響。但是在Benny的例子中，Erlwanger告訴我們，Benny會得到這樣的答案，純粹是就既有單元的乘法答案倒推出屬於這單元的小數乘法規則，與之前單元的學習並沒有多大關係。於前面所提工具性理解不同的地方，在於這些規則是Benny自己發明出來的，而不是經由教師教學得到的。

Erlwanger (1973)歸咎IPI這種數學教學模式為造成Benny這種數學學習行為的原因，因為在IPI的學習中，教師與學生缺乏

互動，IPI非常依賴測驗來進行學習進度的選擇與控制，教師對於學生的理解經常是透過測驗所得之分數。如果學生測驗結果亮麗，教師通常也就會認為這個學生沒什麼問題。

雖然許多人將Erlwanger (1973)的發現，視為對於IPI這類行為主義課程的反動，在本研究裡頭，我們認為缺乏適當的師生及同儕互動，才是造成Benny學習現象的主因。當前國內數學教育環境與Benny所受的數學教育環境(IPI)不同，但是我們強烈懷疑在大班制(人數30人以上)及依賴考試和傳統講述式的教學環境下，適當的師生及同儕互動可能不是很充足，因此我們的學生是有可能出現如Benny的數學學習情形，這也是我們在此就當年Erlwanger的發現作介紹的原因，我們將Benny的數學理解方式命名為Benny模式，以有別於Skemp的工具性理解及關係性理解。

四、鷹架學習理論

鷹架(scaffolding)學習理論強調知識建構的過程是經由與他人的互動，並由個人內在建構而來。此理論是由Wood, Bruner與Ross (1976)引申自Vygotsky的近側發展區理論(陳育琳，2007)。

(一)鷹架教學

將語言視為社會文化工具(social-cultural tool)是Vygotsky (1978)提出的重要概念之一。在合作的社會情境中，學習者與同儕或成人互動，可以有較多的機會進行觀察、模仿，並發展成較高層的心理功能。在知識建構的歷程中，透過語言協助個人思維，並搭起鷹架。經由與他人不斷地對話、解釋、協商、分享，提供了挑戰與支持，以刺激個人內在的反省與知識的重組。

Langer (1983)認為成功的鷹架教學應該具有：讓學習者體會真正理解學習的重要、為學習者安排適切的作業、支持性的教學、分享學習責任、以及協助學習者在學習中內化知識等的特性。

(二)鷹架的種類

1. 教學(teaching)鷹架

Bentley與Watts (1992)認為數學教育，應該協助學習者學習溝通技巧，去傳達個人知覺、感受人性化與情感，如此才能提升學習者的數學能力。Lemke (1990)認為教師該減少慣用的問答對話方式，並重視學習的社會過程，改以由學習者提問、個別或小組報告、對話、互相討論等談論方式來安排組織課程。

2. 對話(discourse)鷹架

Gallas (1995)定義對話的角色，認為一個數學想法是許多人相互溝通、資訊交互作用所造成的結果，亦即事實是社會建構而來的(facts are socially constructed)。Bentley與Watts (1992)主張，當學習者能在數學課室中進行溝通時，他們的思慮已經做了重新的澄清與運轉。Forman與Cazden (1985)也主張，同儕彼此進行口語教學的活動時，學習者在認知上的發展可獲得協助。

3. 同儕(peer)鷹架

Phillips (1991)指出，學習者不是一個單獨的研究者，須與他人溝通、互動，以獲得指引或接受新的刺激。Wheatley (1991)也提及學習者必須親自去了解某些概念、想法，但若不與他人互動，則無法獲得真正的了解。

由於年齡相近學習者的近側發展區之思考與推理方式非常相類似，這種透過思考他人的理解方式，再行組織或適應重整本身的基模，與Piaget的認知發展論概念相當一致。

五、數學解題的學習意涵

在現實生活中發現問題，我們可以採簡化的方式將問題建立，並提出問題，再將問題表徵成一個數學模型，以抽象的符號、數學方法推理，將模型中的解答找出來，詮釋當初所提出的問題，並在日常生活中得到驗證。

(一)非例行性數學問題

黃敏晃(1998)將數學問題分為例行性問題與非例行性問題兩類。例行性問題(routine problem)，就是解題者所熟悉解法的問題。非例行性的問題(non-routine problem)則是解題者看到題目後，無法立刻知道求解路徑的題目，因此解題者必須運用所學加以克服始得解答，則這些問題對該學生而言，即為非例行性的問題。黃敏晃認為「只有在做非例行性問題時，解題行為才會發生」。

(二)數學建模

數學建模是指在現實世界中，為了某一個特定的目的，而將實際問題抽象、簡化成數學模型後，運用數學的語言和方法對數學模型進行求解，在反覆的假設、驗證過程後，將得到的結果回歸到實際問題，這個過程稱為「數學建模」(葉其孝，1997；鐘劍、簡國明、桂紹輝，2000)。

Kaiser與Willander (2005)說明數學建模過程為：

1. 真實情境理想化：將真實世界的情境簡化和結構化。
2. 數學化模式：將真實情境做轉化，形成真實情境的數學模式。
3. 數學操作：操作數學模式，解答出數學的答案結果。
4. 解釋：將數學結果置放於真實情境中做解釋。
5. 評估：檢查結果的適當性，若無法滿足真實情境的問題，就必須再重複上述的過程。

(三)解題抽象表徵

Bruner (1966)認為兒童若能以抽象運思的數學符號進行運思的活動，即達到運思的活動階段。在活動中，學童先獲得圖像或符號表徵的意義，當其意義穩固後，才可進一步地使用圖像或符號表徵為材料，進行抽象化運思活動。換言之，圖像及符號這些較抽象的表徵，是在學習經驗中發展出來的，它們是心智活動的產物。亦即學生從具體活動中了解抽象數學表徵的意義，才能運用符號來進行運思。所以依照Bruner的理論，不同的表徵代表的是運思的抽象程度。

Krutetski (1963, 1969, 1976)在分析數學資優生的個案研究中指出，具有數學抽象思考能力者，能迅速且廣泛的組織材料。在解題的過程中，表徵的改變通常是一種改進的過程，可以使問題解決變得較容易(羅素貞，1996)。所以表徵的形式會影響每個運思活動的進行，進而影響解題方式或速度，因此表徵與解題能力有密不可分的關係。

(四)解題精緻化

精緻是指過去經驗與當前所學的信息建立起更多聯繫的一種增加或擴充的心理過程。

在學習歷程時，學生需先討論問題，其目的即在幫助學生活化先前知識，促進知識的精緻化(elaboration)。依Vygotsky (1978)的社會建構論與訊息處理理論所主張之訊息精緻化的論點，學生可透過彼此互動、討論與反省來學習知識。而當學習者能將所習得的訊息加以精緻化時，便能產生新舊知識的聯

結，促進知識的保留。

解題精緻化是學生能在解題之後，又重新回顧並檢驗自己的解題過程，進而讓解題程序更合理更具結構化的精緻過程。

經前述研究文獻探討，本研究採取Skemp (1987)的觀點來詮釋基模，並針對非例行性數學問題可以促進學童認知的發展，以及Vygotsky (1978)的觀點，良好而有效的教學一定要把握受教個體的近側發展區，在這個區域內，教師給予學習者充足的引導、支持與練習，以避免學習者具有Benny的數學學習模式，而師生、同儕也能在密切合作中，享受學習的過程，並有機會發展出新的行為結構，完成階段發展的目標。

參、研究方法

本研究屬於質性研究中之個案研究，是採一個組織體、一個數學共同學習小組為對象，利用教室觀察、訪談、文件收集多樣方式來蒐集資料，進行研究個案在數學解題發展上的變化分析。

一、研究進行方式

本研究之進行方式是先依據個案班級學生二年級上學期數學成績表現作為篩選基準，篩選出三位研究對象，其中兩位是高數學能力，其數學學習成就在班級中的百分等級分別為99與93，另一位是中等數學能力，其數學學習成就在班級中的百分等級為76。這三位學生，研究中分別以SH1、SH2、SB3表示之，三人組成共同數學學習小組，並定期一週一次給其非例行性數學問題，供他們學習解題。

在解題過程中，學生共同討論學習，藉由同儕主動提供鷹架支持，彼此澄清概念，藉此加強認知概念與提升解題能力。研究者針對研究個案做解題提問與晤談，在研究個案產生困境時提供教師鷹架，並從中觀察其解題歷程的改變與解題能力是否提升。

二、研究工具

在研究工具的試題編選與取材上，問題設計主要採用參考國小一、二年級數學奧林匹克試題、黃敏晃(2000)撰寫的《規律的尋求》等解題相關研究文獻。選取與實際生活相近的非例行性問題，並符合研究對象的認知程度概念，將該非例行性數學題區分為：「數與量」(N)、「圖形空間」(M)、「邏輯推理」(L)等三類，每週約練習三至四題數學問題。

編選之試題請同儕研究生兩人，針對語句、試題難度、解題合理性等方面，採共同討論修正、另外請畢業於數理教育研究所，且目前任教於大樹國小和新庄國小的專業教師，以及幾位資深教師，針對編選問題的陳述語句和問題的概念是否對二年級學童合適給予指正，再由研究者修正不當之處。

三、資料蒐集處理與分析

本研究所蒐集的原始資料主要來自鷹架教學與同儕討論觀察、訪談及文件資料，訪談觀察記錄的輔助工具為電腦與電子白板、數位相機、錄音設備等。所蒐集的資料為鷹架教學與同儕討論觀察之錄影資料、個案訪談資料之錄音資料、個案解題作答之文件資料、及省思札記共四個部分。

並由指導教授、研究所同儕檢視研究者反省日誌，盡可能減少研究者的主觀偏見，避免將原始資料進行先篩選再紀錄的選擇性轉錄方式。

而研究者也以審慎、敏銳的態度，嚴謹的處理轉譯原案資料，將研究問題作為分析主題項，並在教學研究進行中邀請兩位校內資深教師進入研究場域觀察，再根據研究

觀察結果討論記錄之。在資料的分析過程中，對於從資料中浮現的範疇與模式，研究者會進行批判與審視，並尋求合理的解釋與歸納。

肆、研究發現與討論

針對個案SH1、個案SH2、個案SB3的分析，發現鷹架對話討論在學生的數學解題歷程中的作用，本研究著重於：一、解非例行性數學問題之歷程間的銜接能力；二、當遇到解題障礙，鷹架運作如何協助個案重新評估解題歷程。經由學生在十週次的數學討論對話中，觀察學生解題能力的轉變。

一、個案瞭解題意的能力

由陳世杰(2005)、蔡久瑜(2003)的研究均可知閱讀理解能力較好者，能較正確的理解題意，因此較容易成功解題。這與研究者的觀察研究相符，由個案在校學習評量的成績比較，三位研究個案中的語文理解能力由高至低依序是SH1、SH2、SB3。而在研究歷程中理解題意的表現，也有相同的排序。SH1面對少數從未接觸過的題目，在瞭解題意上稍顯困難，但在關鍵字上說明解釋後，比較能分析解題的訊息條件。SH2解從未接觸過的題目，在瞭解題意上較困難，但解釋後便能瞭解題目所求，進而尋找出解題的目標條件。SB3常在讀題之後，解題訊息的掌握較不確實，正確性也不高。

圖1是個案在各週次理解題意的表現情形。三位個案一開始面對非例行性數學問題，理解能力都不佳，但因個別的語文理解能力差異，在鷹架討論的運作後(見圖1)，題意理解的能力，也表現出差異。語文能力較好的SH1，在鷹架運作後，理解能力提升幅度最高；相對下語文能力較差的SB3，理解能力提升幅度最低。但三位個案在鷹架理論的運作下，題意的理解都有提升。

(一) SH1在瞭解題意面向之表現

SH1閱讀理解能力頗佳，在數學閱讀理解上大致沒有問題，但因是以往不常接觸的非例行性題目，且題目在敍述稍嫌冗長，所以SH1一開始對題目並不習慣。例如題型L01「有40位小朋友排成一橫隊，從左往右數，小星站在第22位，從右往左數，阿力站在第36位。請問小星和阿力中間有幾個小朋友？」，SH1在讀完題目後會用畫數線圖來瞭解題意，但是畫出的圖卻無法完整呈現題目的意思，但在經鷹架教學討論後，個案SH1能修正原本的數線圖，並能依據題意正確無誤的解釋自己畫出的數線圖(如圖2)。

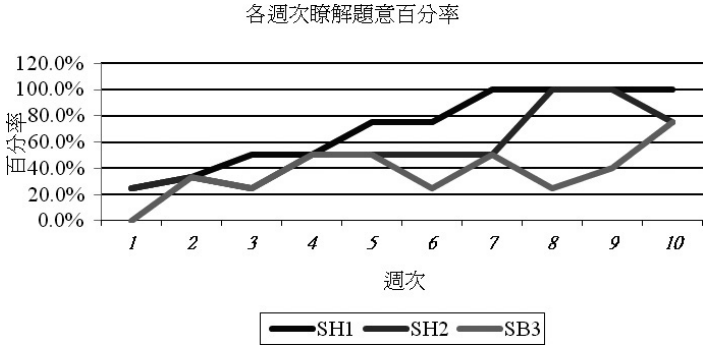


圖1：個案在各週次理解題意的表現

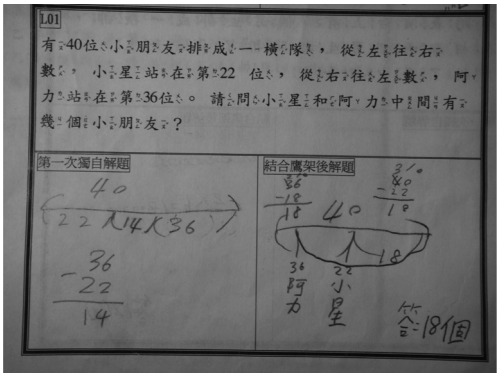


圖2：SH1的解題過程

(二) SH2在瞭解題意面向之表現

個案SH2除了學校的正式課程之外，平時很少有練習解數學問題的機會，雖對正式課程內的數學問題可以駕輕就熟，但是對於非例行性數學問題中的一些情境用語令他很困擾，甚至不知如何運用題目中的訊息。SH2習慣在瞭解題意後，對題意清楚有把握時才會進行解題。因此開始解非例行性數學問題後，常表示看不懂題目，因此拒絕作答。由下面兩段訪談中可知，SH2常會因為題目中的描述用語有一些不清楚，就將題目空下，並不會嘗試解題。

(1000429訪SH2N03)

SH2：題目中說「媽媽買了三張單號的電影票，相加等於17，有幾種情形？」我看不懂？

T：你知道電影院每一張椅子都有號碼嗎？

SH2：知道。

T：你知道單號的意思嗎？

SH2：就是1、3、5、7、9……。

T：那你是哪裡看不懂？

SH2：「有幾種情形？」我不知道是什麼意思？

(1000701訪SH2N14)

T：N14這一題你怎麼都沒寫？

SH2：因為我不知道「售價」是什麼意思？

T：喔！「售價」就是賣的價錢，「一顆柳橙售價是16元」，就是柳橙一顆賣16元。

SH2：那我知道怎麼寫了。

(三) SB3在瞭解題意面向之表現

SB3因家庭環境的關係，除了在學校的正式課程與老師指派的回家作業外，平時很少有練習解數學問題的機會。SB3雖然語言溝通良好，但是甚少接觸課外讀物，無閱讀的習慣，所以文意理解顯得較弱；SB3最常在不理解題意的情形下，會將題目中的數字隨意的拿來運算作答，因SB3對非例行性數學問題常無法自行的理解題意，所以討論中較需要同儕與教師鷹架的協助。

由圖1中的折線圖逐漸攀升的趨勢可清楚看出，SB3在十個週次的非例行性數學問題解題練習後，瞭解題意百分比大都介在25.0%至50.0%之間；雖歷經十週次的數學小組學習，SB3在理解題意的面向，未見其能力有明顯提升。可能原因為SB3對自己的數學表現缺乏自信；其二是性別與個性的差異，SB3顯得較羞於表達自己的想法；其三是上課中未能專心投入討論，因上課討論時間訂在星期五的下午，SB3時常表示她要去爸爸家度假，所以討論時，常顯得心不在焉。

二、個案分析解題訊息的能力

圖3說明個案在各週次分析解題訊息能力改變情形，隨著題意理解能力的提升，由圖中的曲線走向可知，經由鷹架的運作，三

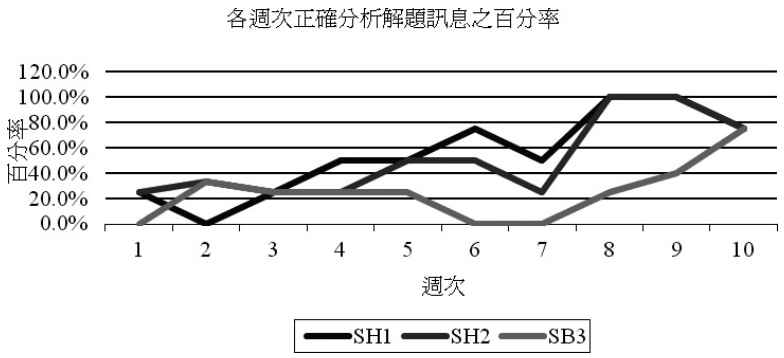


圖3：個案在各週次分析解題訊息能力

位個案在分析解題訊息的能力也逐漸增長。

(一) SH1在依據題意分析解題訊息面向之表現

SH1解題歷程當中，無論是在解題時，或數學同儕鷹架時，都較能提出解題計畫或解題關鍵，並能在解題當中監控自己或他人的錯誤。亦即較高數學能力學生具有較佳的解題策略與自我監控，且因擁有足夠的數學知識，較能靈活運用，並較能組織訊息，看出題目中的解題關鍵，並找出適當的解題計畫。

例題L03「今天是5月8日星期日，請問這個月第四個星期日是幾月幾日？」，SH1在這一題中能清楚說明題意，知道一星期7天，5月8日星期日，下一個星期日只要再加7天，因此他擬定的解題計畫是「8 + 7 + 7 + 7 = 29」，顯見他在這一題具有很好的解題抽象程度，但是他忽略了5月8日並不是5月的第一個星期日。因此在處理5月8日這個訊息並不正確，故造成解題失敗。SH1在鷹架教學後的解題策略修正為，以月曆中的日期排序來理解題意並分析出解題的訊息(見圖4)。

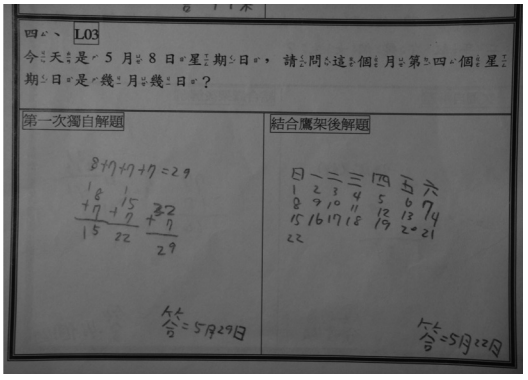


圖4：SH1解L03之圖片檔

又如個案SH1第一次獨自在解例題N05「阿文有糖15顆，4張糖果紙可換糖一顆，阿文最後可吃到的糖共有多少顆？」時，列出的算式是「4 × 3 = 12，答是3顆」。顯見SH1是正確理解題意為4張糖果紙可換糖一顆。但SH1忽略了原來的15顆糖，以及換回來的糖果吃完後的糖果紙又可以再換(錯誤分析解題訊息)。這種多步驟想法的解題，對低年級的學生而言是困難的。但經鷹架討論後(見1000505鷹N05)，SH1在第二次解題時，能重新修正原本的解題歷程，清楚的依據題意一步驟一步驟的完成解題(見圖5)。

(1000505鷹N05)

T：SH1先來解釋看看。

SH1：有15顆糖嘛，就換來15顆糖果紙嘛。然後4 × 3 = 12，換了3顆糖，還剩3張糖果紙，3 + 3 = 6，又可以再換1顆。

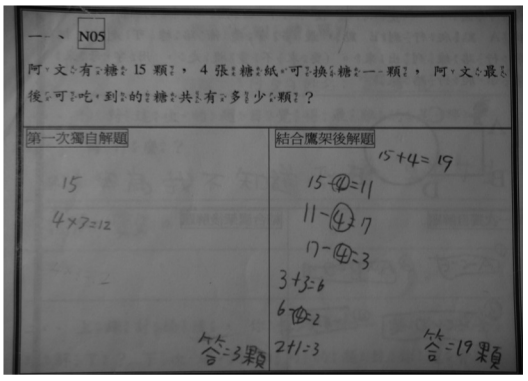


圖5：個案SH1解題之圖片檔

T：然後總共吃了幾顆？

SH1：15 + 6 = 21，吃了21顆。

T：SH1說吃了21顆，你們覺得對嗎？

SH2：不對……。

T：好，SH2，你來說明。

SH2：15顆糖，4張紙換1顆，……可以換3顆，剩3張紙，……吃完後，又可以再換1顆，還有2張紙，吃完最後剩……3張紙不能換了。

T：那總共吃了幾顆？

SH2：總共換……4顆，15 + 4 = 19，是19顆。

(二) SH2在依據題意分析解題訊息面向之表現

SH2在解題中，雖然也有解題計畫的想法，但往往卻因為監控能力不足與連結不良，無法順利解題。因此可以看出，有些學生並不是在毫無計畫之下解題，也不是對數學毫無想法，而是由於解題時，經常發生錯誤而未能即時發現，或是解題階段的轉換不順暢，因而導致最後的失敗。因此，經由這樣的數學同儕鷹架作用，可以讓教師更加了解學生的解題行為，也較能夠針對學生的差異性，調整自己的教學。

在例題N01「小丸子和爺爺坐火車到臺南玩，火車票一張全票是64元，一張半票是全票價錢的一半，爺爺買全票，小丸子買半票，他們來回一共要付多少元？」中，SH2可以理解小丸子買半票的意思，但是「來回一共要付多少元？」這一句題意，則是透過與同儕討論分析解題訊息，並由同儕SH1的解說「來回的意思就是要付兩次」，SH2才完成解題(見1000422鷹N01)。

(1000422鷹N01)

SH2：64分成兩半，6可以分成兩個3，4可以分成兩個2，所以是32元。

T：為什麼要分成64的一半。

SH2：因為小丸子買一張半票，爺爺買一張全票64元，所以64的一半是32，再把他們兩個加起來。

SH1：可是他說他們來回呢。就是火車票一張全票是64呀，半票就是6分成兩半就是3，4分成兩半就是2，合起來就是一張半票的價錢32元，然後爺爺買全票64元，小丸子買半票32元，他們來回一共要付多少錢？來回的意思就是要付兩次。

(三) SB3在依據題意分析解題訊息面向之表現

SB3的鷹架討論對話當中，很少主動提出想法，通常都是接受同儕與教師鷹架協助。而很多時候，SB3在看到題目時，經常未加思索就開始動手解題，也因為思慮不

周，往往就利用題目給的數字亂湊以作答，並未能依照題目所給的數學邏輯來擬定解題的計畫。

SB3在解題型N08「在7-11商店消費滿110元可以折價10元，在全家商店買5瓶養樂多再送1瓶。養樂多每瓶10元，請問同樣付100元，在哪一家商店買養樂多比較划算？」時，第一次解題採用猜測的策略，猜7-11商店比較划算，因為她表示題目中「消費滿110元可以折價10元」和「同樣付100元」這兩句話的意思她不懂，所以就用猜的。鷹架討論後，能清楚算出是全家商店比較划算，但是尚無法列出正確的算式，解題模式仍未成熟(見1000527訪SB3N08)。

(1000527訪SB3N08)

SB3：我本來是猜7-11商店比較便宜，但是討論後我就知道我寫錯了。

T：你為甚麼要用猜的？題目有你看不懂的地方嗎？

SB3：哦……就是消費滿110元可以折價10元，還有同樣付100元這一句。

T：那你可以說明一下討論後你的做法嗎？

SB3：我先寫全家，因為100元可以分成兩個50元，50元可以買5瓶，又送一瓶，所以有兩個6瓶，所以共有12瓶。

T：那7-11商店的你怎麼算？

SB3：我用110一個一個的減。

T：減什麼？

SB3：就一瓶養樂多是10元嘛！我一個一個減就知道可以買幾瓶了。

三、個案轉譯數學算式能力

研究者發現數學能力愈高的學生，較能從非例行性數學問題情境中，找出相似的關鍵因素，或是利用技巧找出隱藏於其間關係，並由此啟動解題之思維。但數學能力較低的學生，當題目所給定的條件無法立即算出或列不出算式時，這些學生就會認為這是一個相當困難的問題，而不知如何著手解題，並且影響到其解題的信心。

圖6是各週鷹架運作前，個案能自行轉譯算式建立解題模型的比率，由圖中分析，SH1與SH2各週自行轉譯算式建立解題模型的能力由逐漸增長，而SB3由圖中仍未能證明轉譯算式建立解題模型能力有提升；圖7是各週鷹架運作後，個案轉譯算式建模的比率，比較兩個統計圖，可知，三位個案經鷹

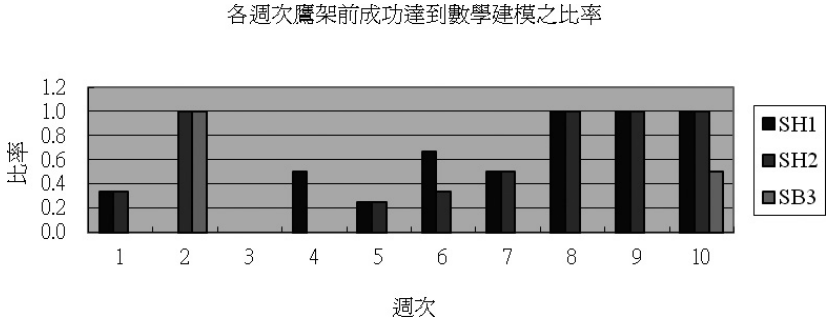


圖6：各週鷹架運作前轉譯算式建模成功比率

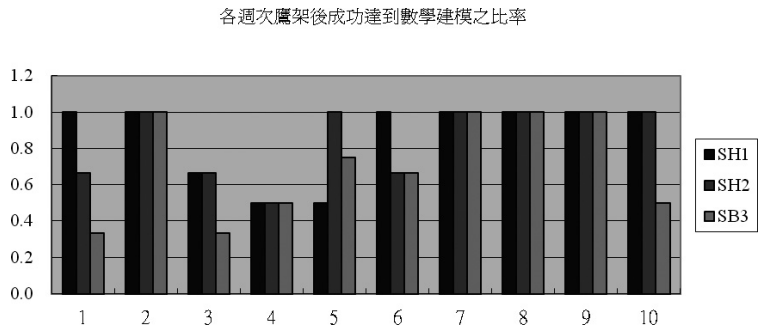


圖7：各週鷹架運作後轉譯算式建模成功比率

架的運作，數學建模的能力明顯提升；尤其是SB3特別依賴鷹架的運作才能成功轉譯算式達成數學建模。

(一) SH1在轉譯數學算式建立數學模型之表現

SH1在前三週次時，須結合鷹架才能成功達到數學建模的比率較高；在第四、五、六、七週次時，第一次解題時就能成功達到數學建模的比率逐漸增加；而最後三週次都在第一次獨自解題時就能完全成功達到數學建模，顯見SH1經過十週次的鷹架解題練習，在數學建模能力的面向上有著明顯提升(見圖6)。

如第六週個案SH1解例題N12「爸爸、媽媽和小安三人的年齡總和是84歲，媽媽比小安大28歲，比爸爸小4歲，你知道小安今年幾歲嗎？」時，因為有三個未知數，屬於多步驟的問題，對二年級學生而言是偏難的題型。因此需由教師鷹架介入較多的中介支持，並協助依據題意情境繪製數線圖，讓個案學生能從數線圖中轉譯出算式，建構出此題型的數學模型(見1000610札；圖8)。

(1000610札)

我用數線圖幫助他們理解題目中三人的歲數關係，……於是再一次請學生

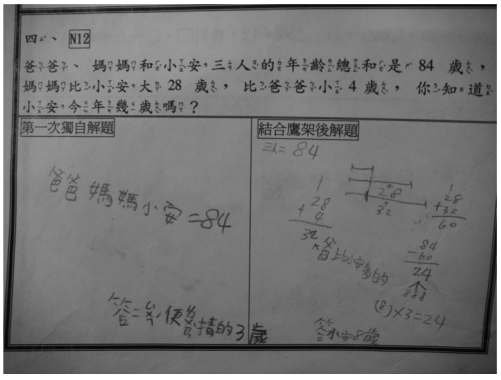


圖8：個案SH1解題之圖片檔

觀察線段圖，並詢問：「這些線段減了28、減了32，還剩下什麼？」學生回答：「還有三段不知道的。」師：「那一小段代表什麼？」SH2：「小安的年紀。」SH1：「所以是三個小安。」師：「所以24就是三個小安的年紀啊。」

(二) SH2在轉譯數學算式建立數學模型之表現

SH2各週次建構數學模型的比率，在前七週次中，除第二週次外，須結合鷹架才能成功轉譯算式的比率較高；在第一、三、四、六週次時，鷹架教學討論後，SH2雖能正確解題，但還是有無法成功轉譯算式的題

目。在第七週次後，第一次解題時就能成功轉譯算式建構數學模型的比率逐漸增加；而最後三週次都在第一次獨自解題時就能完全成功建構數學模型，顯見SH2經過十週次的非例行性數學問題的解題學習，在轉譯算式建立數學模型能力的面向上已有提升(見圖6)。

第三週次，個案SH2在鷹架討論時，能將他解題型N05「阿文有糖15顆，4張糖果紙可換糖一顆，阿文最後可吃到的糖共有多少顆？」的思路與想法說明的很清楚(見1000505鷹N05)，但是要求他轉譯成數學算式時，他表示不知如何列式，覺得很困擾，因此研究者在數學學習小組討論後，介入教師中介鷹架，協助搭建如何轉譯數學算式建構數學模型之鷹架，但是SH2在此次的鷹架後解題，仍無法將思維轉譯算式。

第六週次，SH2在第一次解題型N12「爸爸、媽媽和小安三人的年齡總和是84歲，媽媽比小安大28歲，比爸爸小4歲，你知道小安今年幾歲嗎？」時，就算出小安的年齡是8歲，他列出的算式是「28 – 20 = 8」。訪談時，請個案說明為什麼要用28 – 20，20是代表什麼？個案SH2無法說明解題的思維。但是在訪談中，SH2重新整理自己理解的題意，而分析出爸爸比小安大32歲這個隱藏訊息，可惜仍無法擬定出解題的方法。經鷹架討論後(見1000610札)，SH2在鷹架後解題的表現不但能依據題意畫出線段模型圖，而且成功轉譯算式(見圖9)。

(三) SB3在轉譯數學算式建立數學模型之表現

由圖6中可看出，SB3第一次解題時，十週次中有八次都無法自行建立數學模型，其中僅第二週次與第十週次各有一題完成轉譯數學算式，建立解題模型。SB3大部分在

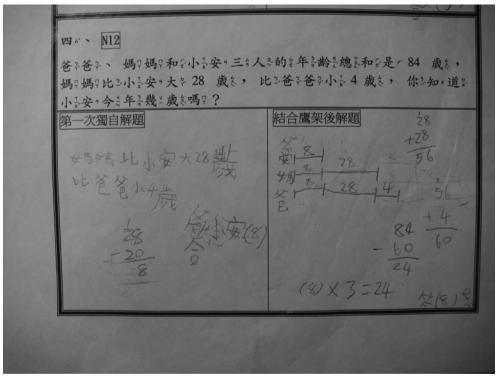


圖9：SH2解題型N12之圖片檔

解非例行性數學問題的數學模型都是透過鷹架討論後才建立，有此可知，非例行性數學問題對SB3而言是難度較高不容易思維的問題，因此在數學建模能力的面向，SB3表現並不如預期。

第一次解非例行性數學問題SB3雖然覺得很困難，但是也非常投入與老師同儕討論不懂的部分。在解題型N01「小丸子和爺爺坐火車到臺南玩，火車票一張全票是64元，一張半票是全票價錢的一半，爺爺買全票，小丸子買半票，他們來回一共要付多少元？」時，SB3對題目的意思還不甚瞭解。但鷹架討論時，經SH1解題並解釋，以及SH2解題後，SB3就能瞭解，而且呈現出有別於另兩位同學的解法，以乘法兩倍的方式解題。但在鷹架討論後的解題，SB3並沒維持她在上課中的解題方式，改採加法的方式分別計算爺爺與小丸子去程和回程的車票錢，然後再將兩者相加(見圖10)。SB3運用兩種方式解題，因此可以確認SB3已建立本題的數學模型。

由SB3一開始解N07「小奇有45張遊戲王卡，小英比小奇少13張，小玲比小奇多12張，請問小玲比小英多幾張遊戲王卡？」時的解題過程可知，她並不理解題意，因此隨意解題，當然解題是失敗的，因此在第一次

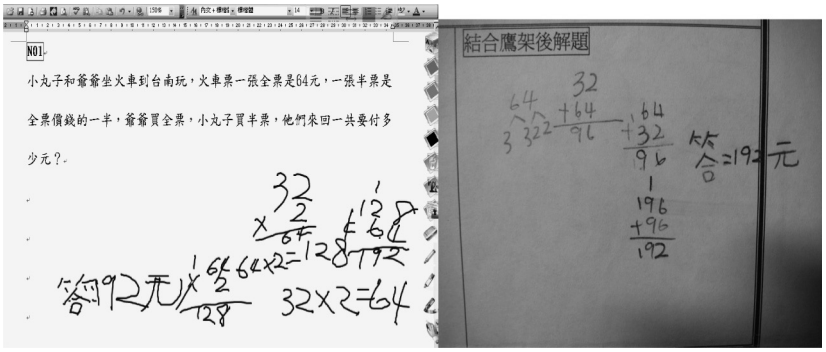


圖10：SB3鷹架教學時與鷹架後解N01題之圖片檔

訪談時協助她理解題意。小組討論解題時，並由SB3先來解題，這次SB3以逐句分析的方式，完成解題步驟，解題成功。從這一題中可看出SB3在老師幫助她理解題意後，他就有能力分析解題訊息，並轉譯算式，完成解題(見圖11)。

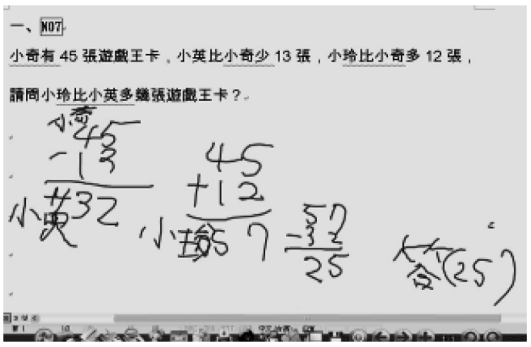


圖11：鷹架討論時SB3解N07題之圖片檔

四、個案解題抽象表徵層次

問題表徵雖然在問題解決的一開始即已形成，但是在整個解題過程中卻是不斷在修正與改變。解題過程中表徵的改變通常是一種改進的過程，可使問題解決變得較容易。三位研究個案在解題的歷程中，解題的表徵方式由最常使用的情境動作表徵，經由鷹架的討論運作，表徵的心智層次提升為圖像表徵。數學問題的轉譯需要三種語言(language)，即文字、圖形及符號。雖然有些符號會在小學中使用，如數字及運算符號，但利用文字符號代表未知數及變數的性質通常必須等到第一年學習代數時(約國小五、六年級)，才會使用(Clarkson, 1970)。然在非例行性數學問題的鷹架討論運作下，個案SH1與SH2的解題表徵已能提升至較抽象的類代數之符號表徵。

(一) SH1在抽象表徵面向之表現

SH1解非例行性數學問題的前四週，在瞭解題意後，最常採用的運思材料是動作表徵，其次是圖像表徵，而符號表徵則在第五週次後才有開始運用。SH1在後期的解題抽象程度較前期為高，能以抽象運思的數學符號進行運思的活動。換言之SH1從鷹架教學活動中逐漸學習了抽象數學表徵的意義，因而在學習歷程的後三週，才能靈活運用符號來進行運思活動。

對小學二年級的學生而言，他們的運思型態上處在半具體運思與抽象運思之間；因此運用符號運思的經驗並未充分，在正式課程中也不明顯強調運用。一開始個案在面對非例行性數學問題以符號作為代數表徵的題型時，顯得不知所措，但是在幾次的解題練習後，漸漸體會運用符號表徵的奧妙與便宜

之處了。

例如個案學生在解題型L05「如果☆ + △ + △ + □ + □ = 24，☆ + △ + △ + △ + △ + △ + □ + □ = 45，那麼△ = ？」時，因為是第一次接觸在一個算式中含有多個類代數的題型，因此皆不太懂題意，所以一開始個案學生們都採猜測數值帶入算式中的方式解題。教學討論時，教師鷹架介入支持，提問學生觀察題目訊息，分析訊息的意義與用意；並提醒學生注意兩個式子中相同的要素與個數，和兩個式子間的差異，經過一番鷹架討論，個案SH1能清楚理解以圖示作為代數符號表徵的運算意義。

因有題型L05的解題經驗，爾後SH1解題型N17時，已能將△表徵為空瓶重量，□表徵為一杯水的重量；在解題型N20時，能表徵「△ = 半罐豆子 + 空罐重量，□ = 全罐豆子 + 空罐重量」，顯示個案SH1已學會運用符號表徵運思解題，在解題列式的抽象程度上明顯提升。

(二) SH2在抽象表徵面向之表現

SH2解非例行性數學問題的前二週，採用的運思材料是動作表徵，其次是圖像表徵，而符號表徵則在第三週次後逐漸開始運用，第五週時，四題表徵題就有兩題運用符號表徵；第七週時，兩題表徵題皆用符號表徵；第九週時，在三題表徵題中，有兩題是運用符號表徵。顯見SH2運用符號表徵已漸熟練，後期的解題抽象程度已較前期為高。

在解題型L05「如果☆ + △ + △ + □ + □ = 24；☆ + △ + △ + △ + △ + △ + □ + □ = 45，那麼△ = ？」，可以說是個案SH2第一次遇到符號表徵類代數的題目，訪談時SH2表示這一題他「超不懂的」。因此一開始解題時他採用的解題策略是猜測數值帶入試算的方式；在鷹架討論時(見1000603鷹L05)，教師鷹架介入，帶學生觀察題目訊息，並分析訊息的意義與用意。SH2首先發現了可以兩個式子的差，與兩個式子間的差異關係來解題。這是SH2第一次解符號表徵的經驗，SH2在這一次的解題經驗中體會了符號運算的意義，因而也影響了他爾後解題能連結過往的符號表徵經驗。

(1000603鷹L05)
(SB3首先試算24 – 4 = 20。)
T：4是代表什麼？
SB3：……(無法解釋)。
SH2：應該要45 – 24吧！
T：你為什麼想這樣做？
SH2：我覺得應該是差的關係。
T：是什麼的差？
SH2：就是兩個式子的差啊！
T：45 – 24 = 21，21是差，那21在這裡又代表什麼？
SH2：……。
T：好，哪兩個式子中的圖形相差後是什麼？
SH1、SH2：剩三個三角形。
SH2：所以就算三個三角形。
T：嗯嗯，那一個三角型呢？
SH2：三個數是一樣的，所以一個三角形是7。

(三) SB3在抽象表徵面向之表現

SB3解非例行性數學問題最常採用的運思材料是動作表徵，其次是圖像表徵，而符號表徵雖然SB3有嘗試使用，但直到最後一週，SB3仍然未能順利運用符號完成解題。因此推論SB3尚未能以抽象運思的數學符號進行解題，可見SB3的數學學習經驗上停留在情境動作表徵，其圖像表徵在數學上運用

的意義還未穩固，尚無法自如的運用圖像來表徵數學題意，因而其運思的活動階段仍停留在情境動作表徵與圖像表徵之間。

題型L01「有40位小朋友排成一橫隊，從左往右數，小星站在第22位，從右往左數，阿力站在第36位。請問小星和阿力中間有幾個小朋友？」SB3因為看不懂，所以不知該如何算。而這類型的題目理解須透過表徵的方式，因此引導個案透過圖象表徵理解題意並找尋解題訊息。鷹架討論時，SB3在逐句引導理解下能畫出正確的數線圖，但解題時卻列出「36 – 22 = 14」，請她進一步解釋為什麼這樣做時，她無法說明。之後在教師鷹架的提問，與同儕鷹架的說明協助下才完成解題。但是在鷹架討論後解題發現，SB3雖再次畫出數線圖，但卻無法從中分析出解題訊息。可見，SB3並未真正理解題意與數線圖間的關係，故尚無法運用圖線表徵協助解題(見圖12)。

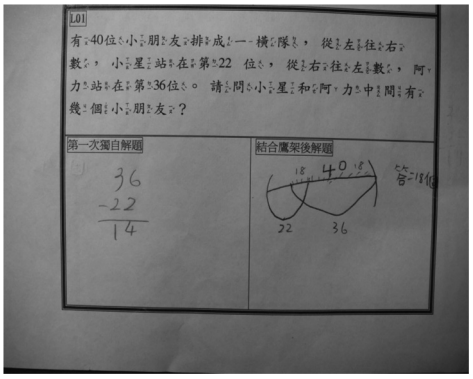


圖12：SB3解L01題之圖片檔

五、個案精緻解題模型之能力

在本研究中發現，數學高能力的學生SH1、SH2在同儕與教師鷹架運作下，解題時已逐漸會採用文字符號表徵，以類代數的方式取代具體的數字，來做抽象思考，解題模式更精緻了。而個案SB3在面臨問題情境時，雖然SB3仍是以數字代入計算的方式推論答案，未能精緻其解題模式，但在鷹架討論的過程中，也經驗了同儕所發展出來更周延的解題算式。

(一) SH1在解題模型精緻化面向之表現

舉例SH1題型N15「請問下圖中



■的重量是多少？」。

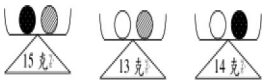
結合鷹架前解題，SH1在這一題中運用了三個算式解題，但是解答有誤。鷹架討論教學中，SH1一樣運用三個算式解題「53 – 36 = 17，36 – 25 = 11，25 – 17 = 8，■ = 8 g」，在討論過程中思維較為清楚，解答正確。

(二) SH2在解題模型精緻化面向之表現

在同儕與教師鷹架的解釋過程中，促使了SH2以更精緻化的解題歷程反省思考，以下舉出SH2在結合鷹架前的解題模型，與鷹架後解題模型更精緻化的對照例證：

在題型N09「機器裡有甲、乙、丙三種大小的齒輪，甲齒輪轉3圈時，乙齒輪轉2圈；乙齒輪轉1圈時，丙齒輪轉3圈。請問：丙齒輪轉2圈，甲齒輪可以轉多少圈？哪一個齒輪最大？」中，第一次解題時，SH2由題目的訊息都能推知「乙齒輪＞甲齒輪＞丙齒輪」，還更進一步推測丙齒輪轉2圈時甲齒輪轉1圈，雖然得出正確答案，但他表示不知該如何列式計算，僅能依據題意畫出三個齒輪並標示訊息。在鷹架討論時，決定以線段長表示齒輪旋轉的長度，於是SH2在鷹架討論後解題以線段圖比較甲乙丙之間的關係，並推算出答案。雖然SH2以線段圖的方式精緻了原先的解題計畫，建立了本題的數學解題模型，但尚未能以符號或算式表徵

解題。

又如解題型N16「圖中  的三種球各重多少克？」，SH2連結了過往的經驗，運用題型N15所建立的解題模型「比較兩者的差異」，共列出了六個解題算式成功完成解題。在鷹架討論時，SH2有了不同之前解題方式的想法，用了四個算式完成解題。顯見SH2能回顧原本的解題並進一步精緻解題策略的能力(見圖13)。

(三) SB3在解題模型精緻化面向之表現

在經過十週次非例行性數學問題的解題歷程，這些題目對SB3而言可能超過她能理解的範圍，因此發覺到SB3逐漸失去解題的熱忱，約至第六週次起，SB3無論第一次解題，或是鷹架討論時都顯得很不用心。從十週次的解題記錄中分析，第一次解題時，SB3常在尚未瞭解題意時，就急得將題目中的數值以嘗試錯誤缺乏邏輯的方式隨意運算。而SB3也缺乏回顧問題、檢查答案的能力，所以最後的答案大部分都是錯誤的。

在第二次鷹架討論後解題，也發覺SB3的解題歷程常有跳躍或不完全的情形。推論在同儕與教師鷹架的討論過程中，SB3並未能清楚的反省思考自己的解題歷程，而只是以模仿同儕解題的方式解題，因而造成知道這樣做會解題成功，但不知道為何會解題成功？

如題型N12「爸爸、媽媽和小安三人的年齡總和是84歲，媽媽比小安大28歲，比爸爸小4歲，你知道小安今年幾歲嗎？」。SB3第一次解題，以「84 – 28 = 56，56 – 4 = 54」，寫下答案54，從中無法理解她計算的邏輯，而答案也缺乏合理性，顯見SB3無回顧問題檢驗答案合理性的能力。在教師鷹架與同儕鷹架得討論後，SB3運用討論中獲得的概念以線段圖來理解題意，並列式解題「84 – 28 = 56，28 + 4 = 32，56 – 32 = 24，答24歲」。但計算出的答案SB3並沒檢驗答案合理性，與圖示和題意不符。證明SB3在未完全理解題意與圖示的情形下模仿解題，也沒能力從圖示中尋找解題訊息協助解題，缺乏回顧問題的能力。

六、個案解非例行性數學問題答對率提升之表現

王怡萍(2010)、張俊雄(2010)、許錦祥(2010)、黃招華(2010)等人在研究學生對數學謎題解題的歷程時，分別在他們的研究中

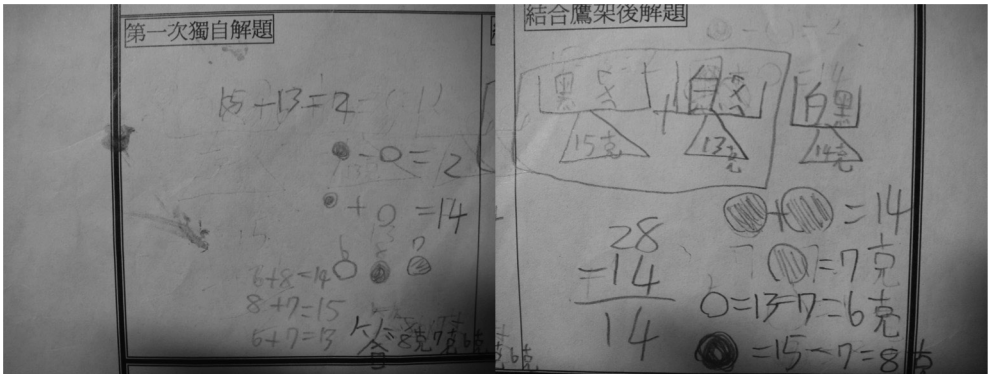


圖13：SH2解N16題之圖片檔

指出，透過同儕討論的合作學習能彌補自身知識的不足，進而培養出正確的學習態度，學生對數學也產生了學習的信心和樂趣。

許錦祥(2010)更認為不論男童或女童在數學謎題解題上，經同儕合作學習後，均能顯著提升解題表現。這與研究者的發現相符，圖14是研究個案在十週次的解題歷程中解題成功答對率，在結合鷹架理論與非例行性數學問題的學習下，個案SH1與SH2的解題答對率明顯提升，而中等數學能力的SB3除了在第五週至第八週的解題表現出現個人的學習瓶頸外，之後也有小幅的進步。

由圖15鷹架運作支持後個案學生的解題成功率發現，個案SH1與SH2的鷹架後解題成功率都可達到100.0%；SB3的成功率也維持在80.0%上下。

七、個案能應用建立之解題模型來解相似題型

學生所建立的概念結構若是整體性的，則在下次遇到相類似的題型時，可依循正確的概念結構而自行導出，這樣的能力正是九年一貫課程中所欲培養之「帶著走的能力」。(例如題型：「把一杯水倒入空瓶，連瓶共重135公克，如果倒入三杯水，連瓶共重235公克。問空瓶的重量是多少公克？」與題型：「一個裝滿豆子的罐子總重量48公克，吃掉半罐的豆子時則重量 32公克，請問原本裝滿豆子的罐子中全部豆子的重量是幾公克？」就是相似題型。)

因此研究者認為要確認學生的新刺激是否引發舊有思維，可觀察個案在非例行性

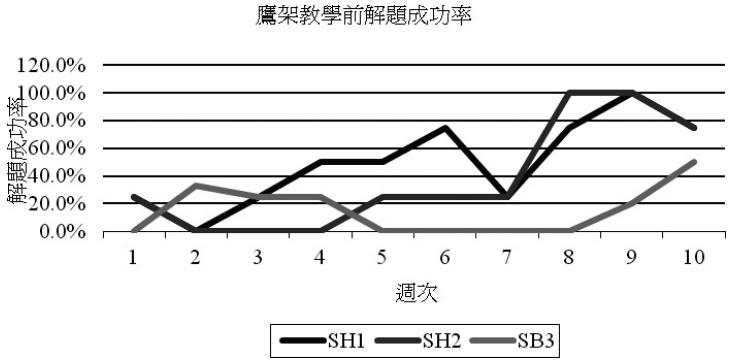


圖14：個案鷹架教學前解題成功答對率

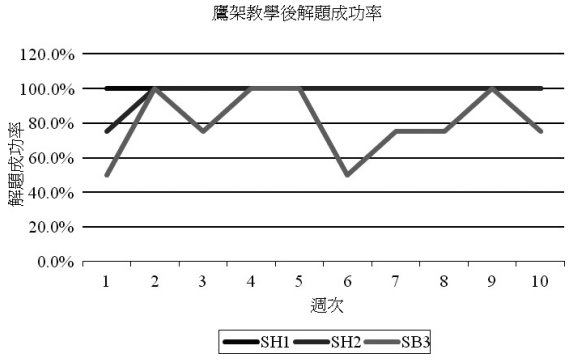


圖15：個案鷹架教學後解題成功答對率

數學問題的相似題型解題成效。個案在十週次的第一次獨自解題成功率與解相似題型的解題成功率結果分析，SH1在之前的解題成功率是50.0%，鷹架教學後解相似題型的成功率是73.0%；SH2在之前的解題成功率是37.5%，鷹架教學後鷹架教學後解相似題型的成功率是69.0%；SB3在之前的解題成功率是15.3%，鷹架教學後解相似題型的成功率是31.0%。從鷹架教學後解題成功率提升的數據發現三位個案在這次的研究歷程中，SH2數學解題能力提升幅度最大，其次是SH1，再來是SB3。

許錦祥(2010)在其研究中也發現，學童在數學謎題解題上，經合作學習後，均能提升解題表現，但高程度及低成就學童不顯著，只有中程度學童有顯著性表現。此研究與本研究的結果發現不相符；然經十週次的教學歷程後，本研究結果發現個案SH2在解題表現上提升幅度最大，其次是SH1，進步幅度最小的是中等數學能力的SB3。

伍、結論與建議

一、結論

(一)鷹架的運作提升題意的理解，幫助解題的第一步

本研究發現個案一開始面對非例行性數學問題，理解能力都不佳，在對於問題情境中所描述的概念不瞭解、或閱讀理解障礙的情況，因而產生了解題的障礙；但因三位個案個別的語文理解能力差異，在鷹架討論的運作後，題意理解的能力，也表現出差異。語文能力較好的SH1，在鷹架運作後，理解能力提升幅度最高；相對下語文能力較差的SB3，理解能力提升幅度最低。

(二)鷹架運作連結數學概念，幫助學生更貼近解題的近側發展區

SH1無論是在解題時，或數學同儕鷹架時，都較能提出解題計畫或解題關鍵，並能在解題當中監控自己或他人的錯誤。SH2在解題中，雖然也有解題計畫的想法，但往往卻因為監控能力不足與連結不良，而無法順利解題。SB3的鷹架討論對話當中，很少主動提出想法，通常都是接受同儕與教師鷹架協助。因此，當學習同儕在面對問題情境卻不知如何解題時，透過鷹架的作用，協助分析、蒐集題目的條件、與已知的數學概念相連結，並以同儕互動、數學討論對話的方式呈現，可以幫助學生更貼近解題的近側發展區。

(三)鷹架運作啟動解題思維，協助建立數學解題模型

數學能力愈高的學生，較能從非例行性數學問題情境中，找出相似的關鍵因素，或是利用技巧找出隱藏於其間的關係，並由此啟動解題之思維。但數學能力較低的學生，當題目所給定的條件無法立即算出或列不出算式時，就不知如何著手解題，影響到其解題的信心。三位個案經鷹架的運作，SH1與SH2各週自行數學建模的能力有明顯提升，然SB3特別依賴鷹架的運作才能轉譯算式達成數學建模。可知經由鷹架的作用能逐漸改善中低數學能力學生的數學解題建模的能力。

(四)鷹架運作轉化表徵思維，邁向數學成功學習的關鍵

三位研究個案在解題的歷程中，解題的表徵方式由最常使用的情境動作表徵，經由鷹架的討論運作，表徵的心智層次提升為

圖像表徵。在非例行性數學問題的鷹架討論運作下，個案SH1與SH2的解題表徵更提升至較抽象的類代數之符號表徵。從三位個案的解題表徵改變的歷程，可以看到透過數學鷹架的運作當中，使得解題不再是得到一個答案，而是有助於學生將所察覺到的賦予意義，透過符號操作產出的不同表示法，可以展現對於情境不同的洞察力，並解決問題。

(五)在多元解題的數學鷹架運作下，逐步將解題歷程精緻化

在本研究中發現，數學高能力的學生SH1、SH2在同儕與教師鷹架運作下，解題時已漸會採用文字符號表徵，以類代數的方式取代具體的數字，來做抽象思考，解題模式更精緻。而個案SB3在面臨問題情境時，雖然SB3仍是以數字代入計算的方式推論答案，解題精緻模式尚未明顯提升，但也經驗了精緻的解題模式。透過同儕鷹架可以讓學生交流彼此不同的解題方法與策略，並在經鷹架的運作下更精緻個人的解題策略。高能力者的解題策略較多元且靈活，在討論分享的機會下可增進其他成員解題策略的學習，促進其他成員靈活的思考，並由同儕學習的方式獲得更多的解題策略，學生能以彼此搭便車的方式增廣其解題策略的能力與應用。

(六)透過不同層次之間同儕鷹架的搭建，提升學生的解題能力

在結合鷹架理論與非例行性數學問題的學習下，個案的解題答對率明顯提升；從鷹架運作支持後，個案學生的解題成功率發現，個案SH1與SH2的鷹架後解題成功率都可達到100.0%；SB3的成功率也維持在80.0%上下。

(七)經鷹架運作學習後，均能提升解題表現

在十週次的解題歷程後與非例行性數學問題的後測結果分析，SH1解題成功率提升了23.0%；SH2解提升了31.5%；SB3提升了15.7%。從解題成功率提升的數據發現三位個案在這次的研究歷程中，SH2數學能力提升幅度最大，其次是SH1，再來是SB3。經鷹架運作學習後，均能提升解題表現，但高程度較中低成就學童有明顯性的表現。

二、對數學教學上之建議

數學教學，教師可選擇多一點思考的非例行性問題的教材，養成學生靈活思考，建立數學思維的解題能力，以激發其潛能。

教學中協助學生學習數學概念時，在生活應用解題與抽象形式能力間，來回反覆地相互加強，以能順利地發展數學能力。讓學生有充分的思考與等候時間，並鼓勵學生表達自己的想法，藉由討論發表的過程不斷的反思，使其解題策略多元化，據此建立完整的數學概念。

解題回顧問題行為的養成是解題成功與否重要的一環，若在教學中著重回顧問題階段之教學，則能培養學生驗證答案的正確性與自我反省解題策略精緻度的習慣。

三、對未來研究的建議

基於時間限制，本研究僅針對國小二年級中高成就的學生進行十週的解題能力之探討，推論上尚有限制，未來可延長研究歷程，以更長期的時間進行相關研究，並就中高年級以及高低成就的學生的解題能力改變情形加以探討。

因研究受限於時間、人力的關係，只以同一學校中三名學生為研究對象，未來研究

可以其他年級、地區學生為研究對象，進行鷹架教學方面的研究。

再則，本研究只針對「數與量」、「圖形空間」、「邏輯推理」等三方面做研究，且並未透過一些測驗或量化的數據得知學生的能力。未來宜就其他方面的數學概念做進一步的研究，研究時，可以先施以前測將學生數學能力區分出來，再依據能力高、中、低進行觀察其解題歷程之間的差異，在教學研究結束後，在施與後測，並精確量化評估學生數學能力改變之數據。

參考文獻

1. 王怡萍(2010)。**國小二年級學童在合作學習下解數學謎題之研究**。未出版之碩士論文，國立臺南大學數學教育學系，臺南市。
2. 張俊雄(2010)。**國小五年級學生在合作學習下針對數學謎題解題和擬題的研究**。未出版之碩士論文，國立臺南大學數學教育學系，臺南市。
3. 教育部(2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：作者。
4. 許錦祥(2010)。**國小六年級學童對數學謎題的解題歷程之研究**。未出版之碩士論文，國立臺南大學數學教育學系，臺南市。
5. 陳世杰(2005)。**國小學童閱讀理解策略與數學文字題閱讀理解、數學文字題解題表現之相關研究**。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學教育學系，高雄市。
6. 陳育琳(2007)。**數學同儕鷹架理論之發展與驗證**。未出版之博士論文，國立臺中教育大學教育學系，臺中市。
7. 黃招華(2010)。**國小四年級學童在合作學習下解數學謎題之相關研究**。未出版之碩士論文，國立臺南大學數學教育學系，臺南市。
8. 黃敏晃(1998)。**數學年夜飯**。臺北市：心理。
9. 黃敏晃(2000)。**規律的尋求**。臺北市：心理。
10. 葉其孝(1997)。數學建模教學活動與大學數學教育改革。**數學的實踐與認識**，**1**，92-96。
11. 蔡久瑜(2003)。**國二學習障礙學生和一般學生後設認知與數學解題表現之研究**。未出版之碩士論文，國立彰化師範大學特殊教育學系，彰化市。
12. 羅素貞(1996)。問題表徵與問題解決。**屏東師院學報**，**9**，149-176。
13. 鐘劍、簡國明、桂紹輝(2000)。淺談數學與數學建模競賽。**贛南師範學院學報**，**21**(6)，38-40。
14. Richard, R. S. (2007)。**數學學習心理學**(*The psychology of learning of mathematics*；陳澤民譯)。臺北市：九章。(原作出版於1987年)
15. Bentley, D., & Watts, M. (1992). *Communicating in school science: Groups, tasks and problem solving 5-16*. London: The Falmer Press.
16. Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University.
17. Clarkson, S. P. (1970). *A study of the relationships among translation skills and problem-solving abilities*. New York: Academic Press.
18. Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, *1*(2), 7-26.
19. Forman, E. A., & Cazden, C. B. (1985).

Exploring Vygotskian perspectives in education: The cognitive value of peer interaction. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture*, *communication*, *and cognition* (pp. 323-347). New York: Cambridge University Press.

20. Gallas, K. (1995). *Talking their way into science: Hearing children's questions and theories*, *responding with curricula*. New York: Teachers College Press.
21. Kaiser, G., & Willander, T. (2005). Development of mathematical literacy: Results of an empirical study. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *24*(2-3), 48-60.
22. Krutetski, V. A. (1963). Some characteristics of the thinking of pupils with little capacity for mathematics. In B. Simon & J. Simon (Eds.), *Educational psychology in the U.S.S.R.* (pp. 214-233). Stanford, CA: Stanford University Press.
23. Krutetski, V. A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in school children. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics: Vol. 2. The structure of mathematical abilities* (pp. 59-104). Chicago, IL: University of Chicago.
24. Krutetski, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: University of Chicago.
25. Langer, J. A. (1983). Instructional scaffolding: Reading and writing as natural language activities. *Language Arts*, *60*(2), 168-175.
26. Lemke, J. L. (1990). *Talking science: Language*, *learning*, *and values*. New York: Alex Press.
27. Marshall, S. P., Pribe, C. A., & Smith, J. D. (1987). *Schema knowledge structures for representing and understanding arithmetic story problems*. Arlington, VA: Office of Naval Research.
28. Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
29. Phillips, P. C. B. (1991). Optimal inference in cointegrated systems. *Econometrica*, *59*(2), 283-306.
30. Rumelhart, D. E. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. In R. J. Spiro, B. C. Bruce, & W. F. Brewer (Eds.), *Theoretical issues in reading comprehension* (pp. 38-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
31. Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
32. Van Hiele, P. M. (1985). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
33. Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
34. Wheatley, G. H. (1991). Constructivist perspectives on science and mathematics learning. *Science Education*, *75*(1), 9-21.
35. Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. In L. Stereefland (Ed.), *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 123-141). Utrecht, NL: State University of Utrecht.
36. Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89-100.

科學教育學刊
2012, 第二十卷第六期, 563-586

Chinese Journal of Science Education
2012, 20(6), 563-586

The Study of Developing Problem Solving Ability through Scaffolding Instruction and Non-Routine Problems

Ching-Hua Chien[1] and Chia-Fei Tsai[2,*]

[1]Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung University of Education
[2]Siang Tang Elementary School, Pingtung County

Abstract

The focus of this research is on the impact of teacher (expert) scaffolding and peer scaffolding on students' problem solving performances and thinking processes on non-routine mathematics problems. Three second graders students at the local elementary school in Pingtung County in southern Taiwan were selected based on their mathematics achievement. Two of them are high-achievement students when the third one is a middle-achievement student. Subjects were grouped together to receive one hour non-routine mathematics problem solving training once a week for ten weeks. The research used qualitative research method in data gathering and analysis. The study obtained following findings: 1. Scaffolding enhances students' understanding of meaning of these non-routine questions. 2. Scaffolding helps students promote their problem solving abilities through their proximal development zone. 3. Scaffolding stimulates students' problem-solving thinking, and helps them to build suitable mathematics model to solve mathematics problems. 4. Peer scaffolding enhances diverse mathematics problem solving strategies and students' problem solving performances.

Key words: Non-routine Mathematical Problems, Mathematical Problem-Solving Ability, Scaffolding

* Corresponding author: Chia-Fei Tsai

06-蔡佳霏.indd 586 2012/12/25 下午 07:15:43