科學教育學刊
2014, 第二十二卷第三期, 237-258
DOI: 10.6173/CJSE.2014.2203.01

Chinese Journal of Science Education
2014, 22(3), 237-258

# 數學建模——社會文化與集體論證的觀點

**黃志賢**
明志科技大學　電機工程系

**摘要**

本研究基於社會文化與集體論證的觀點，設計嵌入微積分課程的數學建模活動培養學生的數學建模能力，在此教學介入下，逐漸發展大一微積分學生的數學建模能力。研究對象為54位科技大學微積分學生，研究方法採用數學建模教學實驗、課堂觀察及晤談。教學實驗將建模教學活動融入正規的微積分課程，以避免習慣接受傳統教學的學生的阻力，研究結果發現多數學生最缺乏的是「給定模型的變數和參數」、「圖形表徵與代數表徵的轉換」及「缺乏詮釋和效化的能力」。但經由數學建模教學，學生確實可以透過獨立作業及集體論證，逐漸發展其數學建模能力。學生的數學建模能力從「只瞭解給定的情境，但無法結構化和簡化情境或不能發現有關的數學想法」的層次，逐漸發展到「能經驗數學建模過程和效化與給定情境有關的數學解答」層次。本研究證實將教學與學習脈絡聚焦在社會文化取向與集體論證觀點，確實能幫助學生強化舊知識、發展新知識及培養數學建模能力。

**關鍵詞**：社會文化、集體論證、微積分、論述、數學建模能力

## 壹、研究背景與目的

近年來，不少數學教育文獻均將學生或公民數學素養的提升做為數學教育的首要目標(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Romberg, 2001)。其論點是提高學生的數學素養，就是提高學生適應社會的能力，提供未來進一步學習所必須的數學基礎。Lesh與English (2005)認為未來世界產業從設計工業到生命科學，產業界給大學課程的建言強調，未來產業界需求的人力必須具備以下的能力：1.瞭解複雜系統；2.和不同領域專家團隊合作；3.快速適應快速發展的概念工具；4.工作從事多階段的案子，需要和不同的階段和人共同計畫、合作；5.發展分享和重覆使用的概念工具通常需要整合不同的專業和課本知識。因此，數學將由計算轉移到概念化、描述以及解釋，數學教育的課程設計和教學應該也要有所轉變，以符合時代所需。由此觀之，數學建模能力似乎是未來產業界需求的人力必須具備的能力。

許多數學教育研究者關心學生對數學的負面觀點，而提出在數學教室裡使用真實世

*通訊作者：黃志賢
(投稿日期：民國102年1月14日，修訂日期：民國102年9月4日，接受日期：民國102年11月4日)

界問題是連結數學世界與真實世界的方式(例如Freudenthal, 1968)。越來越多的教師和研究者都同意數學建模(mathematical modeling)是數學教育的一個重要面向(例如Burkhardt, 2006; Gravemeijer & Doorman, 1999; Lesh & Doerr, 2003)。Niss (2004)就明確指出，建模是八種主要的數學能力之一。過去數十年來，應用數學在其他學科如工程、奈米技術、經濟及生物扮演著越來越重要的角色，數學教育者及數學教育研究者相信這樣的事實應該透過建模活動反應在教室裡，提供學生學校數學外可用的工具，以及讓學生一窺教室外所使用的「真實生活」數學。美國各州教育長官委員會(Council of Chief State School Officers, CCSSO)與州長協會最佳實踐中心(The National Governors Association Center for Best Practices, NGA Center)於2010年公布的「共同核心州課程標準」(Common Core State Standards, CCSS)，建模不僅在數學實踐(mathematical practice)的標準裡，同時也強調建模可以連結教室數學到每天生活、工作、和決策，且建模是選擇和使用適當數學和統計來分析情境、更理解情境及改善決策的工具。在一個問題情境中知道該使用什麼數學，知道何時使用及如何使用是數學能力的有力呈現(NCTM, 2000)，然而，在數學教室裡，學生的數學能力被限制在解決已提供答案的課本問題，且少有機會看見學生的思維(Boaler, 2001)。結果是學生少有機會看到數學能力與教室外經驗的相關性。因此，以數學建模活動來促進數學教學與學習的發展，是迎向新科技時代培養學生所需之公民素養的一種必要手段(English, 1999; Lesh & Doerr, 2003)。

雖然升學考試與現有教材等因素使得臺灣數學教育的現況對數學建模不是一個有利的環境，但由於大學生較無升學壓力，且微積分是大學數學教育及工程教育的基礎課程，學生必須要能理解微積分的相關概念並能應用，對於大學學生而言，更是專業科目與未來職場的必備知識。因此，將建模活動融入微積分課程應是實施數學建模教學的一個適當取向。目前國內對於數學建模的研究不多，有的強調教學策略與教師反思(例如：楊凱琳、林福來，2006)，有的探究數學建模評量的規準(例如：楊凱琳、林福來、蕭志如，2012)，且多以高中生為研究對象。國外關於數學建模的研究，Kaiser與Sriraman (2006)分析相關文獻後，提出六種關於數學建模的觀點(真實的、脈絡的、教育的、認識論的、認知的與社會批判的)，不同觀點產生不同的研究議題，但少有研究聚焦於學生在數學建模活動裡的表現(Barbosa, 2006)。Borromeo Ferri (2006)也指出研究學者很少注意到數學建模過程中學生在微觀層次的認知表現。Blum與Borromeo Ferri (2009)指出雖然數學建模在過去數十年一直是數學教育一個重要的主題，但在教室實踐中仍然是一個不顯著的角色，其落差的主要原因是數學建模對學生和教師都是困難的。數學學習是一種社會活動(Schoenfeld, 2002)，大部分的數學建模活動都是透過小組來發展與完成的(Antonius, Haines, Jensen, Niss, & Burkhard, 2007)。因此，本文擬擴大Kaiser與Sriraman提出的六種數學建模的觀點，採取社會文化(socialcultural)的取向(Lerman, 2001; Wertsch, 1993, 1998)，設計嵌入微積分課程的數學建模活動培養學生的數學建模能力，分析學生如何利用論述工具表達想法來培養他們的數學建模能力。

## 貳、文獻探討

本文基於研究目的，在文獻探討上主要

airiti

評析模型與建模、數學建模過程與數學建模能力、數學建模教學及論述與集體論證的相關概念。

## 一、模型與建模

文獻上，模型和建模有不同的定義和使用方式。在數學學習心理學上，模型意指一個包含被操作的元素、操作規則及元素或規則間的相關性的概念系統，而此系統可用來描述、解釋、預測其他系統的行為(Lesh & Doerr, 2003)。也就是說，模型是有目的的詮釋、描述、解釋或符號用來建構、操弄或預測已經建立的系統。Schorr與Lesh (2003)則是強調模型的創造意義的角色，他們對於模型的一種互補的描述是一種描述、解釋、建構或操弄經驗或一系列複雜經驗的方式，模型是圍繞著一個情境或經驗而組織成的。個體透過將情境對應到自己的心智模型來詮釋情境，以幫助個體對這個情境創造意義。一旦情境被對應到心智模型，模型內的轉換、修正或擴張就會發生，接著提供個體在問題情境內進行預測、描述或解釋所需使用的工具。數學模型被用來詮釋真實世界情境或以數學形式呈現的非數學情境(English, Fox, & Watters, 2005)，例如，圖形、表格和方程式被用來理解與詮釋不同現象間的複雜關係。從語言符號的觀點，Kehle與Lester (2003)認為建模包括簡化、抽象、計算及詮釋等階段。簡化與決策有關，決定哪些條件是可忽略的？哪些是需要的？並發展出如何連結重要概念的感覺；抽象涉及選擇形式的數學概念，去表現真實世界模型的特徵；而詮釋階段則將符號系統的結果應用到真實的問題中。簡化及抽象階段和水平數學化的活動有關，強調從生活世界轉變到符號世界的過程(Freudenthal, 1991)。抽象及計算階段則和垂直數學化的活動有關，強調在符號世界內部的轉變過程(Freudenthal)。

建模活動的焦點在於排序系統的發展，藉以提供一個可檢驗學生對問題情境解釋的發展，檢驗他們對系統內相關元素的推理，對量、運算、表徵的選擇以及多重循環的詮釋(Doerr & English, 2003)。因此，建模實涉及了內在概念系統、表徵系統及外在系統間的相互影響(Lesh & Doerr, 2003)；其中的表徵系統泛指鑲嵌在書寫符號、口說語言、圖形、圖表、具體的操作，用來表達內在概念系統和描述外在系統(Lesh & Doerr, 2000)。因此，本文所稱之建模是一種透過瞭解、分析和探索現象來建立模式的過程，建模除了要找出問題的答案，更重要的是過程中體驗概念化的瞭解、嘗試表徵化的資訊處理、詮釋模式和現象間的意義，累積這些經驗漸漸形成建模過程所需的能力。

## 二、數學建模過程與數學建模能力

研究文獻都支持數學建模過程是一種循環，起點和終點真實生活的問題情境，中間經過一個問題與數學名詞及數學解答的轉換。許多研究者(例如Blomhøj & Kjeldsen, 2007; Borromeo Ferri, 2006; Kaiser & Schwartz, 2006)從這樣的觀點出發，針對這樣的循環不斷地修正、擴大和改善。但要給數學建模下一個明確的定義並不容易，因為此定義與研究者所採取的理論觀點有關。本文所採取的理論觀點是關於一般數學建模過程的建模循環(Kaiser, Blomhøj, & Sriraman, 2006)。Lesh與Doerr (2003)指出建模循環通常包含描述(description)、操作(manipulation)、預測(prediction)／轉化(translation)以及驗證(verification)等四個階段，其中1.描述是建立一個真實世界到模式世界的地圖(指引)；2.操

airiti

作模型以便能產生預測或行動，以期能符合最初問題解決的情境；3.預測／轉化指的是帶著相關的結果回到真實或想像的世界；4.驗證包括有用的行動以及預測。在數學任務關鍵性的活動中，當個人在複雜、逼真的、可想像的數學情境脈絡中，個體必須努力參與以致能從多面向的過程中獲得可接受的結果。個體透過辨別並處理問題中最直接的概念來簡化問題，此階段包含做決策、刪除部分資訊，發展重要概念的連結，以獲得原始狀況中的逼真表現。逼真的表現即是原始情境脈絡的模式。原始情境脈絡中的問題描述是更容易了解的、可操作的。

許多研究者(Kaiser, 2007; Lester & Kehle, 2003; Maaß, 2006)進一步從認知的觀點提出建模循環的六個階段，起點是真實情境，瞭解真實情境後形成心智表徵，接著理想化、過濾、簡化或結構化真實情境裡的資訊以獲得一個真實模型，數學化這個真實模型為數學模型。最後，個體在這個數學模型進行數學處理以獲得數學結果，然後將此數學結果詮釋為真實結果並效化之。效化結果可能顯示真實結果不能滿足要求而必須考慮其他面向，接著個體就必須重新啟動整個建模過程。從Boromeo Ferri (2006)的研究可以發現有些學生不是連續地完成建模循環，但他們有時候直接從真實情境跳到數學模型，或是在真實世界和數學之間前進或後退好幾次。

從數學建模的教學與學習的文獻分析，關於數學建模能力的研究至少有3種取向，第一種取向的目的是描述學生在數學建模過程中必要的能力、技巧和態度，可稱為數學建模能力的成分描述。例如，Maaß (2006)以實徵研究證實下列能力對於完成整個數學建模過程是重要的：1.「後設認知建模能力」，也就是清楚整個建模過程及建模時每一個過程的位置和意義；2.結構化真實世界問題及目標導向地工作；3.論證的能力；4.數學建模的可能的問題解答的知識及使用這個可能解答的正向態度。第二種取向的目的是描述學生在數學建模過程中必要的能力的面向，可稱為數學建模能力的面向描述。例如，Niss (2004, p. 120)認為「**精熟數學就是擁有數學能力，而數學能力是指能瞭解、判斷、實做，及能在各種不同數學情境與脈絡的內外使用數學**」。他定義數學建模能力是在給定情境中建立數學模型的能力，包括：1.結構場域；2.數學化；3.在模型裡工作，包括解決模型所產生的問題；4.模型內外的有效性；5.分析和批判模型；6.對模型及其結果進行溝通；7.監控整個建模過程。Blomhøj與Jensen (2003, p. 126)則定義數學建模能力：「**在特定的脈絡下，能夠自動地及具洞察力地完成數學建模過程的所有面向**」。

誠如Blum與Leiß (2006)所指出的，如果同時聚焦在教學與學習，需要一個個體解題(problem solving individuall)導向的觀點，以更加瞭解學生在解決建模問題時做了什麼，對於教師的診斷與介入也提供一個更好的基礎。根據上述文獻探討，本研究所假設的數學建模循環的圖形表徵如圖1，用來捕捉和定義數學建模能力的不同元素。在這樣的脈絡下，根據許多的研究文獻，數學建模能力定義為「在一個給定的真實世界情境，能確認相關問題、變數、關係或假設，將它們轉換為數學，並詮釋和效化關於給定情境的數學問題的解答；能藉由探究所做的假設、檢查性質和給定模型的範圍來分析或比較給定的模型」。基於圖1的數學建模循環，數學建模能力就是完成數學建模過程所需要的能力，包括：1.確認真實情境的特徵而形成一項任務，換句話說，將自身放置在情境之中以建構情境的真實模型；2.相關物件和關係的選

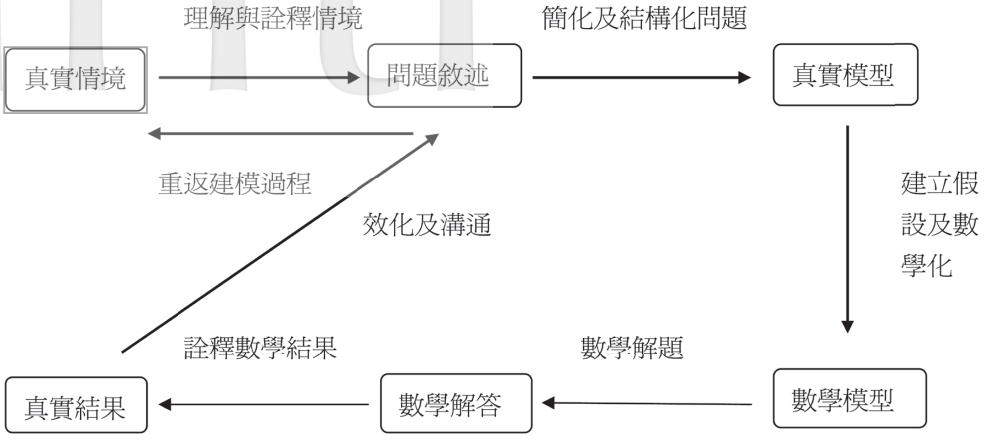


圖1：數學建模循環

擇以創造可能的數學表徵；3.以一致的方式在數學化的系統表徵這些物件和關係；4.使用數學方法解題以獲得數學解答和洞察；5.回到真實情境詮釋這些數學解答和洞察；6.藉由與過去的經驗、觀察到的或預測的資料、數學知識和整個建模過程的反思做比較及溝通討論來評估數學模型的有效性；7.利用問題情境所期待的結果來檢查數學模型，若結果不符期待，則重返建模過程。

## 三、數學建模教學

教導數學模型和教導數學建模兩者不同，鑑於前者強調的是產品(模型)，數學建模的焦點在於抵達真實世界情境的一個適當表徵的過程。關於數學建模教學，許多研究者已經發展一類稱做模型引出活動(Model-Eliciting Activities, MEAs)的建模活動，用來模擬商業、工程及科學等真實世界問題(Lesh, Hoover, Hole, Kelly, & Post, 2000)，MEAs是使用六個教學設計的原則所建構的解決問題活動。此六項教學設計原則包括：1.模型建構原則；2.事實(個人意義)原則；3.自我評估原則；4.模型文件化原則；5.可共享和可重新使用原則；6.簡單原則。

關於建模活動融入數學課程的方式，Blum與Niss (1991)提出六種教學取向：分離(separation)取向、二分(two-compartment)取向、島(islands)取向、混合(mixing)取向、數學課程整合(the mathematics curriculum integrated)取向及跨領域整合(the interdisciplinary integrated)取向。鑑於臺灣大學生少有參與數學建模的機會，加上教師有課程進度的壓力，本研究採取的融入微積分課程的取向是融合二分取向及島取向，將建模教學活動融入正式的微積分教學活動，在概念性與程序性知識教學之後，以數學建模活動取代微分與積分的應用問題，以避免習慣接受傳統教學的學生的阻力。以本文的數學建模活動為例，在教學的安排上，此數學建模教學活動取代微積分課程中「極值的應用問題」單元。

## 四、論述與集體論證

數學學習是一種社會活動(Schoenfeld, 2002)，當提供學生一個適當的任務，一個與任務互動的適當結構以及鷹架學生之間的互動，就會產生一種教室對談的形式，提供學生多重的機會精熟地理解一個數學概念或

airiti

程序。在這樣的對談裡，個別學生所呈現的理解變成群體的集體理解的一部分(Wertsch, 2002)。本文嘗試從社會文化的觀點來分析學生的數學建模過程，基本假設是人類行動和文化、制度及歷史脈絡是連結在一起的(Lerman, 2001; Wertsch, 1993, 1998)。根據Wertsch (1993, p. 18)所解釋的，「一個關於心智的社會文化取向開始於假設行動是被中介的，它不能獨立於所處的環境」。因此，理解數學建模過程的行動不在於學生對建模問題所建立的關係，而是其外在條件，不可能將行動從所使用的中介形式(像是工具和語言)中分離出來。Wertsch (1993, 1998)強調溝通實踐是做為理解人類行動的主要資源。Lerman已經使用這個假設做過許多研究，他選擇論述(discourse)做為研究的焦點。論述指涉各式各樣的語言，包括手勢、記號及人工製品等(Lerman)，他認為分析論述實踐是重要的。Sfard與Kieran (2001)也討論學生互動在集體論證過程所扮演的角色。這些研究者詮釋集體論證是學習如何及何時參與數學論述的互動過程。本文分析學生利用論述工具並透過討論來表達想法對於他們的數學建模活動的影響。

從方法論的觀點，論述是資料分析的來源，不僅告訴我們學生的心智是如何做轉換的，同儕間的討論調整和引導個體的思維，即論述和思維是不可分的(Chronaki & Christiansen, 2005; Lerman, 2001)。本文從論述的觀點，教學與學習脈絡聚焦在集體論證(collective argumentation; Brown & Renshaw, 2000)，鼓勵學生在數學建模活動中從事集體論證。集體論證做為一種教學與學習的取向，係基於五個相互作用的原則。第一個原則是可概括性(generalizability)，需要學生停下來並思考什麼樣的概念和程序對於解答問題可能是有用的，鼓勵學生連結先備知識、程序和理解。一開始這些連結可能不強，但是當同儕間及與教師的討論一發生，有機會強化這些連結。第二個原則是具體性(objectivity)，與建模活動相關的想法能具體化並與同儕溝通；第三個原則是一致性(consistency)，同儕間相互矛盾的想法或觀點必須透過討論解決；第四個原則是共識(consensus)，所有的小組成員必須理解一致同意的解題取向，如果有一位成員不理解一個概念或程序，其他成員有責任去澄清或說明。最後一個原則是再脈絡化(recontextualisation)，學生提供小組解答給班上同學以供討論和效化。簡單地說，集體論證是教師和學生在一個群體裡，學生被要求使用文字、圖形、算則及數字等表徵問題情境；要求學生與小組其他成員比較所使用的表徵；學生藉由解釋、驗證及同意等行動來評價和系統化表徵；最後，從小組論證轉移到班級論證，小組論證的一致性與適當性經過班級的討論與效化後被效化。

## 參、研究方法

本研究採取反實證主義(anti-positivist)的詮釋取向(Cohen, Manion, & Morrison, 2000)，視個案研究為一種研究策略以深度地檢視學生的建模過程。

### 一、研究工具

根據數學建模過程及數學建模能力發展的三個面向，建模教學活動編選標準包括1.問題取材真實日常生活中，並修改適合大一學生程度；2.問題具有一定複雜性，避免套用已知數學模型即可獲得答案；3.問題設計對學生具挑戰性，但仍有建模成功之機會；4.學生可能用多種建模方法，可顯現較多建模過程與數學建模能力；5.問題答案可

airiti

能只有最優解答，而無標準解答。本研究的數學建模問題如下：

> 臺灣貨運公司雇用了一些司機負責運輸貨物，公司發現最近的柴油成本增加，而且，如果司機降低行駛速度，則可能會增加每公升柴油所行駛的公里數，但是，如此也會增加運輸的時間及司機的成本；反之，若司機提高行駛速度，則可能會減少每公升柴油所行駛的公里數，但是，如此也會減少運輸的時間及司機的成本。陷於兩難的陳經理委託貴公司協助擬定降低運輸成本的計畫。請問你要如何滿足委託人的期望？

這個問題對學生的挑戰是情境問題敘述中沒有任何數字與圖形，學生需經歷完整的建模過程。為了能夠兼顧概念知識、程序知識及建模能力的習得。另外，本研究也希望透過建模過程去經驗日常生活及科學(技)中經常會發生的不確定及不穩定的感覺，以擴大學生的數學經驗、數學世界觀及數學信念。這樣的教學取向符合Blomhøj與Jensen (2003)所謂的「整體取向」(holistic approach)，也就是包含上述所有數學建模能力的數學建模過程。本研究的數學建模活動的設計係根據前述的理論架構及Lesh等(2000)對於發展建模活動提出的六項原則。茲將降低運輸成本問題與建模活動發展原則對照如表1，用以說明此建模活動的合理性與適當性。

## 二、研究脈絡與參與者

本研究報導的資料來自於3堂(每堂課60分鐘)微積分課程，全程錄音及錄影。研究

表1：降低運輸成本問題與建模活動發展原則的對照

| 原則 | 學生層級的問題 | 降低運輸成本問題 |
|---|---|---|
| 模型建構 | 活動的目的包含一個「詳細建構、描述、解釋以及驗證預測」的發展過程。 | 建立一個模型(運輸成本函數)，可以找出最低運輸成本。 |
| 真實(對個人有意義) | 這些情況真的會在真實生活情境中發生嗎？學生能夠以自己個人知識和經驗的延伸，對這些情境產生意義嗎？ | 學生可以利用自己對耗油、薪資及函數的知識或舊經驗來解決問題。 |
| 自我評估 | 問題的陳述是否強烈暗示適當的判斷標準來評估另類解法的實用性？它的目的清楚嗎？例如：做什麼？什麼時候？為什麼？在哪裡？是誰？等等。 | 學生能從實際的資料，推論出模式是否合適，並且清楚學習的目的及欲解決的問題是什麼。 |
| 模型文件化 | 藉由所給的已知條件、目標以及學生所考慮到的可能解決路徑，教師所設計問題的回應會要求學生明白的表示他們對於情境是如何思考的嗎？ | 學生根據已知條件，將自己的想法寫在學習單上，並進行小組討論。之後，要求學生將小組討論的共識寫在黑板上發表。 |
| 構念可共享和重新使用 | 發展出來的模型是只對發展它的人有用呢？還是它也提供了一個可以分享、轉移、容易修改或者重複使用的一個思考方式呢？ | 學生建立的模型，可以用在其他成本最小化的問題，亦可讓別人重複使用。 |
| 簡單化 | 這個解答也提供詮釋其他情境的有用原型或者隱喻嗎？解答必須愈簡單愈好，但是仍然必須創造出對於重要構念的需求。 | 問題陳述簡單，且學生容易回到原來活動，再次建立模型或分析資料。因此，問題雖然簡單，但仍隱含「極值」的重要數學概念。 |

airiti

對象為54名科技大學大一工程學生，學生的平均數學成就屬於中等。從上課及平時測驗的表現來看，學生的數學學習有幾個特徵：重視程序性知識但不重視概念理解；對於概念理解的問題，通常不知道如何著手解題；對於解決應用問題也遇到極大的困難。降低運輸成本問題屬於計算極值的問題，學生在學習導數概念與微分運算後，雖然已經有計算極值的經驗，但由於建模問題敘述只有文字表徵，學生無法直接應用微分的概念與程序於此問題中。因此，本建模問題對學生而言是陌生的，而且具有挑戰性。將54名學生分成10組，每組5至6名學生，研究者觀察及錄影其中的三組(A組、D組及F組)。每堂課結束後針對三組學生進行回溯式訪談以瞭解學生潛在的意向，由研究者播放該組學生課堂中的錄影帶，藉由提問要求學生詳細說明他們的行為，訪談的問題包括「這個時候你想到什麼概念？」、「你為什麼忽略這個表徵而選擇新的表徵？」及「這個時候如何提出你的想法？」等。本研究符合回溯分析法(retrospective analysis method)，所蒐集的訪談資料用來澄清學生數學建模過程的意圖(Steffe & Thompson, 2000)。蒐集上述資料後，參照Strauss與Corbin (1998)紮根理論(grounded theory)的編碼程序進行資料的分析，透過開放編碼(open coding)形成許多的範疇(category)，一旦範疇被定義出來後，開始去尋找性質。範疇的性質的描繪讓研究者可以去詮釋資料。

擔任教學的張老師在科技大學教授微積分課程已有15年的經驗，由於他對於經由數學建模培養學生的數學思維有興趣，因而有意願參與本研究，且與研究者有多年的合作經驗。和研究者一樣，張老師相信提供一個豐富的社會互動環境，讓學生有機會產生數學問題情境及表徵，可以發展學生的數學思維素養。張老師在集體論證中扮演引導者及促進者的角色，其任務包括：1.分派建模過程的管理給小組；2.參與臆測與反駁的發展；3.引導學生從解題活動朝向建模活動；4.促進小組討論及班級討論；5.引進適當的數學語言。研究者在教學過程中所扮演的角色是觀察者與資料蒐集者。每次上課前一天，張老師與研究者會就下一節課的建模教學活動先進行討論，並預測學生可能的行為及因應策略。每次上課後，就學生在建模過程中所遭遇的障礙或迷思概念進行討論並研擬策略。

## 三、每一節課的主要活動

第一堂課，先由張老師佈題，接著進行班級討論及獨自作業，學生可以提出問題後，其他學生表達自己的看法。張老師則是藉由提問「為什麼」、「然後呢」及「怎麼做呢」等問題引導或指導學生進行反思。接下來進行小組討論，學生嘗試理解、結構化和簡化真實情境並轉換為問題敘述，在此過程中逐漸找出並確認問題敘述中的幾個關鍵字，並鼓勵學生根據關鍵字將真實情境問題轉化為問題敘述。最後，提示學生於下次上課前可透過網路或相關媒體蒐集所需的資料，張老師在往後每一節課結束時也都做這樣的提醒。第二堂課的目標是學生必須根據問題敘述簡化或結構化問題情境進而形成真實模型。先進行30分鐘的小組討論，鼓勵學生重新檢視問題敘述，並要求學生根據關鍵字建立變數、參數及常數及其符號表徵，第二階段邀請A組、D組、H組及G組報告分享及進行班級討論。張老師於討論期間也不時提出「為什麼你們會這麼想？」、「如何保證你們的想法是對的？」及「你們覺得這樣是最好的方法嗎？」等問題，提供學生討論

airiti

的素材及讓學生察覺到檢驗論點的重要性。張老師也藉此機會說明變數、參數及常數之間的異同。第三堂課，學生首先利用已知的數學知識獨自解決數學模型，然後進行小組討論詮釋數學解答為真實結果。第一階段著重在解題，第二階段則是著重在整個數學建模過程的反思。張老師於最後30分鐘挑選B組、C組、E組及I組上台報告，報告是以向委託人進行解決方案簡報的方式進行。最後，張老師總結四組的報告，提出「B組和C組不同的地方在那裡？」、「如果你是委託人，你會對E組的報告提出什麼問題？」及「如果你是委託人，你會選擇那一個方案？」等問題，讓學生進行效化及溝通，有必要的話，引導學生重返建模過程。

## 肆、結果與分析

本文報導D組學生的數學建模過程，D組學生有小明、小華、小安、小英、小青、小志(以上均為化名)，微積分成績屬中等，在進行數學建模教學前具備微分的程序性知識，但概念性知識則略有不足。D組學生的主要建模過程包括：1.連結真實情境與真實模型；2.連結真實模型與數學模型；3.連結數學模型與數學解答；4.連結數學解答與真實結果(情境)。D組學生的數學建模過程分析如下。

### 一、連結真實情境與真實模型

在第一個階段，學生必須理解、結構化和簡化真實情境並轉換為問題敘述，D組學生在這個階段，首先確認出真實情境中的幾個關鍵字，例如，行駛速度、柴油成本、司機成本及運輸成本等。學生採取的策略包括提問、澄清及更注意關於真實情境中的已知條件和先備知識以獲得真實情境的更多資訊，這些資訊將是建立真實模型的基礎。學生使用數學想法描述情境資訊，特別是發生在小組討論中與他人的論述。例如「貨車的行駛速度是固定的，忽略紅燈和塞車」就是在小組討論中產生的重要簡化工作。提出臆測是學生數學化真實情境時要處理的條件和假設。當學生進行臆測時，他們是在確認情境裡的變數和限制，探究影響運輸成本的關鍵因素。例如，小安認為「速度越慢，每公升柴油可以行駛的公里數越多」，小英則提出不同的想法，她認為「速度和每公升柴油可以行駛的公里數不一定成反比」。小組成員所提出的互相矛盾的臆測因缺乏具體性，無法成為溝通的素材進而取得共識。經過小組討論，相關因素羅列如下：與行程有關的因素包括貨車行駛的距離、貨車的速度及貨車司機的時薪；與貨車有關的因素包括柴油成本及貨車每公升可行駛的公里數。因此，他們都能順利提出問題敘述，例如，小華提出「在柴油成本和司機成本的考量下，找出最佳的行駛速度使得運輸成本最低」。

由於真實情境並非完全陌生，且建模教學是在教授完「極值」單元後進行，學生在這個轉換階段似乎未遭遇困難。這正是研究者選擇「降低運輸成本」建模問題的主要原因，希望學生不要在第一階段就失去探究耐心與學習動機。

### 二、連結真實模型與數學模型

學生在第二個階段從事的是數學化的工作，數學化包括引進與數學實體相關的數學想法。數學化時，學生首先要表徵和同意對應於情境條件的假設和參數，簡化或結構化問題情境進而形成真實模型。這個階段是學生在整個數學建模過程中所遭遇到最大的困難，所花的時間也最長，學生的困難在於

airiti

表徵對應於情境條件和假設的數學性質和參數。由於真實情境與問題敘述都沒有任何數量資料，給予這些因素分類就顯得十分重要，例如何者是參數？何者是變數？而這也是數學建模活動很重要的一個過程。在建立假設部分，D組學生均假設一公升柴油的價格、司機的時薪及路程公里數，但在貨車速度和每公升柴油可行駛的公里數的關係上則略有不同，大致可分類成兩種取向，一是聚焦在速度和每公升可行駛的公里數，小志是典型的代表。他假設「**時速20公里時，每公升柴油可以跑40公里，時速每增加20公里，每公升柴油可跑距離減少10公里**」，他說：「**我比較目前司機的行駛速度和改變後的速度，那一種帶來的成本比較少**」，因此，「**我測試幾個數據，依照數據可以大約推測出行駛速度和成本之間的關係，再畫出圖形就可以求出最低成本**」。小志數學化真實情境為真實模型，並以列表及繪圖的方式獲得解答(圖2)。

另一種取向的代表是小英，她則是聚焦在速度和每公升可行駛的時間，假設「**一公升油在時速50公里的情況下有1小時的使用時間，當時速每增加5公里，就減少0.2小時的使用時間**」，列出成本函數後，利用一階導數概念求解(圖3)。

D組學生為了建立數學模型而做了很多的計算，但這些計算並沒有呈現一個所謂的數學模型。另一方面，這些計算並非真正的簡化問題情境，而是將一些數字做有意義的組合。學生對於得到一個純粹的數學結果感到滿足，忽略了需要比較和驗證。

個體在進行獨立作業時，由於每個人數學化真實模型的方法不同，導致數學解答也不同。接著，D組學生在的小組討論中發現了這個問題，小青認為「**這很正常啊！因為我們的假設都不一樣**」，他們也都接受這樣的結果。最後，他們採用小志的建議：「**我用小英的假設再做一遍，看誰的比較好，就報告誰的**」，以便向委託人報告「唯一解答」。

小組成員仍然回到過去的解題經驗，認為只能提出一個唯一數學解答，故同意小志的建議而開始計算。學生重視數字的計算及認為應該有唯一解答，這或許與學校文化有關。在考試引導教學的文化下，學生習於數字的操弄及獲得一個與數字有關的解答。雖然在學生論

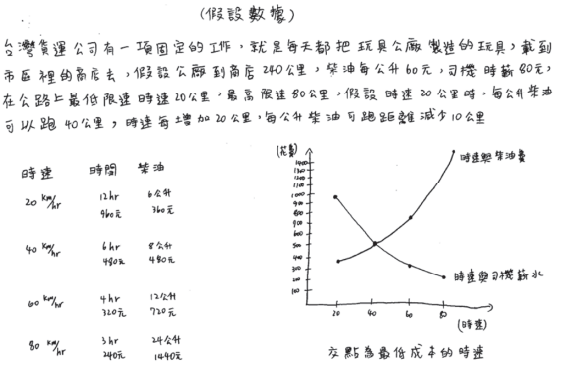


圖2：小志的建模原案

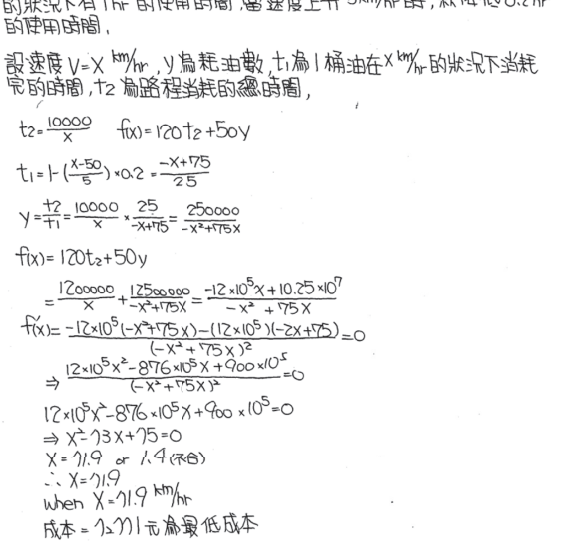


圖3：小英的建模原案

airiti

證過程中進行了反駁、評價與比較等行動，但受限於學校文化的影響及對數學建模活動的不熟悉，導致論證活動陷入泥淖。

在班級討論中，張老師發現所有小組都有類似的問題。因此，張老師重新說明數學模型的意義，並建議學生儘量少使用具體數字，多使用符號來表徵關鍵因素。另外，學生對於1公升柴油的價格及每公升柴油可行駛的公里數均自由假設，未使用與情境較相符的數據。例如小志假設1公升柴油60元，小英假設1公升柴油50元。於是，張老師要求學生要從日常生活情境取材，採取多元策略並鼓勵學生使用適當的數學語言進行探究。

回到D組學生的小組討論，經過張老師的說明，不再以實際數字做假設。他們首先對於問題中的幾個關鍵詞是屬於參數或變數進行討論。小華認為「貨車每公升可行駛的公里數會隨著貨車速度的改變而改變，所以是變數」，小青認為「貨車速度可以從0到100，都有可能，所以是變數」，小志認為「公司不會常常調薪，所以貨車司機的時薪可以當做是參數不是變數」。關於柴油成本部分，小明覺得「柴油的價格雖然可能每個星期都會調整，但是調整得不多，而且有時漲兩毛，有時又跌兩毛，等於價格沒變，所以我們可以假設柴油的價格是參數」，小安則有不同的看法，他認為「現在是變動油價，柴油的價格每星期都可能不一樣，貨車每天要載貨，應該算是變數」。小明認為「貨車速度是解決問題的關鍵，也是我們想知道的，要設為變數」。D組學生經過約20分鐘的討論後得到的共識是「因為問題的關鍵是速度，和速度直接相關的數是變數，其餘就是參數」。透過具體化的想法和詮釋，讓學生得以透過論證來比較和評價參數與變數。最後，他們設定貨車速度、柴油每公升可行駛的公里數及運輸成本等為變數，而貨車司機的時薪及每公升柴油價格等為參數，並系統化所有參數與變數的符號表徵，整合D組學生所列出的變數與參數整理如表2。

表2：真實模型的參數與變數

| 因素 | 類別 | 符號 | 單位 |
|---|---|---|---|
| 貨車行駛的距離 | 參數 | d | 公里 |
| 貨車的速度 | 變數 | s | 公里／小時 |
| 貨車司機的時薪 | 參數 | W | 元／小時 |
| 1公升柴油的價格 | 參數 | f | 元／公升 |
| 每公升柴油可行駛的公里數 | 變數 | g | 公里／公升 |
| 運輸成本 | 變數 | C | 元 |

數學化的第二個階段是建立假設，較無爭議的假設包括「貨車司機的薪水和行駛時間成正比」及「貨車的行駛速度是固定的，忽略紅燈和塞車」，較有爭議的假設是關於貨車速度和每公升柴油可行駛的公里數之間的關係，而這也是這個建模活動最重要的一個假設。在獨立作業時，大多數的D組學生均假設「貨車速度和每公升柴油可行駛的公里數成反比」，亦即速度越慢則越省油，速度越快則越耗油，這樣的假設顯然與真實情況不同。在小組討論時，小華以自身的生活經驗提出反駁，但小明則是從過去獲致的知識對此反駁提出修正，他們都能連結先備知識和數學模型。

小華：我在市區騎車的時候覺得很耗油，假日到郊外，速度比較快，反而比較省油，所以我覺得速度越快越省油。

小明：照你這樣說，那時速150不就比時速100要來得省油，可是我曾經看過一篇報導，說時速100左右最省油，那就表示時速150不會比時速100要來得省油。

airiti

小志：那也應該跟車子有關吧，我假設一公升柴油可以跑40公里，那是我的機車，貨車那麼重，應該跑不到40公里吧！

小青：聽你們所說的，看來我原來的假設太單純了，一公升柴油可以跑幾公里跟車子的種類和重量有關，速度和跑幾公里也有關係，但關係不確定。

同儕間相互矛盾的想法必須透過討論來解決，而也由於成員能提出具體性的假設，雖然小青原來所做的假設是錯的，但在小組其他成員的臆測、反駁及修正的集體論證中，扮演系統化假設的角色，其假設亦獲得小組成員的一致同意。因此，D組學生決定各自想辦法查詢貨車速度和每公升柴油可行駛的公里數的資料以做為下次討論的依據。在第三節課的小組討論，其中4個人選擇中華得利卡(2,500c.c.)，另2個人則選擇三菱堅達(2,835c.c.)，他們以「少數服從多數」的原則選擇中華得利卡貨車。他們透過網路、車商網站及打電話到車商詢問等方法蒐集貨車速度和每公升柴油可行駛的公里數之間的關係，由於資訊來源不同，即使選擇相同的貨車類型，他們建立假設的內容也不盡相同。但是，透過上一節課的討論及蒐集資訊方法，他們所呈現的的貨車速度和每公升柴油可行駛的公里數的關係並非單純的線性關係。例如，小華將貨車速度分為時速0到時速50及時速50到時速80兩個區間，分別畫通過(0,0)、(60,12)及(60,12)、(100,8)兩點的線段做為假設的圖形表徵，小青則將貨車速度分為時速20到時速80及時速80到時速110兩個區間，分別畫通過(20,6)、(80,10)及(80,10)、(110,9)兩點的線段做為假設的圖形表徵。D組學生經討論後採用小華的圖形並建立假設：「假設最高時速是100公里，時速從0開始，速度增加，每公升柴油可行駛的公里數也穩定地增加，到了時速60公里的時候，每公升柴油可行駛12公里；時速超過60公里之後，每公升柴油可行駛的公里數開始穩定地減少，到了時速100公里的時候，每公升柴油可行駛8公里」，並以圖4表徵他們所建立的假設。

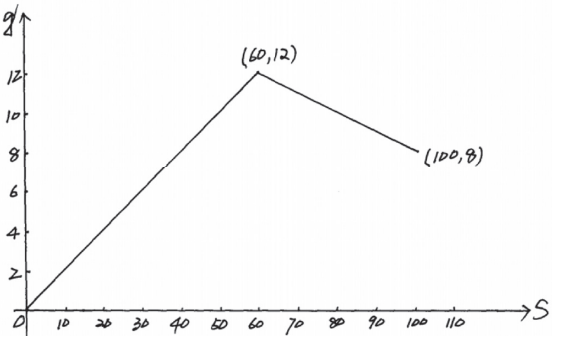


圖4：貨車速度和柴油每公升可行駛的公里數之間的關係(小華)

D組學生進行完假設的比較、解釋和驗證後，取得一致性的共識，並完成假設的表徵轉換，將文字表徵轉換為圖形表徵。接著，他們開始著手將關鍵因素轉換為數學表徵，包括行駛時間(d / s)、司機成本(wd / s)及柴油成本(fd / g)，進而寫出運輸成本函數C(x) = wd / s + fd / g。至此，D組學生完成了數學模型，包括成本函數的代數式及每公升柴油可行駛的公里數的圖形表徵。

數學化是介於真實模型和數學模型之間的橋樑，在獨立作業階段，學生將問題轉換為應用問題後解題，數學化可能發生得很快或不明顯。學生所面臨的主要困難是變數與參數的確認與分類，缺乏這個能力使得學生難以啟動建模過程。而在教學之後，學生回到建模循環的第一個階段，重新更深層地探

airiti

究真實情境，更多的條件和假設可能就會變得明顯，或者學生可能選擇縮小或擴大建模的範圍。另外，數學化一個條件或假設可能需要許多性質或參數，或者是許多條件或假設可能要整合到一個性質或參數。事實上，數學化的本質和持續的時間可能和學生從事的知識行為有關。從建模問題及上述學生的表現，數學化真實模型所需的數學建模能力包括確認變數與參數、使用圖形表徵、使用符號表徵情境元素、建立相關的假設及適當地使用數學知識。

## 三、連結數學模型與數學解答

本階段是利用已知的數學知識解決數學模型，因為成本函數的形式與過去所處理的函數不同，學生第一個遇到的困難是該對那一個變數進行微分。

小明：要求極小值，那就要微分耶！可是……

小安：沒有數字耶！w、d、s、f、g……哇！這麼多個，要對那一個微分啊！

小華：那就看那一個是變數啊！對變數微分就對了

小志：變數有兩個，s和g，那一個才對？

小明：應該是速度，因為我們最後想要知道成本最低時的速度多少？

小青：那g也和速度有關，為什麼不是對g微分？

小英：我知道了，g和速度有關沒錯，但是，你們看我們上次畫的圖，g是應變數，s是自變數，所以我們應該對s微分。

D組學生都同意小英的看法，挑選出微分變數。集體論證讓學生為了達成共識，必須連結概念性知識與程序性知識，連結個人理解與集體理解。以理解為基礎的共識是比較和評價想法過程的最終產物，小組成員協商一個想法或表徵的共同理解，學習或數學建模能力在個體平面和合作平面間的流動中發生。

接下來的困難是g如何微分s？由於他們以圖形表徵呈現s與g之間的關係，故而在微分運算時遇到阻礙。經過五分鐘的討論，仍找不到解決的方法，張老師提示他們可以利用兩條直線方程式的組合把圖形寫成函數的形式。再經過約五分鐘，D組學生以代數式

$$g=\begin{cases} s/5, 0\le s\le 60 \\ -0.1s+18, 60\le s\le 100 \end{cases}$$

表徵s與g之間的關係，最後利用一階導數的概念完成數學解答(圖5)。比較表徵讓學生看到他們的想法和詮釋的異同。在這個過程，藉由讓學生從不同觀點看一個表徵或想法，來幫助學生從事數學建模；也可以讓學生看到想法和表徵的一致性。不過，學生對於最佳速度含有參數卻感到有些疑惑，依據他們過去的學習經驗，答案的形式應該是一個數字。

D組學生在這個建模階段所遇到的困難包括表徵轉換及非預期的數學解答形式，在表徵轉換部分，學生的困難來自於過去的學習經驗，以小華為例，他沒有想過要把圖形表徵轉換為代數表徵，原因是「沒做過，以前都是老師給函數要我們畫圖，而且，這種函數的樣子很少看到」。

在數學解答形式的部分，也是來自於與過去學習經驗的落差。張老師發現絕大部分的學生都有此疑問，利用班級討論的機會說明數學建模的目的與意義，以及數學解答含有參數所代表的意義。

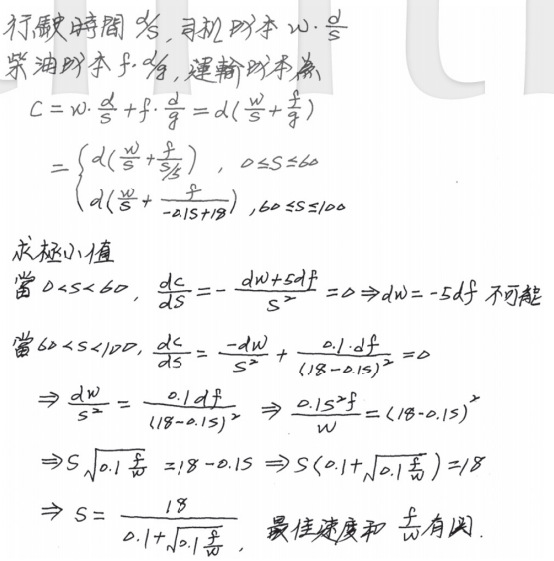


圖5：D組學生的數學模型與數學解題

本階段所涉及的數學建模能力包括圖形表徵與代數表徵的轉換、分析、應用導數概念的基本知識及理解參數的意義。分析包括數學地操弄或詮釋數學實體以導出數學實體的一個或多個新的性質或參數，分析涉及解題，但又不限於解題。

## 四、連結數學解答與真實結果(情境)

本階段是詮釋數學解答為真實結果，D組學生在上一個階段發現最佳速度和f / w的值有關，他們也瞭解必須根據f / w的值來提出可能的結果。在進行個別獨立作業及訪談後，6位學生的詮釋結果可以分成兩類，有4位學生屬於第一類，他們提出單一的f / w建議值，例如小志提出當f / w = 0.5可得最佳速度與最低運輸成本。屬於第二類的學生有兩位，以小英為例，她列出：當f / w = 0時，；當f / w = 0.1時，s = 90；當f / w = 0.2時，s = 74.6；當f / w = 0.3時，s = 65.9；當f / w = 0.4時，s = 60；當f / w = 0.5時，s = 55.6，並不給予唯一解答，而是向委託者提出建議方案為f / w的值介於0.3和0.4之間。雖然第二類學生的解答較第一類學生來得好，但他們都忽略w和f的意義及數值，將解答聚焦在速度而疏忽了司機的時薪和速度有關，提出不符合真實情境的結果。例如，沒有考慮到f / w = 0.5所代表的意義是司機的時薪約僅60元，是不合情理的。在小青代表D組學生上台報告的時候，研究者與她有以下的對話：

研究者：你為什麼設w分之f等於0.4？

小青：我隨便設的。

研究者：f跟w代表什麼？

小青：f是一公升柴油的價格，w是司機的時薪。

研究者：你不是有騎車嗎？一公升柴油多少錢？

小青：我加的是92，大概31塊，柴油好像便宜一點，大概30吧！

研究者：算30好了，那w是多少？

小青：f等於30，f除以w等於0.4，w是75，司機1小時的薪水75元。

(班上一片靜默，研究者在等待有無學生提出反駁)

小欣(C組學生)：哇！才75塊喔！比我工讀的錢還少，那司機太辛苦了吧！

小志：對啊！這樣的薪水，那老闆根本請不到司機。老闆應該會把這份報告丟到垃圾桶吧！

再脈絡化是將數學結論放置在真實脈絡，如同數學化，再脈絡化可以看作是真實世界與數學世界之間的橋樑。但不同的是，

airiti

數學化與條件、假設、性質和參數有關，再脈絡化和結論有關。學生在數學建模的最後過程並未進行效化程序，覺得只要獲得一個數字答案就好，而未察覺司機時薪的不合理性。藉由班級討論及小組報告才啟動學生效化數學建模的結果，重新由真實情境檢視w和f的意義及數值。小組上台發表他們同意的解答供班級同儕討論和效化，集體論證讓學生視數學為參與共同社群的一種活動。由於其他組別學生的表現也和D組學生類似，張老師請學生進行小組討論。

## 五、重返數學建模過程

在此階段，學生重返數學建模過程，但學生不一定是回到起點而重新建模，例如D組學生從s的代數表徵進行討論。

小英：我知道柴油一公升大概30元，如果w分之f等於0.4，司機的時薪大概是75元，速度大概是60公里。

小華：速度合理但司機的時薪不合理。

小青：那我們要怎麼改呢？

小安：回到最後那個s的公式，這個公式來自於運輸成本，我想應該修改運輸成本。

小明：運輸成本來自於我們假設的耗油跟速度的關係，所以要改耗油跟速度的關係。

小英：我也這麼想，而且我覺得速度從60增加到100，耗油從12降到8，降太多了，我建議改成10。

經過一番討論，D組學生決定採用小英的建議並建立假設：「假設最高時速是100公里，時速從0開始，速度增加，每公升柴油可行駛的公里數也穩定地增加，到了時速60公里的時候，每公升柴油可行駛12公里；時速超過60公里之後，每公升柴油可行駛的公里數開始穩定地減少，到了時速100公里的時候，每公升柴油可行駛10公里」。D組學生以代數式：

$$g=\begin{cases} s/5, 0\le s\le 60 \\ -0.05s+15, 60\le s\le 100 \end{cases}$$

表徵s與g之間的關係，最後利用一階導數的概念完成數學解答。最後，他們列出：當f / w = 0.05時，s = 150，w = 600；當f / w = 0.1時，s = 124，w = 300；當f / w = 0.2時，s = 100，w = 150；當f / w = 0.25時，s = 93，w = 120；當f / w = 0.3時，s = 87，w = 100。向委託者提出建議方案為f / w的值介於0.2和0.25之間。

# 伍、討論與結論

本研究聚焦在給定學生一個真實的問題情境，學生在情境中反思數學理解、數學化、分析數學系統和詮釋結果，提供學生以不同方式學習數學的機會。在文獻上，以微積分概念做為主題知識的數學建模研究多以概念理解為研究標的。例如，Doorman與Gravemeijer (2008)設計一個建模教學環境探究10年級學生的斜率和速度概念，研究結果證實建模教學取向確實可以讓學生重新創造數學概念；Blomhoj與Kjeldsen (2007)以大一學生為研究對象，透過數學建模活動發展學生的積分概念；Yoon, Dreyfus與Thomas (2010)則是設計MEAs探討數學系學生的反導函數概念。不同於上述研究，本研究利用「降低運輸成本」數學建模活動取代微積分課程中的「極值問題」，但研究目的不在於

airiti

探究導數概念，而是探究及培養微積分學生的數學建模能力。從研究資料分析結果顯示學生所遭遇的一個基本且重要的問題，那就是缺乏變數、參數與常數及其是已知或未知的，隱晦的或明確的，獨立的或相關的等性質的瞭解。如果沒有這些基本知識，就很難讓學生開始進行數學建模活動，尤其是在數學化的過程。此研究發現是過去文獻上較少被注意到的，因為，對大一的學生而言，他們應已具備關於參數與變數的相關知識。然而，學生具備的知識可能只是一種「惰性的知識」(inert knowledge; Perkins, 1992, p. 22)，需要老師提供一個適當的刺激與引導，學生才能進行相關連結。因此，不要忽視學生在分類變數、參數及常數上不足的能力，並應協助學生建立問題要求的有用關係。

另一個明顯的問題就是表徵轉換，尤其是圖形表徵與代數表徵的轉換。本研究結果呼應Lesh與Doerr (2003)及Lesh與Lehrer (2003)的觀察，證實表徵系統和表徵流暢的重要性，如同Lester與Kehle (2003, p. 514)強調在數學建模過程「選擇數學概念來表徵真實模型的基本特徵」，然後轉換為「表徵環境及問題的數學符號」的重要性。而學生缺乏此能力的原因有二，一是來自於缺乏類似的經驗(例如，小華：以前沒做過，以前都是老師給函數要我們畫圖，而且，這種函數的樣子很少看到)。這也呼應Yoon等(2010)的觀察，他們的研究結果顯示，數學系學生缺乏圖形表徵與數值表徵轉換的經驗。其二是學生對於表徵所具備的知識只是一種「儀式的知識」(ritual knowledge; Perkins, 1992, p. 8)，他們能正確地使用圖形表徵s與g之間的關係，但是在一個陌生的問題情境中，卻無法進行圖形表徵與代數表徵的轉換。

最後一個問題是學生缺乏詮釋和效化的能力，無法將數學知識與結論放置在真實情境，在真實世界與數學世界之間搭建橋樑。在數學化階段，學生對於柴油價格及耗油與速度的關係的建制都是「隨便假設的」。在連結數學解答階段與真實結果階段，他們都忽略w和f的意義及數值，將數學解答聚焦在速度而疏忽了司機的時薪和速度有關，提出不符合真實情境的結果(例如，司機的時薪約僅60元)。學生所採取的是一種「反向策略」(inverse strategy; Christiansen, 2001)，忽略學校外的日常生活經驗而產生一個虛擬情境。詮釋和效化的能力與數學建模教學的目的與重要性有關，缺乏這兩項數學建模能力，建模就無法連結教室數學到每天生活、工作、和決策，也無法理解情境及改善決策(CCSSO & NGA Center, 2010)。

D組學生在建模過程中發生兩次重返數學建模循環，但都回到不同的階段重新建模，這與理論上的數學建模循環(圖1)不同，這也呼應Borromeo Ferri (2006)的看法，區辨建模階段只有在理論上是可行的。從D組學生重返建模階段來看，理論(或規範)的數學建階段表徵不足以描述學生的建模活動。另一方面，D組學生的數學建模循環歷經多個不同的階段與返回，是一個繁複的過程。此研究結果不同於Kaiser (2005)的研究結果指出簡化的建模循環有利於學校的數學建模教學。研究學者不同的看法，可能跟研究學者採取的理論觀點和建模問題有關。

大部分的數學建模活動都是透過小組來發展與完成的(Antonius et al., 2007)，從D組學生的整個建模歷程來看，一開始只瞭解給定的情境，但無法結構化和簡化情境或不能發現有關的數學想法。逐漸地，集體論證在建模過程的每一個階段都發揮功能，當學生形成問題，討論可以讓他們區辨什麼是相關的，什麼是不相關的，並能建立參數與變數之間的關係。因

airiti

此，從建模活動所發展的溝通能力，讓學生有機會去詮釋他人的數學推理，及以言語和書寫的方式表達自己的思維。

從D組成員的集體論證過程顯示學生視數學建模像是一個論壇，他們的個人的想法和表徵可以被呈現、被重新考慮及被分享。從上述互動的分析，數學建模能力發生於分享的實踐，也就是說，當論證行動被建制後，論述空間就會發生。學生所表達的部分意見會被放在適當的位置，某些意見所享有的特權可能會凌駕其他某些想法。也就是說，數學建模過程中，異質的意見透過比較、解釋、轉換、評價及同意等集體論證行動形成小組或教室的論述空間，使得1.概念理解和程序理解可以連結起來(例如，決定微分變數s)；2.個體理解和集體理解可以連結起來(例如，耗油與速度的關係)；3.數學化，也就是不僅知道數學知識，而且知道何時及如何使用這些數學知識，超越「儀式的」認識(例如，圖形表徵與代數表徵的轉換)。

如果「學習是好的思維的結果」(Perkins, 1992, p. 8)，應該鼓勵學生使用「思維例行程序」(thinking routines; Ritchhart, 2002, p. 89)。從數學建模的觀點，提供一個適當的數學建模問題，引導並鼓勵學生透過思維技巧建立數學建模的例行程序，這個例行程序提供學生一個機制來從事數學建模活動、建構意義、找出解答及與他人溝通解答。從上述資料分析，這樣的思維例行程序就是集體論證：1.獨立表徵數學建模問題；2.與小組成員比較表徵；3.向小組其他成員解釋和驗證不同的表徵；4.小組成員達成一致性的共識；5.向班級同學呈現小組的想法和表徵以測試解答的有效性。

經由數學建模教學，學生確實可以透過獨立作業及集體論證，逐漸發展其數學建模能力。學生能在數學內及數學外建立多重的連結，藉由建模活動，學生不僅強化了已習得的數學知識(利用導數計算極值)，發展了新的數學知識(如變數、參數及常數的分類)，也發現學生的數學建模能力從「只瞭解給定的情境，但無法結構化和簡化情境或不能發現有關的數學想法」的層次，逐漸發展到「能經驗數學建模過程和效化跟給定情境有關的數學解答」層次。本數學建模教學的成效呼應許多研究(Lesh & Lehrer, 2003; Schorr & Lesh, 2003)的觀察，數學建模活動可以讓那些被認為是缺乏複雜、有力思維能力的學生達到卓越的學習成就。雖然研究取向與研究方法不同，但本研究聚焦的社會文化取向與集體論證觀點確實能幫助學生強化舊知識、發展新知識及培養數學建模能力。

## 誌謝

本研究承蒙行政院國家科學委員會經費補助(計畫編號：NSC99-2511-S-131-001-MY3)，特此致謝。

## 參考文獻

1. 楊凱琳、林福來(2006)。探討高中數學教學融入建模活動的支撐策略及促進參與教師反思的潛在機制。**科學教育學刊**，**14**(5)，517-543。
2. 楊凱琳、林福來、蕭志如(2012)。數學建模評量規準之研究。**科學教育學刊**，**20**(4)，319-342。

3. Antonius, S., Haines, C., Jensen, H. T., Niss, M., & Burkhardt, H. (2007). Classroom activities and the teacher. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 295-308). New York: Springer.
4. Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 293-301.
5. Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *22*(3), 123-139.
6. Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. (2007). Learning the integral concept through mathematical modelling. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *CERME 5-Proceedings of the fifth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 2070-2079). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.
7. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.
8. Blum, W., & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "Sugarloaf" and the DISUM project. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood.
9. Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.
10. Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *20*(3), 121-128.
11. Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86-95.
12. Brown, R. A. J., & Renshaw, P. D. (2000). Collective argumentation: A sociocultural approach to reframing classroom teaching and learning. In H. Cowie & G. Van Der Aalsvoort (Eds.), *Social interaction in learning and instruction: The meaning of discourse for the construction of knowledge* (pp. 52-66). Amsterdam, The Netherlands: Pergamon Press.
13. Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: Reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 178-195.
14. CCSSO & NGA Center. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: CCSSO and the NGA Center. Retrieved October 21, 2012, from http://www.corestandards.org/ assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf
15. Christiansen, I. M. (2001). The effect of task organization on classroom modelling activities.

airiti

In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education: ICTMA9–applications in science and technology* (pp. 311-319). Chichester, UK: Horwood.

16. Chronaki, A., & Christiansen, I. M. (2005). *Challenging perspectives on mathematics classroom communication*. Greenwich, UK: Information Age.
17. Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5th ed.). London: Routledge.
18. Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2), 110-136.
19. Doorman, M., & Gravemeijer, K. (2008). Learning mathematics through applications by emergent modeling: The case of slope and velocity. In B. Sriraman, C. Michelsen, A. Beckmann, & V. Freiman (Eds.), *Proceedings of the second international symposium on mathematics and its connections to the arts and sciences* (*MACAS2*; pp. 37-56). Odense, Danmark: University of Southern Denmark Press.
20. English, C. (1999). Modelling for the new millennium. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 118-129). London: Falmer Press.
21. English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics*, *12*(3), 156-163.
22. Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1/2), 3-8.
23. Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. New York: Springer.
24. Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1/3), 111-129.
25. Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school -- Examples and experiences. In G. Kaiser & H. W. Henn (Eds.), *Mathematikunterricht im spannungsfeld von evolution und evaluation* (pp. 99-108). Hildesheim, Deutschland: Franzbecker.
26. Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics ICTMA 12* (pp. 110-119). Chichester, UK: Horwood.
27. Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 196-208.
28. Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 302-310.
29. Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 82-85.

30. Kehle, P. E., & Lester, F. K. (2003). A semiotic look at modeling behavior. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 97-124). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

31. Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 87-113.

32. Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classroom: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 361-383). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

33. Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

34. Lesh, R., & English, L. D. (2005). Trends in the evolution of models & modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,*, *37*(6), 487-489.

35. Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

36. Lesh, R. A., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *5*(2/3), 109-130.

37. Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501-518). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

38. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 113-142.

39. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

40. Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society.

41. Perkins, D. N. (1992). *Smart schools: Better thinking and learning for every child*. New York: The Free Press.

airiti

42. Ritchhart, R. (2002). *Intellectual character: What it is, why it matters, and how to get it*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

43. Romberg, T. A. (2001). Mathematics goals and achievement in the United States. In M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the PME 25* (Vol. 1, pp. 180-185). Utrecht, The Netherlands: PME.

44. Schoenfeld, A. H. (2002). A highly interactive discourse structure. In J. Brophy (Ed.), *Social constructivist teaching: Affordances and constraints* (Vol. 9, pp. 131-170). New York: Elsevier.

45. Schorr, R. Y., & Lesh, R. (2003). A modeling approach for providing teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 141-157). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

46. Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind*, *Culture*, *and Activity*, *8*(1), 42-76.

47. Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

48. Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.

49. Wertsch, J. V. (1993). *Voices of the mind*. Cambridge, UK: Harvard University Press.

50. Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. New York: Oxford University Press.

51. Wertsch, J. V. (2002). *Voices of collective remembering*. New York: Cambridge University Press.

52. Yoon, C., Dreyfus, T., & Thomas, M. O. J. (2010). How high is the tramping track? Mathematising and applying in a calculus model-eliciting activity. *Mathematics Educational Research Journal*, *22*(2), 141-157.

科學教育學刊
2014, 第二十二卷第三期, 237-258
DOI: 10.6173/CJSE.2014.2203.01

Chinese Journal of Science Education
2014, 22(3), 237-258

# Mathematical Modelling -- A Sociocultural and Collective Argumentation Perspective

**Chih-Hsien Huang**
Department of Electrical Engineering, Ming Chi University of Technology

## Abstract

In this paper, I outline a sociocultural perspective of modelling in mathematics education and discuss implications for analysis of students' activities at the micro level. I explores the notion that the discourse of the mathematics classroom impacts on the practices that students engage when modelling mathematics. The research reported in this paper is situated within an on-going study where first year calculus students are using the practices of Collective Argumentation to bring about change in their classrooms. This paper reports on one aspect of the study that sought to explore whether students who use Collective Argumentation on a regular basis in their classrooms view mathematics as providing a forum where personal understandings can be expressed, re-considered, shared and coauthored when they go about mathematical modelling in a novel context–a reducing transportation costs problem. The results of the exploration are discussed and situated within the context of the findings of the on-going study. Through mathematical modeling instruction, students can gradually develop their mathematical modelling competency by working on their own and through discussion with their peers.

**Key words:** Sociocultural, Collective Argumentation, Calculus, Discourse, Mathematical Modeling Competency

* Corresponding author: Chih-Hsien Huang