科學教育學刊
2013, 第二十一卷第三期, 263-289
DOI: 10.6173/CJSE.2013.2103.02

Chinese Journal of Science Education
2013, 21(3), 263-289

國小數學教科書數學問題類型與呈現方式之比較分析——以臺灣、芬蘭、新加坡為例

徐偉民
國立屏東教育大學 數理教育研究所

摘要

本研究以臺灣、芬蘭與新加坡國小數學教科書爲對象，針對三國教科書中的數學問題進行分析。研究對象爲三國使用最普及的數學教科書，採內容分析法，依數學問題的類型和呈現方式進行分析。結果發現，三國在問題的數量上有顯著的差異，以芬蘭的問題最多，臺灣的問題最少。各類型問題所佔的比例上，三國之間則有一致的現象，都明顯地偏重無連結程序的問題。臺灣數學問題的呈現以文字型態爲主，芬蘭以數學型態爲主，新加坡則兼顧不同型態的呈現。在例題上，臺灣多呈現不同的解題思考與歷程，芬蘭以定義和示範的方式來呈現，新加坡以示範和結構引導的方式來呈現。在練習題上，芬蘭和新加坡設計較多開放性、探索性、和腦力激盪的問題給學生。

關鍵詞：內容分析、問題表徵、認知需求、數學教科書、數學問題

壹、研究緣起與目的

在最近的國際大型測驗中，臺灣學生的數學成就表現非常亮麗：在國際經濟合作發展組織(Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]) 2006年所舉行的「國際學生評量計畫」(the Programme for International Student Assessment [PISA])，臺灣15歲學生在57個參與國中名列第一(OECD, 2007)；PISA 2009年測驗中，臺灣學生的表現雖略有下滑(在65個參與國中名列第五)，但仍然表現亮眼，只和前三名的上海、新加坡和香港有顯著差異(OECD, 2010)；TIMSS (Trend in International Mathematics and Science Study) 2007的測驗中，臺灣8年級學生獲得所有參加測驗國家的第一名，4年級學生成績排名第三(Mullis, Martin, & Foy, 2008)。亮麗的國際測驗表現雖然振奮國人，但卻有一些隱憂存在，包括在PISA 2006和2009測驗中，臺灣學生得分的級距在前幾名國家中幅度最大(標準誤爲分別是4.1和3.4)，顯示臺灣學生的數學表現較爲分散。臺灣學生在國際測驗中所出現的潛在問題，值得進一步的探討。

影響學生數學學習的關鍵之一，便是教科書。因爲教科書不但提供了教學內容、教學順序與實施的架構(Nicol & Crespo,

*通訊作者：徐偉民
(投稿日期：民國101年7月23日，修訂日期：民國101年10月26日，接受日期：民國101年12月1日)

2006)，而且是影響教師數學教學的最主要因素(Lloyd, 2008)。黃政傑(1995)指出教科書是教室活動中師生教與學互動的主要媒介；Grouws, Smith與Sztajn (2004)的研究也發現，有超過2/3的4 - 8年級的教師，數學課讓學生學習教科書內的數學問題；Tarr等(2008)認爲不同取向的數學教科書，其哲學觀與內容呈現上有明顯的差異，會影響教師教學時的呈現方式，並影響學生的數學學習；Stein, Remillard與Smith (2007)指出美國傳統與改革版本的數學教科書，在內容呈現的順序、方法、焦點、和組織的形式上都有很大的差異，會影響學生數學學習的表現。數學教科書內容組織與呈現的差異，將會影響學生的數學學習表現。

臺灣過去中小學的數學課程，歷經了數次的改革，從學科本位、學生本位到能力本位的發展歷程(鍾靜，2005)。從強調知識的獲得、知識建構、轉向強調能力培養。這主要是受到數學教育改革潮流的影響，從過去重視數學知識結構、基本計算技巧與例行性問題的練習，轉向強調學生主動建構數學知識的觀點(Anderson, 2003; Becker & Selter, 1996)，以及主張在高科技和變化快速的社會中，學生除了具備基本的知識和技巧外，還要培養多元的觀點、人際溝通和團隊合作等能力(Lott & Souhrada, 2000)。對數學教育目標和觀點的改變，會直接反應在數學課程的內容上。雖然，教師不見得會完全依據教科書的內容與精神來進行教學，但不可否認教科書對於學生數學學習影響的重要。而同樣在PISA 2006, 2009測驗中數學表現優異的芬蘭，不但在2006測驗中未達水準的比例僅佔0.20% (臺灣佔0.60%)，而且學生的表現較爲平均且集中；而新加坡在TIMSS測驗表現中一向亮麗，在2007測驗中4年級學生表現位居第二(表現顯著優於臺灣)、8年級學生表現位居第三(臺灣位居第一，但兩國學生之間無顯著差異)。芬蘭和新加坡學生優質且平均的數學表現，值得臺灣學習與效法。因此，本研究希望進行臺灣、芬蘭和新加坡的國小數學教科書的內容進行比較分析，以作爲後續臺灣數學教科書編修與教師教學的參考。

教科書的內容分析，可以從好幾個面向著手，包括數學概念的分析(主題呈現的邏輯與順序)、和課程設計的元素(如問題和活動的類型、科技和教具的使用等；National Research Council [NRC], 2004)；或是從教科書編輯的主觀層面(如課程編寫的哲學依據與目的)、客觀結構(概念和問題的表徵、內容的物件和表徵、以及內容的結構和外觀等；Remillard, 2005)；或是針對不同的數學主題(如幾何、代數等)來進行比較(徐偉民、徐于婷，2009；陳仁輝、楊德清，2010)。但本研究選擇以數學問題(mathematical tasks; Perrenet與Taconis (2009)認爲tasks和problems類似，在本文中翻譯成「數學問題」)來做爲分析與比較的單位，最主要是因爲數學問題是數學教科書內容的構成基本單位，不但直接影響學生學習數學的方式和結果，同時也會影響學生對於數學本質和學習的觀點(Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 2007)。在檢驗教師教學表現是否符合數學教學改革的主張，讓學生具備改革課程中所希望培養的能力，教師所使用的數學問題類型便是一項關鍵的指標(Silver, Mesa, Morris, Star, & Benken, 2009)，而且從教師所使用的數學問題類型，也可以來瞭解教師的教學是否協助學生發展數學概念的理解(Hiebert & Grouws, 2007)，甚至在進行跨國性教科書內容的比較時，數學問題也是主要的分析單位與指標(如Zhu & Fan, 2006)，以了解對不同國家學生數

學學習可能產生的影響。上述的相關研究都共同指出了，數學教科書的內容(數學問題)對學生數學學習的重要影響，且國內數學教科書使用的研究中亦發現，教師在使用時幾乎完全依據教科書中的數學問題來進行教學(徐偉民，2013)，由此更可了解教科書的內容對學生數學學習的關鍵影響。因此，本研究決定針對教科書中數學問題的類型和呈現方式，來分析三個國家之間的異同，藉此更瞭解我國國小數學教科書的內容，以及對學生學習可能產生的影響。

貳、文獻探討

一、臺灣、芬蘭、新加坡三國數學課程的整體目標

臺灣九年一貫的數學課程，課程設計以學生爲主體，以生活經驗爲重心，培養現代國民所需的基本能力。同時，除了希望學生能掌握數、量、形的概念與關係外，更希望培養學生的數學素養、發展解決問題、表達與理性溝通、批判分析、以及欣賞數學的能力，以成爲未來世界的公民(教育部，2003)。爲了強調統整的概念與帶著走的能力，九年一貫數學領域將學習主題分爲：數與量、幾何、代數、統計與機率、連結五大範疇，並將國中小的學習歷程分爲四個階段：1 - 3、4 - 5、6 - 7、8 - 9年級(97綱要預計要將四個學習階段修改爲1 - 2、3 - 4、5 - 6、7 - 9年級)，且每個年級均明確列出該年級所應學習的分年目標。

芬蘭在2004年由國家教育局(National Board of Education [NBE], 2004)頒布基礎教育的核心課程，說明基礎教育的總體目標，以及各學習領域的目標。其中在數學領域部份，芬蘭將數學學習分成三個階段：1 - 2、3 - 5、6 - 9年級，同時將數學分爲「數與計算」、「代數」、「幾何」、「測量」和「資料處理與統計」五大主題。芬蘭核心課程綱要以學習階段的方式，分成三部分來呈現課程的目標和內容：首先，呈現該階段整體數學學習的目標(objectives)，如理解概念的結構；接著呈現不同數學學習主題的核心內容(core contents)，包含數與計算、幾何等；最後呈現學生在該階段學習結束時，包含思考與工作的技能、以及在不同學習主題上理想的學習表現(NBE, 2004)。從芬蘭的數學課程綱要中，只能看出各階段、各學習主題主要學習的核心內容(如第二階段幾何的核心內容之一爲「平行和垂直線」)，沒有詳細的內容說明或舉例，也無法看出各年級學習的內容和目標。芬蘭的數學課程強調數學與生活連結的重要，在每個階段目標後，均列出「類似」連結的目標，如：「數學思考及執行技能」在數學解題時的應用、「數、計算及代數」的統整能力等。整體而言，芬蘭的數學課程希望提供學生機會來發展數學的思考，學習數學的概念並將之應用在問題的解決。數學教學是在發展學生創意和精確的思考、引導學生去發現、形成問題，並找到解決問題的方法(NBE, 2004)。

新加坡在2001年頒布新的課程綱要，其中國小的數學綱要包含兩部分：A部分解釋綱要的哲理與實施的精神，並且詳細說明數學綱要的目標；B部分詳列各階段的教學內容，以確保小學至中學課程的連貫性。在教學大綱中，每個主題在各階段都重複提及，採用螺旋式的方法加深課程內容，使學生能鞏固學習的概念和技能，且更進一步發展一套概念和技能，並發展概念、技巧、過程、態度和後設認知五種相關的能力(Curriculum Planning and Development Division [CPDD],

2006)。新的課程綱要以解題爲核心，希望學生能獲得關於數學的基本概念和技能，以應用於日常生活中，同時做爲未來學習數學或其他學科之基礎。新加坡數學課程希望學生透過解題的歷程，來發展數學思考和推理技能，瞭解數學概念之間的連結，以及數學和其他學科的關聯，並能有效的使用不同的數學工具來進行數學的學習與應用，發展數學推理和溝通的能力，以及對於數學的積極態度，從數學概念中來產生具有想像力和創造力的工作(CPDD)。

由臺灣、芬蘭和新加坡三國數學課程的整體目標來看，除了希望學生學習數學相關的知識和技能外，都強調培養學生的數學素養，並且發展學生思考、推理、溝通等能力(教育部，2003；CPDD, 2006; NBE, 2004)。同時課程內容也強調和學生生活經驗的連結，並且從過去數學知識結構的編寫方式，逐漸轉向學生和能力本位方式的編寫(鍾靜，2005；CPDD; Pehkonen, 2007)。雖然，三國小學數學課程劃分不同的學習階段(新加坡1至4年級爲基礎階段，5、6年級爲定向階段)，但學習的主題類似，而且都強調高層次數學能力的發展與應用。三個國家都屬於國定課程的國家，這樣的數學課程目標，應該會反應在三國的教科書中。因此，三國教科書中的數學問題，除了聚焦在數學的概念與計算的技巧外，也應該有許多高層次的生活應用、推理思考等類型的問題，才能達成三國所設定的目標。但不同類型的數學問題的分佈情形如何？三國之間是否有所差異？這些都是本研究意圖探討的焦點。

二、教科書中數學問題的類型與呈現方式

教科書內容對數學教學和學習的影響，可以從「呈現的內容」(what的層面)和「呈現的方式」(how的層面)兩部分來加以探討。

(一)教科書呈現的內容

教科書的內容，通常以數學問題的方式來呈現，而隨著對於學習的主張不同，使數學問題呈現的焦點有所不同：從強調正式數學表徵和抽象化原則的呈現，轉向重視學生的先備知識和經驗的呈現方式(Willoughby, 2000)。數學學習從重視基本計算技巧的練習，轉向強調思考與解決問題能力的培養，且問題的內容也強調與學生的生活經驗有關(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)。

教科書內呈現的數學問題，依據解題時所需的認知需求來區分，由低到高可以分爲四個類型：記憶型、無連結程序型、具連結程序型、和作數學四種類型(Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000)。記憶型和無連結程序型的數學問題，學生只要透過記憶事實或公式演練就可以成功解題，不需要真正的理解。這兩類型的問題，屬於低度認知需求的問題，學生在解題時不需要有太多認知的需求或負擔，就能成功的解題；具連結程序型或是作數學的問題，屬於高度認知需求的問題，學生必須要真正的理解，並在思考與探索之後，選擇適當的策略或表徵，才能解決問題。低認知需求的問題，著重的在基本事實與計算技巧的熟練；高認知需求的問題，則強調概念和程序意義的連結、問題的探索、推理與應用。不同類型的數學問題，不僅影響教師教學的焦點與呈現方式，也對學生數學學習焦點、數學能力的發展、以及對於數學的態度都會有所影響。Stein等(2000)對各類型數學問題的定義和範例如表1。

表1：各類型數學問題的定義與範例

數學問題類型		定義	範例
低認知需求	記憶型	透過記憶事實、公式或定義的來解題，不需使用程序，也不進行概念或意義的連結	將1/2和1/4化成小數 (學生記憶1/2 = 0.5, 1/4 = 0.25，不需計算便能得出答案)
	無連結程序型	在有限的認知需求下，使用運算的程序來解題，焦點在於計算的正確，而非發展數學的理解	將3/8化成小數 (學生需用直式除法來計算出3/8 = 0.375)
高認知需求	具連結程序型	使用多重表徵來進行意義的連結，解題焦點除了程序的使用外，也強調發展數學概念的理解	使用百格板、小數和百分比來表示3/5 (學生使用圖形、小數和百分比來呈現同一分數)
	作數學	需要複雜、非計算的思考，沒有固定的程序或方法來解題，需要探索和瞭解數學概念的本質和關係才能解題	在4 × 10方格中有6小格塗上陰影，請解釋陰影部分所佔的百分比、小數、分數 (學生需要提出完整的說明)

資料來源：修改自*Implementing standard-based mathematics instruction* (pp. 13, 16), by M. K. Stein, M. S. Smith, M. A. Henningsen, & E. A. Silver, 2000, New York: Teacher College Press.

國內外的相關研究，也呼應了問題類型對學生數學學習的影響：Henningsen與Stein (1997)的研究發現，課堂中實施的低認知問題使學生的數學學習聚焦在程序的熟練，以低認知的方式來學習數學；Stein等(2007)也指出，美國傳統數學教科書以低認知問題爲主，使教師以講述方式進行教學，學生學習的焦點在於解題技巧的熟練。而高認知問題的實施，Silver等(2009)的研究發現，教師會採取開放且雙向的互動方式，要求學生思考、討論和探索，從中來創造解題的方法並理解數學的概念；而Boaler與Staples (2008)以及Gutstein (2003)的研究也發現，教師採用高認知的數學問題，提供學生較多思考、互動和討論的機會，可以有效提升學生數學學習的表現。而國內的研究(徐偉民，2011a、2011b)亦發現，低認知的問題實施時，教師大都以封閉式的問題與學生互動，學生沒有太多思考與表達的機會；但是在高認知問題實施時，則教師採用較開放的問題與學生互動，要求學生思考、解釋自己的解題方法、並進行不同解法之間的比較等。這如Stein等(2007)的主張，高認知的問題不但增加學生對於概念理解的機會，同時也培養了學生思考、溝通和推理等能力。由此可知，問題類型對學生數學學習的重要影響。

(二)教科書內容呈現的方式

對數學學習不同的觀點，其教科書內容呈現的方式就會不同。Stein等(2007)指出，美國傳統版(conventional)和標準本位版(standard-based)兩種不同版本的教科書，在內容的呈現上，有明顯的差異存在：在內容呈現的順序和方法上，傳統版本教科書直接呈現學生學習的內容，透過仔細的順序安排，讓學生從基本的概念和技巧，逐漸學會比較高層次的技巧與能力。而標準本位版本的教科書則不直接呈現學生所要學習的概念，希望透過活動的主要探索中，讓學生從思考與推理中去歸納所獲得的概念；在內容的焦點上，傳統版本強調程序的熟練，而標準本位版本則重視概念的理解，焦點擺在應用與解題上；在內容組織的形式上，傳統版本以數學的主題作爲單元和章節組織的依據，採

用螺旋式的方式，讓學生逐漸加深加廣的理解與學習。而標準本位版本則把不同的數學主題組織成一個大概念的模組，讓學生在學習中可以同時學習好幾個數學概念，甚至是跨年級的概念。傳統版本的教科書，學習的焦點在於解題技巧的熟練；標準本位的教科書，學習的焦點則在於解題、思考、溝通、推理等能力的培養。

教科書內容呈現的方式，除了從整體的編排方式來比較外，也可以從數學問題呈現的方式來瞭解。Zhu與Fan (2006)在比較中國與美國中學數學教科書中數學問題類型和表徵型態的異同時，將數學問題分爲：1.例行性與非例行性問題；2.傳統與非傳統問題；3.開放性與封閉性問題；4.應用與非應用問題；5.單步驟與多步驟問題；6.充足條件、無關條件與條件不足問題及7.數學型態、文字型態、視覺型態與聯合型態問題(指數學問題的表徵型態)等，進行分析比較時，發現兩國教科書中呈現的數學問題類型和表徵型態都有所差異，這些差異將對學生的數學學習產生影響。其中，1 - 6類的問題涉及到解題的難易程度，與學生解題時所需要的認知需求有關，這和Stein等(2000)對高低認知問題分類的標準類似，在之前已經說明高低認知問題對學生數學學習的影響，因此不再贅述，以下只針對問題表徵型態對學生數學學習的影響作探討。

NCTM (2000)指出，表徵是數學學習過程中很重要的一部份，提供學習者有效的解題工具，幫助學生達成數學知識的理解，和他人溝通以及推理的目的。在數學的表徵系統中，包含了圖像、符號、口語、具體物、真實情境等(Lesh, Post, & Behr, 1987)，如果能夠建立表徵之間的連結與轉換，將有助於學生產生有意義的學習。Perkins (1998)也指出，如果學生可以用不同的表徵來呈現同一個概念，就表示他們對於學習的內容已經理解。由此來看，如果問題以聯合型態來呈現，學生能進行表徵間的連結，比較容易達成理解的目的；如果以單一型態來呈現，如數學型態，則學生需要理解符號的意義與運算的規則，而文字型態則需要學生理解文字的意義，並將數量的關係釐清後再改寫成數學型態的算式，並應用相關的規則或程序才能解題。所以一般而言，文字型態的表徵對學生而言是較難的，視覺型態由於是半具體圖形的呈現，可以降低學生理解或解題時的難度。

三、數學教科書研究的重要性

在「No Child Left Behind (NCLB)」的政策提出，以及NCTM (1989)出版*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*一書後，數學教育界開始重視數學課程與學生數學學習結果之間關係的研究，以檢驗所提出的課程計畫或發展課程的有效性(Stein et al., 2007)。其中，數學教科書的內容便是受到關注與檢驗的焦點之一：在臺灣，徐偉民與徐于婷(2009)、陳仁輝與楊德清(2010)等人，都進行跨國性數學教科書的比較，透過內容分析的方法，來瞭解臺灣與其他國家教科書在不同數學主題上編排和呈現的異同；在國外，Charalambous, Delaney, Hsu與Mesa (2010)、Son與Senk (2010)、以及Zhu與Fan (2006)等人，也都針對特定的學習主題(如分數加減、乘除)或數學問題的型態，進行跨國性教科書內容的比較，希望藉由比較和分析的結果中，瞭解到自己國家數學教科書的特色，以及對教師教學和學生學習可能產生的影響。教科書內容呈現的差異，不僅會影響教師的教學實施，更會影響學生的學習結果

(Tarr et al., 2008)，因爲國內外研究上均發現教師大都依據數學教科書的內容來進行教學(徐偉民，2013；Grouws et al., 2004)。這就是爲什麼教科書相關研究受到重視的主要原因。

再以近年來大型國際測驗的舉辦和結果的情況來看(如TIMSS、PISA)，各國愈來愈重視學生在數學方面的表現。測驗的結果一方面反映了各國數學教育實施的成效，另一方面也反映了各國學生所具備的數學知識、能力和態度，而課程和教學正是影響學生數學學習表現的主要因素。因此，本研究以臺灣、芬蘭和新加坡的數學教科書爲對象，針對教科書中呈現的數學問題進行分析和比較。希望從分析和比較中，更瞭解臺灣數學教科書的特色。

參、研究設計與實施

一、研究方法

本研究採用內容分析法(content analysis)。王文科(2002)指出內容分析亦稱資訊分析或文獻分析。在許多研究領域中，常需要透過文獻的分析或文件資料的彙整而獲得完整的資訊。因此，內容分析法便常應用於文件分析的研究中；而NRC (2004)也提出課程評鑑和比較的架構，並指出若是要針對教科書的內容進行分析，建議採用內容分析的方法。這是本研究之所以選擇內容分析爲研究方法的主要原因。

早期內容分析法是對文件資料的內容作客觀而有系統的量化，但此定義在今日顯得範圍過於狹窄，因此歐用生(2000)認爲內容分析法爲透過量化的技巧以及質的分析，採客觀與系統的態度，進行文件內容的研究及分析，藉以推論產生該文件內容之環境背景和意義的一種研究方法。本研究先採用定量分析的方式加以統計，以比較臺灣、芬蘭和新加坡國小數學教科書中數學問題類型分布的情形；再結合定量定性的分析方式，探討三個國家數學問題呈現方式的異同。

二、分析單位與類目

(一)分析單位

分析單位是內容量化時分析計數的標準。歐用生(2000)指出，內容分析的單位最常使用的有：字、主題、人物、項目、時間與空間單位、課、章、段、詞、句、頁等，研究者依照其研究目的而設定各種分析單位。分析單位的形成可分爲兩種形式：一爲依據理論或過去研究結果發展而成，一爲研究者自行視需要與內容分析對象的性質而定。

本研究的數學教科書沒有章、節的分類；而單元、課包含的概念很多(例如臺灣康軒數學五上第8單元「體積」，此單元內的數學問題包含「數學百分百」的練習共有40題)，也不宜作概念之分析；段有長有短，每段落包含的概念數量不一，不宜作爲量化的標準；以詞、句、字爲分析單位時，常因數量過多，費時費力，對大量資料之分析，易於斷章取義，趨於瑣碎。因此，本研究的分析單位以「數學問題」爲單位，將課本中的數學問題依分析類目表進行分類計數。分析範圍以教科書爲主，習作、前言、目次、編輯要旨、教學指引等不列入計數範圍。本研究數學問題計數的標準爲：1.單一問題：問題敘述僅包含一主要問題者，且只有一個數字編號，如圖1，計數爲一題；2.題組式問題：一個問題包含數個子問題者，每個子問題有各自的數字或英文的編號，其各子問題分別計數爲一題，如：圖2和圖3計數爲2題。

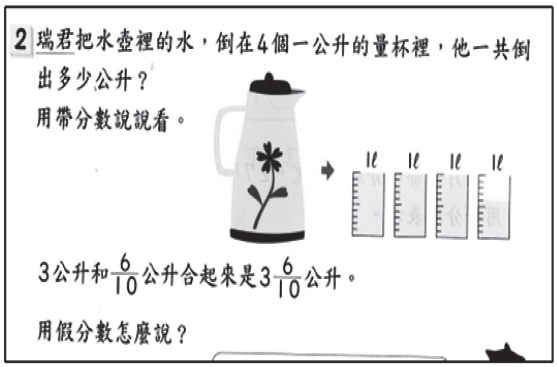


圖1：臺灣單一數數學問題範例

資料來源：楊瑞智(主編) (2010a)。**國小數數學4上**(頁101)。新北市：康軒。

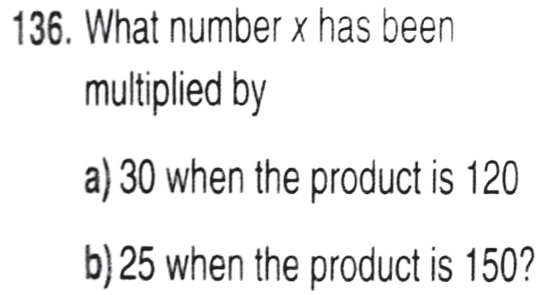


圖2：芬蘭題組式數數學問題範例

資料來源：*Laskutaito 6A in English* (p. 25), by P. Saarelainen, 2010, Helsinki, Finland: WSOY.

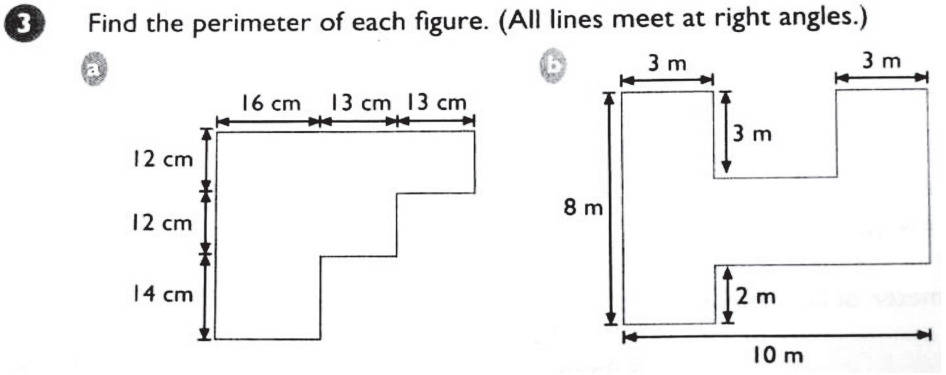


圖3：新加坡題組式數數學問題範例

資料來源：*My pals are here! Maths 4B* (p. 106), by Y. C. Lee & Y. S. Yong, 2008, Singapore: Marshall Cavendish.

(二)分析類目

一般來說，分析的類目包含兩大類，一是「說什麼」類目(“what is said” categories)，用以測量內容的實質部分，包括主題、方向、特徵、主角、權威、來源、出處、目標、標準、方向及價值等；二是「如何說」類目(“how it is said” categories)，用來測量內容的形式，包括傳播的形式、敘述的形式、感情的強度、策略等(王石番，1991)。而本研究的目的在於探討三個國家數學問題的類型和呈現方式，其中數學問題的類型涉及到教科書中意圖學生數學學習的目標與焦點，是屬於「說什麼」類目中的價值類目(又稱目標類目)。此部分將採用Stein等(2000)對數學問題類型分類的標準，依解題時所需的認知需求將數學問題分爲記憶型、無連結程序型、具連結程序型、以及作數學四類型，在進行問題歸類時，將根據表1的定義和範例，來作爲歸類的依據：強調事實和規則的記憶，解題時所需的時間短到不需要使用程序就能得出解答，將歸類爲記憶型問題；強調使用運算程序來解題的，焦點在於程序使用的精確

性，將歸類爲無連結程序型問題。這兩類低認知的問題，主要的差別在於是否需要運用程序來進行解題；除了程序的精確使用外，還強調不同表徵或意義之間的連結，則將歸類爲具連結程序型問題；若是需要複雜且非計算的思考，沒有固定程序和解題方法，需要學生去探索與創造的問題，則歸類爲作數學型問題。

而數學問題的呈現方式通常是以不同的表徵型態來呈現，是屬於「如何說」類目中的敘述形式類目。此部分將採用Zhu與Fan (2006)對數學問題表徵型態的分類，將問題的表徵型態分爲數學型態(問題的主軸只包含數學符號的表徵，如圖4)、文字型態(問題的主軸全爲文字敘述，如圖2)、視覺型態(問題的主軸簡明地由插圖、圖像、圖表等來表徵，如圖3)、和聯合型態(問題的主軸呈現出兩種或三種之表徵型態，如圖1)四種類型。除了從四種表徵型態來瞭解三國數學問題的呈現方式外，也以單元爲單位，來分析三國單元內數學問題編排的順序，以及問題呈現的特色。總結來說，本研究透過定量分析的方法，來進行數學問題的歸類與統計，以回答三國教科書中「說什麼」的類目(瞭解數學問題類型的分佈)；透過數學問題表徵型態的歸類統計的定量分析，以及單元內數學問題編排順序與呈現特色的定性分析，來回答三國教科書中「如何說」的類目(瞭解數學問題的呈現方式)。雖然每個數學問題都進行兩次的歸類(類型和表徵型態)，但每一次的歸類誠如王文科(2002)所指出的，各個類別是力求周延、互斥與獨立的。



圖4：數學型態表徵的數學問題範例

資料來源：*My pals are here! Maths 4B* (p. 56), by Y. C. Lee & Y. S. Yong, 2008, Singapore: Marshall Cavendish.

三、研究對象

(一)臺灣康軒數學

臺灣的教育部(2003)公佈「九年一貫數學學習領域課程綱要」，並於94學年度起從一年級開始逐年實施，至98學年度1至6年級均採用依據92綱要所編寫的數學教科書。因此，本研究採用依據92綱要所編寫的1至6年級教科書進行分析，並採用以目前市場使用最普及的康軒數學爲對象，每學年兩冊，共計12冊(99學年度上學期與98學年度下學期學校用書，1上、2上、5上爲2009年出版，3下是2008年出版，其餘皆爲2010年出版)。康軒數學在每一冊中都包含數與量、幾何、代數、統計等不同數學主題，而非以單一主題爲一冊的方式來呈現。在12冊中，總共有113個單元，平均每冊有9.4個單元。康軒數學的內容強調生活化的情境、開放性的問題、以及透過圖像的人物呈現不同的解題思考歷程和結果(徐偉民、林美如，2009)。此外，在每個單元結束後會有一頁的練習題(名稱爲「練習百分百」)，整冊有2 - 4個綜合數個單元的練習題(名稱爲「學習廣角」或「學習步道」)，以及提供學生兩本數學習作本供學生練習。此外，出版社也提供完整的教具供教師教學使用。

(二)芬蘭laskutaito in English (簡稱L版數學)

受到數學教育改革運動的影響，「解題」在過去20幾年間，都是芬蘭數學課程的

主軸，教科書也採用解題取向的方式來進行編輯(Pehkonen, 2007)，WSOY所編輯的教科書也不例外。芬蘭和臺灣一樣，是屬於一綱多本的國家，在1994年時芬蘭訂定基礎教育國家核心課程綱領，於2004年針對基礎教育國家核心課程綱領修正調整，完成新的基礎教育國家核心課程綱領(NBE, 2004)。WSOY所發行的L版系列數學教科書，是依據2004年國家核心課程綱領編輯的教科書，目前是芬蘭最大的教科書出版商(陳之華，2010)，同時也是唯一提供英語內容的版本，這是本研究以其爲研究對象的原因。L版數學每學年兩冊，共12冊。該版本強調其內容主要的目的在於幫助學生獲得概念的理解，以及發展學生的推理能力(Saarelainen, 2009)。L版數學在每一冊中，也都包含不同數學主題的單元，但每冊單元數不多。在12冊中，總共有54個單元，平均每冊有4.5個單元。在每個單元的後面，L版數學都提供了「解決問題」、「開放性問題」、「腦力激盪問題」來供學生練習，教科書後面也用藍、紅色兩種色塊，來區隔出「額外的練習」和「回家作業」兩部分，這兩部分類似臺灣教科書的習作，因此不列入本研究分析的範圍。本研究所使用的L版數學除5A、6A爲2010年版，其他均爲2009年版。

(三)新加坡*My pals are here! Maths* (簡稱M版數學)

新加坡於2001年頒布新綱要，數學教材從統一版本開放至六種版本，本研究採用的國小數學教科書是由Marshall Cavendish教育事業出版的國小1至6年級M版數學教科書，全套共12冊。以2010年出版的M版數學爲例，強調的是一個以理解和活動爲本位的設計方式，透過範例的說明和遊戲的使用，讓學生獲得數學學習的樂趣和信心，並強化數學的學習。該版本教科書設計的精神除了讓學生獲得數學知識的基礎外，還希望培養創造性和批判性思考的能力，並成爲有效能的解題者(Ling, 2008)。此外，M版數學在序言中也說明希望教師如何使用該教科書(例如在4A中指出希望教師能夠透過高度的鷹架協助來介紹新概念，並透過類似的問題來立即檢驗學生是否理解)；也希望學生將教科書中的活動和朋友一起玩，讓學生去發現活動或遊戲中所涵蓋的數學概念。M版數學在一冊中包含了數學的不同主題(例如4A包含整數、角度、面積和周長等單元)。一般而言，每個單元都包含有幾個活動：let's learn部分是在介紹與學習新的數學概念；carry out this activity是提供學生練習的問題或活動(單一問題或題組問題)；let's explore則提供非例行性問題讓學生去探索與解題，並了解其中蘊含的數學概念。意即，每單元的第一部分教導學生主要的數學概念、技巧及解決問題的策略；第二部分透過團體活動或競賽的方式，讓學生在合作中學習數學；第三部分鼓勵學生使用計算器或是電腦完成回家作業，將科技融入學習中。在12冊中，M版數學總共有92個單元，平均每冊約有7.7個單元。此外，教科書中也爲高能力的學生設計挑戰性的問題，使能培養其思考能力與發展潛能(張琇涵，2006)。本研究所使用的M版數學除3A, 3B, 4A, 4B爲2008年版，2B爲2009年版，其餘均爲2010年版。

四、分析類目的信度考驗

歐用生(2000)認爲信度直接影響內容分析之結果，至少要有兩個編碼員，以獨立自主的立場，共同分析資料。不同編碼員一致性愈高，內容分析的信度也愈高；一致性愈低，內容分析的信度也愈低。因此本研究以

「相互同意度」進行信度檢定，邀請三位評分員，三位均爲主修數學教育的碩士班研究生，進行「評分員的一致性」的信度檢定。本研究進行信度分析的過程和步驟如下：

1.選取樣本：從三國的一年級、四年級、六年級各選取一個單元。臺灣康軒數學一下第2單元20以內的加減、四下第8單元周長與面積、六下第3單元列式與等式；芬蘭L版數學1B第1單元“Addition and Subtraction with numbers 0 - 20”、4A第4單元“Geometry”、6A第1單元“Revision and practice”；新加坡M版數學1B第12單元“Numbers to 40”、4B第12單元“Area and Perimeter”、6A第1單元“Algebra”來做信度建立的分析樣本。

2.說明：將分析類目表及其定義分發給評分員閱讀，由研究者說明歸類的方式及原則，針對類目表中的問題加以釐清，並對分析類目表作討論與再修正。

3.歸類：由三位評分員各自針對單元的數學問題進行類目歸類的工作。

4.信度計算：歸類結果採用評分員信度法來檢視評分者間同意度，並採用信度簡易公式(歐用生，2000)：先計算評分者間的相互同意值($Pi = 2M / (N_1 + N_2)$，M表示兩人共同同意項目數，N_1、N_2爲每位評分員同意的項目數，再求平均相互同意值($P = \sum_{i=1}^{n} Pi / N$，$N$表示評分者兩兩相互比較的總次數)，最後歸類之結果依伯格納簡易信度公式求出信度($R = nP / 1+ [(n - 1) P]$ ，n爲評分者總人數)。三位評分員在數學問題類型和表徵型態歸類分析的信度結果如表2和表3。

五、本研究效度的考驗

本研究考驗效度的過程如下：

1.理論依據：在數學問題的分類上，本研究採用Stein等(2000)的分類，作爲本研究分析的類目之一，該分類曾經作爲檢驗教師的數學教學是否符合改革課程目標的主要向度之一(Silver et al., 2009)；在數學問題的呈現，本研究採用Zhu與Fan (2006)對數學問題表徵型態的分類，該分類曾用來分析中國和美國數學教科書的問題型態。因此，本研究所採用的分析類目，都具有理論和應用上的支持。

2.確定分析的類目之後，便邀請三位具有教科書分析經驗的研究生，進行問題計數與歸類標準的說明，並針對三個國家中低中

表2：數學問題類型分析信度結果

評分員	甲	乙
乙	.91	
丙	.90	.90

平均相互同意值$P \fallingdotseq .90$, 信度$R \fallingdotseq .96$

表3：數學問題表徵型態分析信度結果

評分員	甲	乙
乙	.95	
丙	.94	.94

平均相互同意值$P \fallingdotseq .94$, 信度$R \fallingdotseq .98$

高年級各隨機抽取一冊進行各自的初步分析與歸類，以了解評分員對於分析類目定義的理解、初步歸類的結果、以及歸類過程中可能的困難與疑問。

3.初步分析完成後，研究者和三位評分員針對分析過程中遇到的判斷和歸類的問題進行討論，並將遇到的歸類問題以email請教提出分類標準作者之一的Smith教授(M. S. Smith, E-mail, April 16, 2012)後形成共識，使每個數學問題都能明確地歸類到所屬的類目中，之後進行正式12冊教科書的分析，並建立本研究的分析信度。

根據上述過程，本研究分析類目之形成，除了具有理論的依據，以及試行分析、修正與確認的步驟外，也經由一位數學教育專長的大學教授針對分析類目的內容(指對數學問題類型的定義和問題範例的意見)進行檢視，希望藉由專家的審核使本研究的分析類目表更具有效度，使分析的結果更具有可靠性。

六、資料處理與分析

在資料處理方面，本研究以「數學問題」爲計數單位，以Stein等(2000)的標準對數學問題的類型進行分類，以Zhu與Fan (2006)的標準對數學問題的呈現表徵型態進行歸類。每個問題只會登錄在一個類目中，如果被歸類在某一類目，就不能同時劃入另一類目中。例如，同一問題不會同屬於記憶型和具連結程序型類目，不可能同時歸屬於低認知問題又屬於高認知問題。

在資料分析方面，每一個數學問題都進行兩次的歸類，一次是針對數學問題的類型進行歸類與統計，以瞭解三國教科書中數學問題類型分佈情形的異同；二是進行數學問題表徵型態的歸類與統計，以了解三國數學問題表徵型態分布情形的異同。除了上述「量」的資料分析外，在「質」的資料部份，也以單元爲單位，來分析三國數學問題呈現的順序或編排的結構(例如：如何引入數學問題的學習？例題和練習題的數量分配如何？等)，以及例題和練習題呈現的特色(例如：例題中如何呈現解題的歷程、是否呈現多元的解法)等，結合數學定量與定性的分析結果，來歸納三國國小數學教科書中數學問題的類型與呈現方式的特色與異同。

肆、研究結果

一、臺灣、芬蘭、新加坡國小數學問題類型分佈之比較

(一)三國整體數學問題類型分佈情形

表4呈現三個國家國小數學教科書中，不同數學問題類型的數量和比例分佈的情形。

表4：三國數學問題類型分佈情形

數學問題類型	國家		
	臺灣	芬蘭	新加坡
記憶型	1,026 (20.88%)	1,796 (14.94%)	1,195 (17.50%)
無連結程序型	2,811 (57.20%)	8,378 (69.71%)	4,179 (61.21%)
具連結程序型	1,068 (21.73%)	1,839 (15.30%)	1,386 (20.30%)
作數學	9 (0.18%)	5 (0.04%)	67 (0.98%)
合計	4,914 (100.00%)	12,018 (100.00%)	6,827 (100.00%)

從表4來看，發現數學問題數量最多的是芬蘭的12,018題，其次是新加坡的6,827題，臺灣的數學問題數量最少，只有4,914題。芬蘭數學問題的數量約是臺灣的2.5倍，是新加坡的1.8倍，平均每冊有1,001.5題；新加坡數學問題的數量是臺灣的1.4倍，平均每冊有568.9題，而臺灣平均每冊只有409.5題。三個國家國小數學教科書中的數學問題數量，有明顯的差異存在。

再從不同類型數學問題的分佈情形來看，發現三國數學問題類型數量和比例最高的都是「無連結程序型」的問題，臺灣佔57.20%，芬蘭佔69.71%，新加坡佔61.21%，最少的都是「作數學」的問題，臺灣只佔0.18%，芬蘭只佔0.04%，兩國作數學問題都不超過10題，而新加坡有67題，佔全部問題的0.98%。在「記憶型」和「具連結程序型」問題中，臺灣和新加坡所佔的比例接近，都略高於芬蘭。三國整體數學問題類型分佈的情況相似，都明顯地以無連結程序型問題佔的比例最高，而具連結程序型和記憶型所佔的比例接近，作數學型所佔的比例很低。三個國家教科書中低認知問題(記憶型＋無連結程序型)的比例都在78.08%以上，表示教科書的內容較強調在基本概念、事實、以及運算技巧與程序的熟練，這樣的結果和三國數學課程目標中的主張，似乎有所落差。

(二)各國數學問題類型分佈情形

以每個國家爲單位，來看不同類型問題所佔的比例，發現各國在不同類型數學問題的分佈上，並非平均的分佈，而是明顯地偏重在無連結程序型的問題。若再從三國一到六年級數學問題類型所佔比例的趨勢來看(如圖5, 6, 7)，則發現臺灣在記憶型和具連結程序型問題所佔的比例，在一至五年級有逐年增加的趨勢，但增加幅度不大(10.66% ~ 27.02%)，六年級略微下降，而無連結程序型問題有逐年減少的趨勢，但六年級突然增加。芬蘭也有類似的趨勢，記憶型問題有逐年增加的趨勢，但幅度不大(5.91% ~ 18.10%)，無連結程序型有逐年減少的趨勢，而具連結程序型則較平穩，變化不大(10.10% ~ 16.64%)。而新加坡的記憶型問題所佔的比例，一至四年級有逐年上升的趨勢，但幅度不大(12.67% ~ 22.24%)，五年級開始下降。無連結程序型在一至四年級都維持穩定的比例(65.98% ~ 66.96%)，五年級開始下降，而具連結程序型問題則在五年級時開始有較大幅度的增加。數學問題類型在各年級間的分布趨勢，是否是因爲三國數學學習階段的規劃(臺灣分爲1 - 3, 4 - 5, 6 - 7, 8 - 9四個階段，芬蘭1 - 2, 3 - 5, 6 - 9三個階段，新加坡1 - 4是基礎階段，5 - 6爲定向階段)，以及各階段學習目標設定的影響(從基本概念與計算能力的建立，逐漸加深概念的理解與生活的應用)，值得進一步探討。但在作數學型問題上，三國各年級出現的比例均很低，臺灣在一、二、五年級出現，芬蘭只在四年級出現，而新加坡則是每個年級均出現，但以一年級所佔的比例最高，而且大都是要求學生根據算式來寫出一個相對應的生活故事。

二、臺灣、芬蘭、新加坡國小數學問題呈現方式之比較

以下先呈現三個國家數學問題表徵型態的歸類與統計結果，再呈現各國在數學問題呈現上的特色，包括在問題內容的呈現和編排方式等，最後再比較三國的數學問題呈現方式的異同。

(一)三國數學問題表徵型態的分佈情形

三個國家數學問題呈現的表徵型態

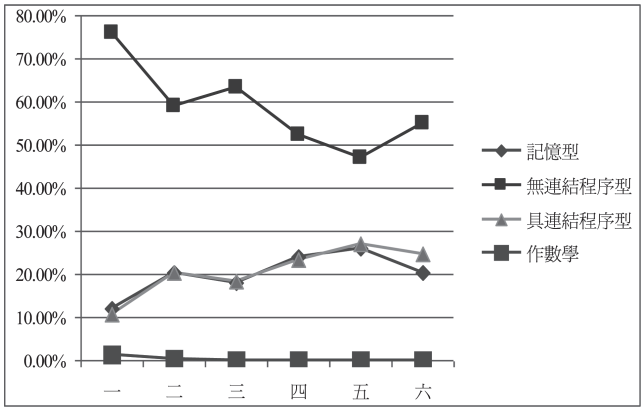


圖5：臺灣不同類型數學問題在各年級所佔比例圖

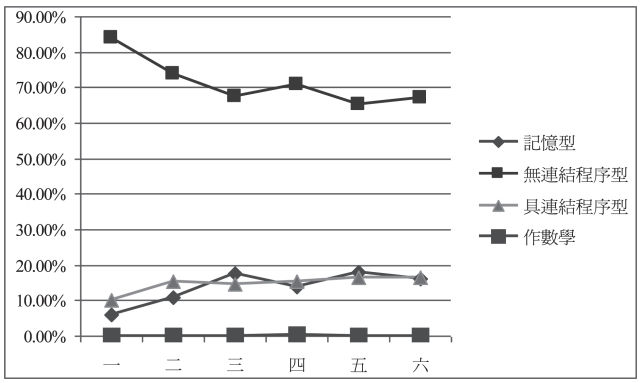


圖6：芬蘭不同類型數學問題在各年級所佔比例圖

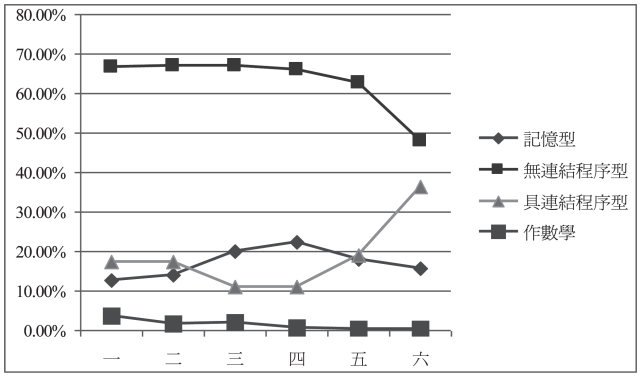


圖7：新加坡不同類型數學問題在各年級所佔比例圖

分佈如表5。從表5來看，發現臺灣數學問題呈現的表徵，以文字型態佔的比例最高(43.18%)，聯合型態最低(11.05%)，文字型態問題的數量幾乎是聯合型態問題的4倍；而芬

表5：三國數學問題呈現表徵型態分佈情形

數學問題表徵	國家		
	臺灣	芬蘭	新加坡
文字型態	2,122 (43.18%)	2,457 (20.44%)	1,993 (29.19%)
視覺型態	1,343 (27.33%)	2,559 (21.29%)	1,403 (20.55%)
數學型態	906 (18.44%)	5,077 (42.25%)	2,289 (33.53%)
聯合型態	543 (11.05%)	1,925 (16.02%)	1,142 (16.73%)
合計	4,914 (100.00%)	12,018 (100.00%)	6,827 (100.00%)

蘭則是以數學型態佔的比例最高(42.25%)，聯合型態最低(16.02%)，數學型態是聯合型態問題的2.6倍；而新加坡則以數學型態和文字型態佔的比例最高(分佔33.53%, 29.19%)，聯合型態最低(16.73%)。整體來看，臺灣數學問題的呈現以文字型態爲主，芬蘭以數學型態爲主，而新加坡則兼顧數學型態和文字型態，三國聯合型態所佔的比例都最低。雖然三國數學學習目標中都強調概念、運算技巧、生活延伸應用，以及整體數學思維的培養，但臺灣似乎較偏重目標中的「學習應用問題的解題方法」，芬蘭較偏重目標中的「概念和基本運算的學習」，新加坡則兼顧兩者。若根據三國在各個表徵型態所佔的比例來進行卡方考驗，則發現在視覺型態和聯合型態上，三國之間並無差異存在(p值分別爲 .59, .93)，但是在文字型態和數學型態上三國之間則有顯著的差異(χ^2值分別爲9.5, 7.6, df = 2，p值分別爲.01, .02)。這表示芬蘭和新加坡以數學型態呈現數學問題的比例，明顯高於臺灣，而臺灣以文字型態呈現數學問題的比例，也明顯高於芬蘭和新加坡。若以國家爲單位，來看不同數學問題表徵型態的分佈情形，發現臺灣和芬蘭教科書中不同數學問題表徵型態之間，有顯著的差異存在(χ^2值分別爲8.4, 16.6, df = 3，p值爲.04, .00)，新加坡不同數學問題表徵型態之間，並無顯著差異(χ^2值爲3.4, df = 3, p = .34)。顯示臺灣的數學問題明顯地偏重以文字型態來呈現，芬蘭則著重於數學型態來呈現，新加坡則較爲平均分佈。

(二)三國數學問題呈現的順序與特色

1.臺灣

臺灣康軒版數學教科書在問題的呈現上，在單元的一開始(三國均以三年級加減單元爲例)，都會以一個生活情境頁來作爲開端，情境頁的情境大都以臺灣的生活情境爲背景，包括自然景色、生態、文化活動、有時介紹世界著名的建築或地標(如圖8)，偶而以童話故事或繪本的方式呈現。情境頁通常沒有具體的數學問題，但卻意涵了該單元學習的數學概念。

情境頁之後，便開始呈現該單元的數學問題。康軒數學的數學問題可以分爲兩大類，一種是呈現包含問題內容和解題歷程的「例題」，一種是只有包含問題內容但沒有呈現解題歷程的「練習題」。單元一開始首先呈現的是例題，而且在第一個例題前會出現「活動」的標示，明確地指出活動中數學問題的結構，讓師生瞭解所學習的數學問題類型。而且在例題中，不僅完整的呈現解題的歷程，還會運用圖示、算式、和人物思考的敘述，來引導學生解題的步驟(圖9)，進而並完成解題的任務。康軒的例題在解題完後，偶而會出現一些開放性的問題，例如：



圖8：臺灣康軒數學單元情境頁範例

資料來源：楊瑞智(主編) (2010b)。**國小數學3上**(頁69)。新北市：康軒。

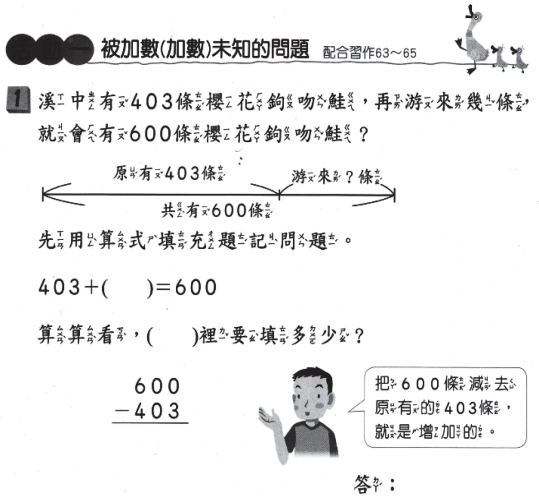
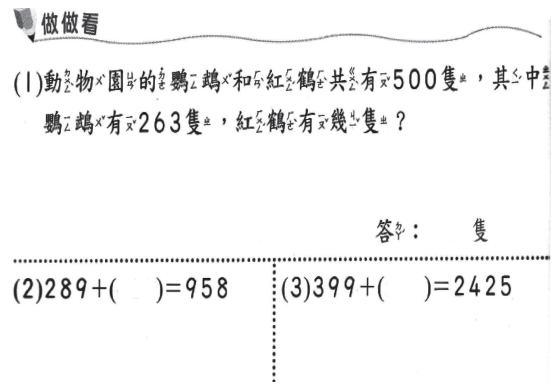


圖9：臺灣康軒數學例題範例

資料來源：楊瑞智(主編) (2010b)。**國小數學3上**(頁70)。新北市：康軒。

「你發現了什麼？」、「爲什麼？」、「說說看？」等文字，讓學生回顧解題思考的過程，說出自己思考與發現的歷程。另外，幾乎在每一頁(或兩頁)的例題後，都會有幾題「做做看」的練習題(圖10)，提供學生在例題中所學到的解題方法或技巧的練習，同時在每個單元結束後都會有一個練習百分百(圖11)，讓學生運用該單元學習到的基本概念和技巧來進行解題。同時也有2 - 4個綜合數個單元的練習題，名稱爲「學習廣角」或「學習步道」。在全部4,914個數學問題中，有1,422題例題，佔全部問題的28.94%，練習題有3,492題，佔全部的71.06%，例題和練習題數量的比約爲3:7。若進一步檢視臺灣例題


做做看

(1)動物園的鸚鵡和紅鶴共有500隻，其中鸚鵡有263隻，紅鶴有幾隻？

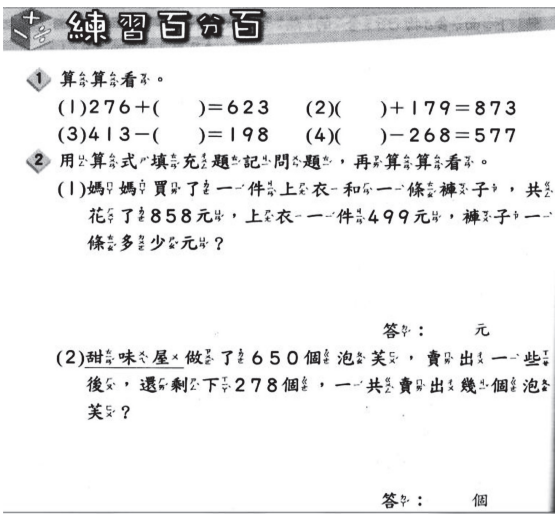
答：　隻

(2)289+(　)=958

(3)399+(　)=2425

圖10：臺灣康軒數學練習題範例一

資料來源：楊瑞智(主編) (2010b)。**國小數學3上**(頁70)。新北市：康軒。


練習百分百

1 算算看。

(1)276+(　)=623　(2)(　)+179=873

(3)413−(　)=198　(4)(　)−268=577

2 用算式填充題記問題，再算算看。

(1)媽媽買了一件上衣和一條褲子，共花了858元，上衣一件499元，褲子一條多少元？

答：　元

(2)甜味屋做了650個泡芙，賣出一些後，還剩下278個，一共賣出幾個泡芙？

答：　個

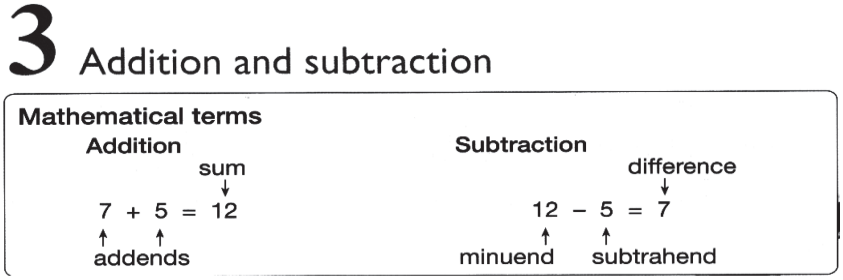
圖11：臺灣康軒數學練習題範例二

資料來源：楊瑞智(主編) (2010b)。**國小數學3上**(頁80)。新北市：康軒。

和練習題呈現的表徵型態，則發現有43.81% (623/1422)的例題以文字型態的方式呈現，以聯合型態呈現的比例最低(7.38%, 105/1422)。而練習題也同樣以文字型態的表徵居多(42.93%, 1499/3492)，聯合型態表徵呈現的最少(12.54%, 438/3492)。

2.芬蘭

芬蘭L版數學的數學問題編排，通常在單元的第一頁左上方，會出現一個介紹定義或運算方法的問題(圖12)，接著是一連串的練習題，練習題的數量很多，而且以計算問題爲主，讓學生熟練基本的計算能力，同時在計算練習的左下角，註明運算的類型(圖13)。此外，芬蘭L版的練習題，也有許多以題組的形式呈現，在圖表或是文字敘述後讓學生進行解題(圖14)，而且都在純計算的練習之後才出現，常出現在notebook work或是練習與應用(practice, application)中。芬蘭L版數學的例題，很少以引導的方式來呈現解題的歷程，通常都是直接呈現定義式的介紹或解法(有時候其標題爲remember)，而練習題部份雖然以純計算的問題爲主，但是在每個單元的最後，都有兩頁的開放性問題(open questions)與腦力激盪問題(brain-teasers)，提供學生更多的挑戰。意即，芬蘭的練習題包含有基本的計算練習、生活應


3 Addition and subtraction

Mathematical terms

Addition

sum

7 + 5 = 12

addends

Subtraction

difference

12 − 5 = 7

minuend　subtrahend

圖12：芬蘭L版數學例題範例

資料來源：*Laskutaito 3A in English* (p. 66), by P. Saarelainen, 2009, Helsinki, Finland: WSOY.

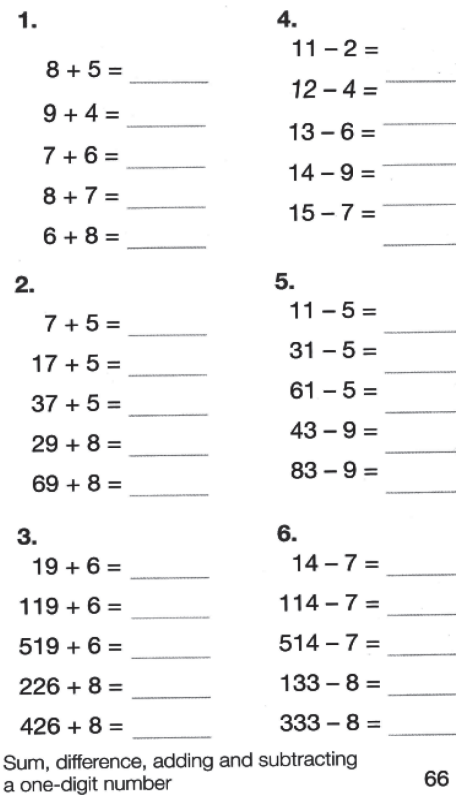


圖13：芬蘭L版數學練習題範例一

資料來源：*Laskutaito 3A in English* (p. 66), by P. Saarelainen, 2009, Helsinki, Finland: WSOY.

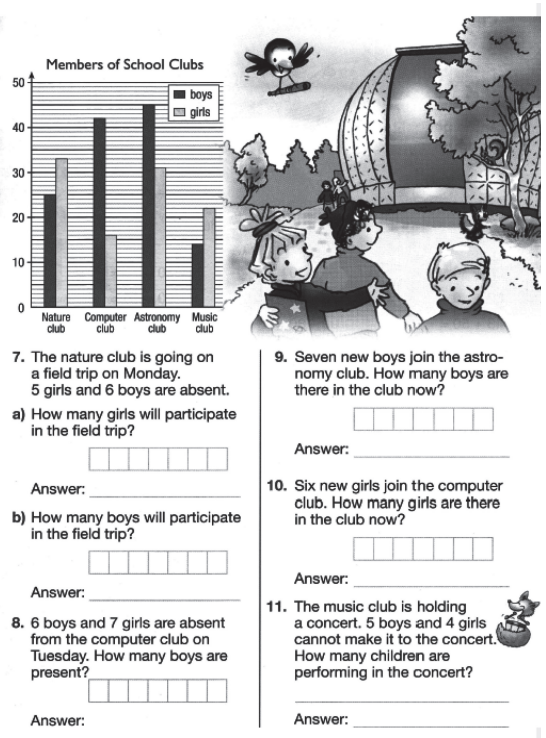


圖14：芬蘭L版數學練習題範例二

資料來源：*Laskutaito 3A in English* (p. 67), by P. Saarelainen, 2009, Helsinki, Finland: WSOY.

用和挑戰思考等不同程度的練習。在全部12,018個數學問題中，只有319題例題，佔全部問題的2.65%，練習題則高達11,699題，佔全部的97.35%，例題和練習題數量的比約爲1:32。進一步檢視芬蘭例題和練習題呈現的表徵型態，則發現有59.87% (191/319)的例題以聯合型態的方式呈現，以數學型態呈現的也有26.33% (84/319)，單獨以文字型態呈現的比例最低(5.02%, 16/319)。在練習題部分，則以數學型態呈現的比例最高(42.68%, 4993/11699)，聯合型態呈現的比例最低(14.82%, 1734/11699)。

3.新加坡

新加坡M版的數學問題，在每個單元的第一個問題，都會完整的呈現解題的歷程，而且會結合圖像和算式等不同表徵來呈現，以讓學生理解問題與算式(圖15)。但第二個問題就不呈現詳細的解答，而是採用和第一個問題類似的表徵，在高度引導下讓學生以類似填空的方式來完成解題(圖16)，第三個問題之後就不呈現解題的歷程，而只有問題的內容。這樣呈現的方式，意圖讓學生可以以同樣的模式來進行相同數學結構問題的解題，並逐漸進行獨立解題。

而在練習題部分，會在頁面上方出現

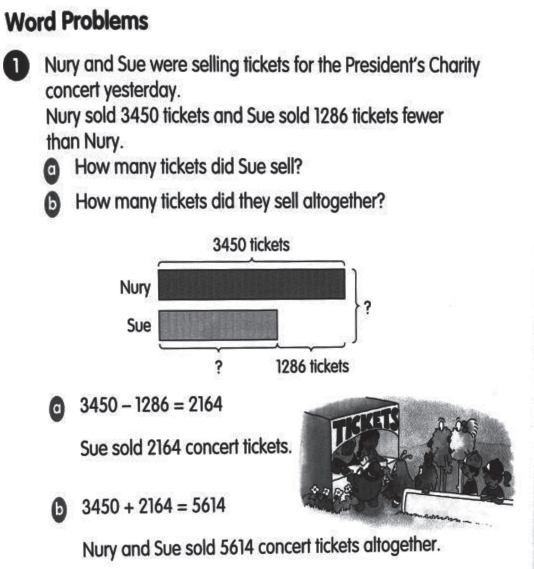


圖15：新加坡M版數學例題範例一

資料來源：*My pals are here! Maths 3A* (p. 56), by K. T. Peng & T. K. Keng, 2010, Singapore: Marshall Cavendish.

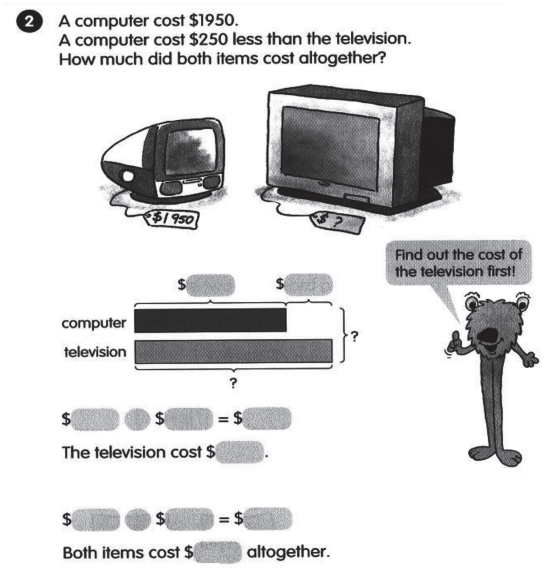


圖16：新加坡M版數學例題範例二

資料來源：*My pals are here! Maths 3A* (p. 57), by K. T. Peng & T. K. Keng, 2010, Singapore: Marshall Cavendish.

不同的標題，包括carry out this activity, let's practice, let's explore，或是play this game等標題(圖17)，來讓學生在歷經let's learn標題下的數學概念或技巧的學習後，讓學生有進一步進行包含計算問題和文字題的練習，或是進行較難問題的探索。而在每個單元的最後，都有一頁一題put on your thinking caps的設計(圖18)，讓學生可以利用整個單元所學會的概念和技能，來進行複雜問題的解題。而到了六年級，每個單元的最後還增加review的設計，提供學生更多練習和應用的機會。整體來看，在6827個數學問題中，共有1856個例題，佔全部的27.19%，而練習題則有4971題，約佔全部的72.81%，這樣的分佈比例和臺灣接近。若再進一步檢視新加坡例題和練習題呈現的表徵型態，則發現有41.86% (777/1856)的例題以數學型態的方式呈現，以文字型態呈現的也有29.26% (543/1856)，視覺型態呈現的比例最低(10.78%, 200/1856)。練習題部分也以數學型態比例最高(30.42%, 1512/4971)，文字型態居次(29.17%, 1450/4971)，聯合型態呈現的比例最低(16.21%, 806/4971)。

4.三國數學問題編排與呈現方式的比較

三國在數學學習目標上，都強調數學和真實世界的連結，希望學生能將所學的數學概念應用在日常生活中的解題。但是從數學問題的呈現方式來看，三國有不同的作法：臺灣在一開始進入到單元的學習時，並以真實或模擬的情境來引入，讓學生「察覺」到情境中可能蘊含的數學概念，之後以生活情境作爲問題的背景，從解情境問題中來學習數學的概念或技能；而芬蘭卻是以定義或示範的方式開始，在基本計算技能的練習或熟練之後，再讓學生解和生活連結或情境 相關的問題；新加坡則是結合情境與示範兩者的意圖與功能。由此來看，臺灣數學問題的呈

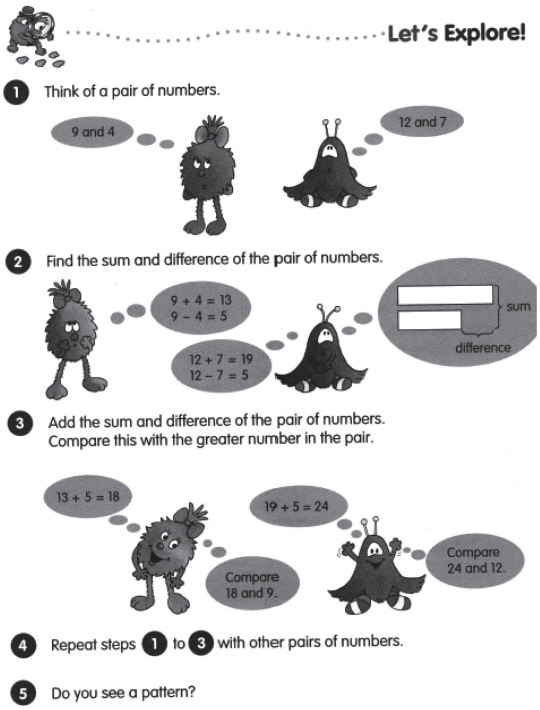


圖17：新加坡M版數學練習題範例二

資料來源：*My pals are here! Maths 3A* (p. 60), by K. T. Peng & T. K. Keng, 2008, Singapore: Marshall Cavendish.

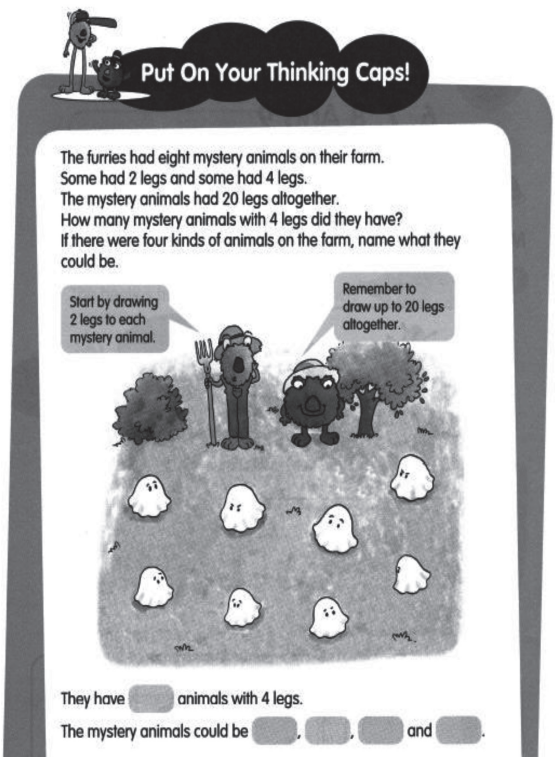


圖18：新加坡M版數學練習題範例三

資料來源：*My pals are here! Maths 3A* (p. 61), by K. T. Peng & T. K. Keng, 2008, Singapore: Marshall Cavendish.

現在一開始有明顯地「生活連結」的意圖，從生活情境出發來進行數學概念與技能的學習，芬蘭則是基本技能熟練後才進行生活的連結和應用，新加坡則是介於兩者之間。

不過，三國在整體數學問題的編排上，還是有許多相似的地方，都是先呈現包含問題內容和解題歷程的例題，讓學生學習解題時所需要的數學知識、結構、符號；之後，呈現相同或類似數學結構的練習題，讓學生應用前一個問題所學到的知識和技能來進行解題，檢驗並熟練解題所需要的相關知識、技能和符號運用；最後，還有綜合練習題的設計，讓學生將整個單元所學到的概念和技巧，有應用與檢驗的機會。在例題之後的練習題，除了臺灣康軒會標示「做做看」的標題來提醒讓學生進行練習外，芬蘭和新加坡則無特別的標示。但是整個單元學習後的練習題，三國都會以不同的名稱來標示，如臺灣的「練習百分百」，芬蘭的practice and application和新加坡的let's practice等，讓教師、學生和家長都知道這是單元學習後的練習題。

雖然三個國家數學問題編排的方式相類似，但在例題的呈現方式上，三國有所不同：臺灣的例題呈現以文字爲主，且經常出現學生不同的思考歷程，希望能引導學生從不同的觀點來進行解題；芬蘭的例題是以定義或是示範的方式呈現，而且只呈現一題例題後，便進行大量的練習；新加坡則是先示

範解題歷程和結果，再呈現相同結構的問題，並使用和前一個問題相同的表徵，高度地引導學生採用相同的方法來「填空」解題，之後再進入相同結構練習題的解題。臺灣例題呈現多元思考的歷程，並透過「說說看」的提問，讓學生來進行數學的溝通與表達。而芬蘭、新加坡兩國的例題則是希望讓學生以模仿的方式來進行解題。由此來看，臺灣數學問題的呈現，似乎較強調多元的思考與溝通的意圖。若進一步看例題和練習題呈現的表徵型態，則發現在例題中臺灣以文字型態爲主要呈現方式，芬蘭以聯合型態爲主，新加坡以數學型態爲主，臺灣較少以聯合型態來呈現例題，芬蘭較少文字型態，新加坡較少視覺型態；而在練習題部分，臺灣仍以文字型態爲主，芬蘭、新加坡則是以數學型態爲主，三國以聯合型態來呈現的比例都最低。此外，在例題和練習題的比例上，臺灣、新加坡兩國的都約爲3:7，但芬蘭卻是1:32，這意味著芬蘭教科書中提供學生練習的機會，遠 多於台、新兩國教科書中提供的練習機會。

伍、討論

數學教科書是落實國家數學教育政策和目標的關鍵(NRC, 2004)，也是教師教學和學生學習的主要來源(Grouws et al., 2004; Lloyd, 2008)。而數學問題是構成數學教科書內容的基本單位，在過去數學課程改革中，數學問題的呈現方式有很大的不同(Stein et al., 2007)，企圖透過數學問題的改變來影響學生數學學習的方式和結果(Henningsen & Stein, 1997)。因此，本研究以數學問題爲焦點，來分析在國際測驗中表現傑出的臺灣、芬蘭和新加坡的數學教科書，試圖從「書寫課程」(written curriculum)的面向，來瞭解對學生數學學習可能的影響(Stein et al., 2007)。

從分析比較的結果來看，三個國家之間最大的差異在於數學問題的呈現上，而非在數學問題的類型分佈上。整體來看，三個國家在文字型態和數學型態呈現的比例上有顯著差異存在，臺灣文字型態的比例最高，芬蘭數學型態的比例最高，新加坡則兼顧數學和文字型態。若進一步以例題來看，發現臺灣雖有43.80%的例題以文字型態呈現，但提供多元的解題思考，以及讓學生有表達想法的機會；而芬蘭的例題雖然以聯合型態呈現的方式居多(約60.00%)，但都採用單一的方式來呈現解題歷程，而新加坡的例題同樣採單一且高度引導的方式來呈現。若以Artzt與Armour-Thomas (2002)和Wiske (2005)對數學學習的觀點來看，臺灣的例題比較容易讓學生在學習過程中瞭解到不同解題的思考與方法，且有表達自己想法的機會，而芬蘭和新加坡的例題，則意圖讓學生在模仿中來學習解題的方法。不過，臺灣以文字型態爲主的呈現方式，可能對語文理解能力較差的學生，產生學習上的困擾。

在練習題的呈現上，三國之間較一致，都包含了計算題、文字題、或綜合練習題，也都以聯合型態表徵呈現的比例最低，明顯地希望透過練習題的設計，來檢驗學生的理解程度和應用能力。但是芬蘭和新加坡提供較多開放性與挑戰性的練習題給學生(芬蘭的open questions和brain-teasers，新加坡的let's explore和put on your thinking caps)。相較之下，臺灣教科書中的練習題較缺乏具有挑戰性與探索性的問題設計。從例題和練習題呈現的內容來看，三個國家數學問題的呈現上，都給人有「斷裂」的感覺：臺灣的例題可以接觸到較多不同的想法，但缺乏探索與挑戰的練習題，芬蘭和新加坡的例題過於單

一與公式化，但卻設計許多具有探索、挑戰與腦力激盪的練習題。而且從例題和練習題所佔的比例和呈現方式來看，臺灣的教科書像是一本提供給學生「自學」的教科書，學生可以從示範多元思考與解題策略的例題中(佔全部的29.00%)，瞭解不同的解題策略，進而進行解題的練習；而芬蘭的教科書則像一本「練習作業簿」，在例題簡單的示範或定義後，便進行非常大量的練習(練習題佔97.00%)；而新加坡則兼顧高度引導和多樣化的練習設計。三個國家有著相似的數學教學和學習的目標，但是卻有不同的數學問題呈現方式，背後主要的編寫哲學依據或影響因素爲何？三個國家的教師如何使用他們的教科書？不同的呈現方式對學生的數學學習產生什麼樣的影響？這些都值得進一步的探討。

陸、結論與建議

一、結論

本研究以數學問題爲單位，來分析比較臺灣、芬蘭和新加坡國小數學教科書內容的異同。結果發現，雖然三個國家在數學學習的目標上，都強調思考、推理、生活應用等高層次能力的發展，但是從數學問題的類型上來看，三國問題類型最多的都是低認知「無連結程序」的問題，而高認知「作數學」的問題佔的比例都很低。雖然三國高認知的「具連結程序」問題略有隨年級增長而增加的趨勢，但仍可以看出三國在國小基礎數學的階段，偏向著重基本概念建立與運算技巧的學習，因爲低認知問題的比例三國都超過77.00%以上。雖然從問題的數量上來看，芬蘭和新加坡教科書中的數學問題，明顯多於臺灣教科書中的數學問題，但從各類型問題所佔的比例來看，三國之間並無顯著差異。而在整體數學問題的呈現上，三國則有明顯的不同。臺灣以文字型態爲主，芬蘭以數學型態爲主，新加坡則兼顧兩者。而在例題解題歷程的呈現上，臺灣呈現的歷程多元，芬蘭和新加坡則以單一示範或高度引導的方式呈現。在練習題的數量和比例上，三國之間有明顯的差異，芬蘭練習題的數量和所佔的比例是三國之中最高的，同時和新加坡都提供較多開放性和具挑戰性的練習題供學生練習，而臺灣較缺乏這樣練習題的設計。

二、建議

本研究根據研究發現，提出兩點建議供編輯國小數學教科書人員，或後續有興趣的研究人員一些思考與探究的方向。首先，建議增加臺灣教科書中挑戰與探索性問題的設計。從數學問題的數量和類型來看，臺灣教科書中的數學問題是三國中最少的，而且在練習題方面，也較少像芬蘭或新加坡有專門設計爲探索性或腦力激盪的問題。因此，未來在教科書編修時，可以增加一些較具挑戰與探索性的練習題，讓學生在進行高認知問題的解題過程中，發展觀察、思考、推理、論證等更高層次數學能力的機會，以達成課程所預定的目標。

其次，建議探討數學課程實施或教科書使用的議題。臺灣教科書中的例題，雖然呈現了多元的解題思考策略，但大多以文字型態來呈現。雖然，不同思考的呈現與提供學生表達的機會，可以增進學生對於解題思考的彈性與多元，但以文字爲主的呈現方式，是否會造成學生在理解題意上的困難？教師是否有提供不同的表徵來增進學生對問題的理解？這都涉及到教室內數學課程實施的議

題，值得進一步理解與探討。另外，三國數學問題不同的呈現方式，對老師的數學教學產生什麼樣的影響？臺灣的教師在教學時會呈現例題中多元思考的解題歷程嗎？會提供時間和機會讓學生完整表達自己的想法嗎？芬蘭教師在教學時會讓學生解教科書中所有的練習題嗎？教師如何定位教科書所扮演的角色？如何使用數學教科書？這些都是直接影響學生學習表現的關鍵，值得更進一步關注與探討。

誌謝

本文感謝國科會提供經費的支持(計畫編號：NSC 99-2511-S-153-011)，本文論點爲作者所有，不代表國科會。

參考文獻

1. 王文科(2002)。**教育研究法**(增訂七版)。臺北市：五南。
2. 王石番(1991)。**傳播內容分析法：理論與實證**(二版)。臺北市：幼獅。
3. 徐偉民(2011a)。數學課程實施：一位國小資深教師的個案研究。**科學教育學刊**，**19**(2)，101-122。
4. 徐偉民(2011b)。三位六年級教師數學課程實施之比較。**教育研究集刊**，**57**(2)，85-120。
5. 徐偉民(2013)。國小教師數學教科書使用之初探。**科學教育學刊**，**21**(1)，25-48。
6. 徐偉民、林美如(2009)。臺灣、中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析。**彰化師大教育學報**，**16**，49-75。
7. 徐偉民、徐于婷(2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析：臺灣與香港之比較。**教育實踐與研究**，**22**(2)，67-94。
8. 張琇涵(2006)。**臺灣與新加坡三角函數課程之教科書比較**。未出版之碩士論文，國立中央大學數學研究所，桃園市。
9. 教育部(2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：作者。
10. 陳之華(2010)。**成就每一個孩子：從芬蘭到臺北，陳之華的教育觀察筆記**。臺北市：天下雜誌。
11. 陳仁輝、楊德清(2010)。臺灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。**科學教育學刊**，**18**(1)，43-61。
12. 黃政傑(1995)。**多元社會課程取向**。臺北市：師大書苑。
13. 楊瑞智(主編) (2010a)。**國小數學4上**。新北市：康軒文教事業。
14. 楊瑞智(主編) (2010b)。**國小數學3上**。新北市：康軒文教事業。
15. 歐用生(2000)。內容分析法。收錄於黃光雄、簡茂發(編著)，**教育研究法**(頁229-254)。臺北市：師大書苑。
16. 鍾靜(2005)。論數學課程近十年來之變革。**教育研究月刊**，**133**，124-134。
17. Anderson, C. W. (2003). How can schools support teaching for understanding in mathematics

and science? In A. Gamoran, C. W. Anderson, P. A. Quiroz, W. G. Secada, T. Williams, & S. Ashmann (Eds.), *Transforming teaching in math and science: How schools and districts can support change* (pp. 3-21). New York: Teachers College.

18. Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
19. Becker, J. P., & Selter, C. (1996). Elementary school practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 511-564). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.
20. Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside school. *Teacher College Record*, *110*(3), 608-645.
21. Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. -Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117-151.
22. Curriculum Planning and Development Division. (2006). *Mathematics Syllabus Primary*. Singapore: Ministry of Education.
23. Grouws, D. A., Smith, M. S., & Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman & F. K. Lester, Jr. (Eds.), *Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 221-267). Reston, VA: NCTM.
24. Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, Latino school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 37-73.
25. Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhabit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.
26. Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learnin*g (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age.
27. Lee, Y. C., & Yong, Y. S. (2008). *My pals are here! Maths 4B* (2nd ed.). Singapore: Marshall Cavendish.
28. Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
29. Ling, L. Y. (2008). *My pals are here! Maths 4A* (2nd ed.). Singapore: Marshall Cavendish.
30. Lloyd, G. M. (2008). Curriculum use while learning to teach: One student teacher's

appropriation of mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(1), 63-94.

31. Lott, J. W., & Souhrada, T. A. (2000). As the century unfolds: A perspective on secondary school mathematics content. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 96-111). Reston, VA: NCTM.
32. Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
33. National Board of Education. (2004). *National core curriculum for basic education 2004: National core curriculum for basic education for intended pupils in compulsory education*. Helsinki, Finland: Author.
34. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
35. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
36. Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(3), 331-355.
37. National Research Council. (2004). Framework for evaluating curricular effectiveness. In J. Confrey & V. Stohl (Eds.), *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations* (pp. 36-64). Washington, DC: National Academies Press.
38. Organisation for Economic Co-operation and Development. (2007). *PISA 2006 science competencies for tomorrow's world volume 1: Analysis*. Paris, France: Author.
39. Organisation for Economic Co-operation and Development. (2010). *PISA 2009 results: What students know and can do - student performance in reading, mathematics and science (volume I)*. Paris, France: Author.
40. Pehkonen, E. (2007). *Problem solving in mathematics education in Finland*. Retrieved November 16, 2009, from http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/PEHKON.pdf
41. Peng, K. T., & Keng, T. K. (2008). *My pals are here! Maths 3A*. Singapore: Marshall Cavendish.
42. Peng, K. T., & Keng, T. K. (2010). *My pals are here! Maths 3A* (2nd ed.). Singapore: Marshall Cavendish.
43. Perkins, D. N. (1998). What is understanding? In M. S. Wiske (Ed.), *Teaching for*

understanding: Linking research with practice (pp. 39-57). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

44. Perrenet, J., & Taconis, R. (2009). Mathematical enculturation from the students' perspective: Shifts in problem-solving beliefs and behaviour during the bachelor programme. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(2), 181-198.
45. Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricular. *Review of Educational Research*, *75*(2), 211-246.
46. Saarelainen, P. (Ed.). (2009). *Laskutaito 3A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
47. Saarelainen, P. (Ed.). (2010). *Laskutaito 6A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
48. Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R., & Benken, B. M. (2009). Teaching mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American Educational Research Journal*, *46*(2), 501-531.
49. Son, J. W., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 117-142.
50. Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teacher College Press.
51. Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.
52. Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chávez, Ó., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 247-280.
53. Willoughby, S. S. (2000). Perspectives on mathematics education. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 1-15). Reston, VA: NCTM.
54. Wiske, M. S. (2005). *Teaching for understanding with technology*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
55. Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(4), 609-626.

科學教育學刊
2013, 第二十一卷第三期, 263-289
DOI: 10.6173/CJSE.2013.2103.02

Chinese Journal of Science Education
2013, 21(3), 263-289

A Comparison and Analysis of the Types and Representations of Mathematical Problems in the Elementary Mathematics Textbooks of Taiwan, Finland and Singapore

Wei-Min Hsu

Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung University of Education

Abstract

The focus of this study was to explore how mathematical problems are presented in the most popular elementary school mathematics textbook series of Taiwan, Finland and Singapore using content analysis. Mathematical problems were the unit of analysis and they were classified based on their cognitive demand and representational form. There was a significant difference in the number of problems presented in the textbooks of these three countries with more problems presented in Finland's textbooks than in those of Singapore and Taiwan. We found the ratio of different types of problems in the textbooks is similar across the three countries with most of the problems being classified as 'procedure without connection' in each country. When the representational form of problems was examined, we found that most problems were presented in a contextual form in Taiwan, but most frequently in a purely mathematical form in Finland. There was balanced arrangement among different representation forms in Singapore. Our analysis of example problems in the textbooks showed that Taiwan's textbooks usually presented different possible thinking processes and strategies for each example problem, while Finland's textbooks tended to present examples in a more definitive or demonstrative way. Singapore's textbooks used a combination of demonstration along with structural guides to present their examples. With regard to practice problems, there were more open, challenging, and explorative problems presented in the textbooks of Finland and Singapore than in those of Taiwan.

Key words: Content Analysis, Problem Representation, Cognitive Demand, Elementary Mathematics Textbooks, Mathematical Problems

* Corresponding author: Wei-Min Hsu