科學教育學刊
2015, 第二十三卷第一期, 53-82
DOI: 10.6173/CJSE.2015.2301.03

Chinese Journal of Science Education
2015, 23(1), 53-82

整合三維空間幾何概念與體積的數位教材與教學試驗

黃幸美
臺北市立大學　學習與媒材設計學系

摘要

本研究目的在於探討三維空間幾何與體積概念整合的數位教材對於國小五年級學童學習體積測量公式與問題解決之成效。研究對象取自臺北市一所公立小學之五年級三個班級兒童(N = 87)，並隨機分派至三維空間幾何概念與體積測量整合課程的實驗組、體積測量課程的對照組，以及接受非體積且非幾何課程的控制組。研究結果發現：於教學試驗之前，三組兒童的前測解題表現無差異，於教學試驗之後，實驗組解決體積問題的整體表現優於其他兩組，此現象亦呈顯在體積計算問題及體積概念理解問題的解題表現。晤談分析結果發現：實驗組兒童對於體積意義與長方體體積公式概念，能提出較豐富的內容說明，但是能完整地說明意義與公式概念之人次，實驗組與對照組人次皆不高。本研究對增進兒童理解體積測量概念與解決體積問題的能力，提出課程與教學相關的建議。

關鍵詞：三維空間幾何概念、體積公式、體積測量

壹、前言

小學數學的體積測量概念包含：立方體的三維空間概念、測量技能與體積量的計數，理解體積公式——長方體體積公式「長×寬×高」亦為高年級學童需發展的基本能力(參見能力指標S-3-05及N-3-20；教育部，2010，頁29)。然而，先前的研究發現兒童能以直觀比較體積的大小(例如：林仁得、謝祥宏、陳文典，1993)，但對於描述體積意義、說明長方體內部的行列矩陣與層的結構，多數兒童仍有困難(Wilson & Osborne, 1988)。而且，兒童偏好套用公式解題，誤以為體積即「三個長度量的乘積」(譚寧君，1997)。由此可見，兒童能記憶「長×寬×高」或將數字套入公式運算數字答案，但上述表現並不表示完全等同理解體積概念與公式概念。在缺乏概念理解的情況下，單純的記憶測量公式，將無法靈活應用公式解決問題(Huang & Witz, 2013)。

學習具有幾何量性質的測量，幾何的空間概念、測量與數的運算技能，三者皆為重要成分(Owens & Outhred, 2006)，尤其對於測量公式的理解，三者不得偏廢(黃幸美，2009)。然而，檢視多年來數學教科書的體積教材，可發現：體積測量單元偏重使用數字與體積公式解題，淡化討論長方體(正方體)的幾何特徵、三維空間概念及其與體積測量的

*通訊作者：黃幸美
(投稿日期：民國102年11月13日，修訂日期：民國103年3月28日，接受日期：民國103年5月18日)

airiti

關連等概念。同時，教科書亦常將長方體(正方體)的幾何特徵教材與體積測量，安排為個別獨立的單元，兩者缺乏統整。此外，國內多數小學教師的數學教學，傾向以教科書提供的問題為主要教材(Askew, Hodgen, Hossain, & Bretscher, 2010)。當數學教學倚重教科書，而教科書的體積單元缺乏統整三維空間幾何概念且偏重體積量計數與運算練習時，可能導致兒童的學習傾向記憶公式但缺乏概念理解。

在課程與教學的研究方面，有學者將體積測量羅列為小學數學題材中諸多測量種類的一種，簡述其概念性質(例如：Carthcart, Pothier, Vance, & Bezuk, 2003; Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001)；或有研究檢測兒童解決體積問題的能力(例如：高敬文，1989)，但是以兒童的數學認知與思考為基礎，設計且試驗能導引概念理解的體積教材，尚猶不足。在體積公式教學方面，學者們論述體積概念結構、長方體公式的意義與教學建議(例如：Lehrer, 2003; Van de Walle, 2004)，但是設計導向體積公式概念理解的課程並探討其成效之研究，尚不多見。

在測量教學方面，導引式的討論教學方法，重視教師使用問答討論的方式，提供問題並鼓勵學生使用語言與教具操作以思考解題，並討論如何解題(黃幸美，2009)。黃幸美同時建議在提供實測操作與解題的情境下，導引式的討論教法有助學生學習面積測量概念；但其對學習體積測量的助益如何，有待檢視。

有視於體積測量為數學課程的重要主題，發展有效的課程與教學以提升兒童的體積測量問題解決能力，有其必要性。本研究設計整合三維空間幾何與體積測量的試驗教材，應用電腦科技播放教材與導引式討論教學，探討試驗教材對兒童認知體積測量、體積公式與解決體積問題能力的影響。同時，使用晤談方法，以進一步瞭解兒童對體積測量與公式概念的認知。研究問題包含兩方面：

一、不同的體積測量試驗教材，對兒童解決體積問題能力的影響為何？

二、接受不同試驗教材之兒童，其對於體積意義、體積測量方法，以及長方體體積公式概念的認知為何？

貳、理論架構

一、體積測量的數學概念

體積乃指物質所佔空間的大小，物體的體積、液體、空氣皆可以體積概念來描述其數量(國家教育研究院，2006)。體積測量在小學數學課程設計的考量，包含兩方面(教育部，1993，2010)：(一)體積測量的學習需建基於長度與面積概念，教材多被安排於具有長度與面積學習經驗的五年級，而且先從體積概念與長方體(正方體)的體積測量入門，繼而容積、容量與液量測量。(二)由於空氣容易受壓力影響而改變其體積，概念較複雜，非為小學的數學教材範圍。因此，本研究探討的焦點為五年級的體積教材，包含體積概念、體積測量及長方體(正方體)的體積公式導引；不包含容積、容量與液量測量。而且，後文所指的公式，乃指長方體(正方體)的體積公式「長(一邊) ×寬(一邊) ×高(一邊)」。

體積為一種長、寬、高的函數，也是大於0的正值數值，使用單位作測量時，某物體乃被單位等分割成部分或以此已知的單位量重複累積而成，故體積的運算亦可表示為——所分割成的單位體積之總和(林慈容、劉祥通，2000)。描述長方體(正方體)所佔的空間大小時，測量知識與數的運算(例如：體積的立方單位數量之計數)為必要知能，而

airiti

認知長方體(正方體)的特徵及其三維空間概念，與測量者確認體積單位與待測物體的空間範圍、監控測量結果描述的正確性，息息相關。

小學數學的體積測量性質介紹，乃利用離散量的性質、使用形狀與大小相同的立體單位，堆疊成一個立體物(國家教育研究院，2006)，然後計數行、列與層數所組合的立體單位之數量(朱建正，2000)。使用相同大小的立體單位堆疊組成立體產物，也表徵此立體產物的內部空間被立體單位所切割／組合(Battista, 2003)。上述的概念，學生可應用先前的面積單位覆蓋、填滿平面區域的經驗，將立方單位填滿一個立體容器的空間(Hart, 1989; Wilson & Osborne, 1988)，計數長邊、寬邊所組合的單位數量，以及垂直於該底層的高度之單位數量，進而歸納「長×寬×高」(或「底面積×高」)的規則(Van de Walle, 2004)。

藉堆疊活動以建構體積公式的活動，學習者需掌握的核心概念為立方體內部的行列矩陣與層的結構(Battista, 2003)。此理解包含三項重要的認知處理：(一)認知長方體的長邊是由m個1立方公分積木組成，其長度被分割成m個1公分；寬邊亦由1立方公分積木組成，其長度被分割成n個1公分。(二)認知一個底面的結構——「一排有m個1立方公分積木，有n排」或「一列有n個1立方公分積木，有m列」，如此的一面排有m × n個積木。(三)瞭解鉛直的向度，高邊亦由h個1立方公分積木組成，其長度被分割成h個1公分。當一層高為1公分時，高有h層。因此，整個長方體即由m × n × h個積木組合而成。由此可見，認知立體物的三維空間概念為學習體積公式的重要成分。

同時，體積亦具有連續量的性質，但其意義比較抽象，約為11 ~ 12歲兒童方能瞭解(Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960／李惠貞譯，1981)。本試驗教材乃利用離散量的性質，使用立方單位的分割與組合，介紹體積測量概念。

二、三維空間幾何概念對學習體積測量公式的重要性

幾何的本質包含圖形(具體事物的圖形表徵)、形體的空間概念及邏輯推理(Clements, 2003; Duval, 1995)。Duval認為個體投入幾何活動時，幾何的認知歷程包含：(一)透過具體物與圖形的觀察，認知圖形表徵；(二)藉助操作的歷程(例如：使用積木堆疊與組合、繪圖)，將操作經驗、觀察結果與表徵做連結；(三)使用歸納或演繹推理或統合前述的觀察與操作經驗，以語言或文字符號說明定義與原理原則。Duval認為上述三項歷程可能獨立運作，但是多為兩個或全部歷程交互運作。

有視於幾何認知的性質，數學教育學者強調幾何教學應：多提供學生觀察、組合、堆疊操作與作圖的機會，進而能將物理性的操作抽象化，建構心理性的操作與反思，以促進發展幾何的空間概念與相關的推理思考(Battista, 1999, 2003; Owens & Outhred, 2006)。上述的幾何操作與空間探索活動，對於兒童建構三維空間的心像，尤具助益性(張碧芝、吳昭容，2009；Cooper, 1990)。

由於體積公式包含抽象的幾何原理之推理(教育部，2010)，三維空間的心像與幾何原理的建構，關係密切(Battista, 2003; Clements, 2003)。先前研究(例如：黃幸美，2009)發現，提供二維的幾何概念統合面積測量課程，可以幫助兒童理解面積測量概念及解決面積問題。據此推論，提供統合幾何探索的體積測量課程——透過觀察、操作實物及其二維圖形表徵，建構立方體的三維空間概念，解析長方體

airiti

(正方體)內部由立方單位所填滿、組成的行、列、層結構(或由立方單位組成的長方體所佔有的空間)，推導出長方體即由$m \times n \times h$個積木組合而成，預期可助益兒童認知體積測量與長方體(正方體)體積公式概念。

三、實物操作及電腦的動態幾何表徵對學習體積測量的意義

有關實物觀察、操作與應用電腦軟體對於數學學習的意義，相關的研究指出：若教學者針對待學習的概念性質，選用適當的實物與操作活動(例如：Lehrer, 2003; Olkun, 2003)或電腦輔助軟體(Huang & Crockett, 2008; Van der Meij & de Jong, 2006)、Cabri 3D動態幾何軟體(Cabrilog Company, 2009; Hazzan & Goldenberg, 1997)，對於數學概念的學習具有正向助益效果。以下分別析論實物操作與電腦軟體應用於體積測量教學的意義。

(一)實物觀察與操作對學習體積測量概念的意義

實物模型提供視覺觀察與觸感操作，有助兒童認識數概念與運算(Van de Walle, 2004)，它也提供表徵空間的訊息，可以促進幾何概念的建構(Olkun, 2003)。因此，多有學者建議使用適當的具體實物觀察與操作，輔助幾何與測量概念的學習(Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008)。

使用實物模型與堆疊操作對體積測量學習的意義，可從三方面作闡述。1.透過視覺觀察與觸摸，可強化對立方體實體的知覺與建立實體與二維立體物表徵的對應，而且，此歷程也是建構幾何認知(Clements, 2003; Duval, 1995)。2.透過堆疊組合單位立方體，建構體積單位的加法性概念及其在立方體呈現的切割情形(國家教育研究院，2006)。3.統合圖示表徵與實物操作，對應與連結不同表徵之間的關係(例如：對應一維、二維的圖示與立方體實物、覺知立方體所佔空間的大小；Clements, 2003)，有助應用長度、面積的概念，建構「邊與邊長」、「面與面積」與立方體及其體積的關係。

(二)電腦的動態幾何表徵對學習體積測量概念的意義

自1990年代以來，應用電腦的動態幾何軟體，幫助學生學習幾何原理的研究多受學者們關注，例如：Hazzan與Goldenberg (1997)使用Cabri 3D動態幾何軟體展示幾何圖形的平移、旋轉與翻轉，結合深度訪談三位數學成就優異的大學生，瞭解他們如何藉助動態幾何軟體圖示表徵，建構幾何原理與詮釋函數概念。以下針對近年來將電腦動態幾何表徵應用於體積測量教學的研究，論述其對兒童學習體積概念的意義。

在探討釐清兒童對於體積量測的迷思方面，王學武與陳偉文(2008)建構體積教學網站，整合Autodesk Maya、Flash及Virtools製作體積課程，對六年級兒童(N = 64)施行教學實驗，研究結果發現：接受教學網站的體積課程教學的實驗組較容易建立正確的體積概念，其學習效果優於接受傳統體積教學的控制組，上述效果展現在量測與保留、複合圖形的測量，以及澄清體積與重量、材質、容積之間的混淆概念。此研究顯示應用電腦軟體於體積教學，改善兒童的體積學習與澄清體積相關的概念；但此研究關注試驗課程對已學過體積公式的兒童之概念修正，未探討動態幾何表徵對初學體積測量的初學者理解體積公式概念之影響。

在體積測量概念教學方面，Huang與Crockett (2008)使用電腦播放軟體PowerPoint®設計體積教材，以五年級四個班為實驗組進行教學試驗，對照組則接受教科書體積單元

airiti

教學(無使用電腦軟體應用教材)，比較有、無使用電腦輔助工具對兒童(N = 243)學習體積測量的影響。此研究發現：是否接受電腦輔助的體積教材之兒童，在應用體積公式解決類似教科書體積問題類型的體積問題，解題表現無顯著差異。相繼地，謝明欣與黃幸美(2013)修改Huang與Crockett的教材，搭配Cabri 3D軟體設計體積測量課程，對四年級兒童(N = 83)施行教學試驗，比較有、無使用電腦軟體應用體積課程的教學成效。此研究發現：接受電腦軟體應用體積課程的兒童在解決體積問題的表現，優於無使用電腦軟體應用的體積課程(類似於教科書的體積單元教材)。

綜合上述的研究，顯示結合電腦Flash及Cabri 3D軟體，動態地呈現幾何圖形表徵，為設計電腦播放體積教材的可行途徑，但是結合電腦軟體於體積測量教學的效果，可能因研究材料與評量問題差異，而呈現不一致的結果。值得注意的是，電腦的動態幾何表徵雖有助於建構幾何性質與概念歸納，但是所播放的三維立體圖猶為二維的表徵圖，欲建構立體物的三維空間感，仍需藉觸摸與操作具體實物，輔助學習。

四、數學教科書的體積教材分析

分析不同版本教科書的體積單元，可發現於介紹長方體體積公式時，傾向於將幾何的形體特徵(例如：長方體[正方體]的性質)與體積測量教材，分別設計為不同的單元以獨立教授。教材安排為先讓兒童堆疊單位立體物，繼而將累積的過程抽象化，以建立「大立體物乃由數個相同大小的小物件無縫隙地堆疊組合而成」的概念，然後於五年級介紹公式(例如：南一書局，2009；康軒文教事業，2009；翰林出版社，2009)。於學習活動中，若學生疏於比較平面與立體測量的差異，且對於使用體積單位堆疊成長方體(正方體)所形成一層的長、寬、高之意義及其所潛存的行列與層結構討論不足，皆可能影響對「長×寬×高」公式概念的瞭解。

此外，教科書的體積單元未整合形體性質與體積測量概念之現象，為假設學生能主動統合先前所學的幾何形體概念與立方體體積測量概念。但是根據先前研究(例如：譚寧君，1997；Battista & Clements, 1996)及教師的教學觀察(吳欣悅，2010年12月9日[1]；謝明欣，2009年12月17日[2]；Huang & Crockett, 2008)，部分高年級學生仍難以充分掌握三維物體所占空間的概念，其解讀立體物的圖形表徵，不甚理想。據此推論，體積測量教材缺乏統整三維空間幾何概念，可能為影響兒童對於體積測量概念理解不足的因素。

五、導引式的討論教學之理念

導引式的討論教學(guided question-asking and-answering instruction)核心理念，乃綜合黃幸美(2009)探討教師提供數學問答討論教學以發展學童測量概念的正向效果，以及Battista (2003)的建議——教師提供具有啟發認知學習的測量情境與提問問題，鼓勵學生探索與討論解決問題、使用語言說明想法，助益學生的數學概念理解。上述強調問題解決歷程中的師生討論互動與學生的概念理解，也符合當前的數學課程與教學目標(教育部，2010；National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)。

---

[1] 吳欣悅(2010年12月9日)。體積教學的個人晤談與錄音。未發表之原始資料。

[2] 謝明欣(2009年12月17日)。體積教學的個人晤談與錄音。未發表之原始資料。

airiti

欲提升兒童的體積概念理解與問題解決能力，必須從有效的教學著手。因此，本研究所提供的體積測量試驗教材皆使用導引式的討論教學——在教師提供認知導引情境下，提問問題，鼓勵學生透過觀察與操作歷程，作解題探索、反思與討論解題想法的正確性。

本研究根據文獻探討，提出研究假設：接受不同體積測量課程的兒童，其解決體積問題的表現有差異。

(一)接受三維空間幾何概念與體積測量整合課程的實驗組，其解題表現優於接受一般體積測量課程的對照組與接受非體積與非幾何課程的控制組。

(二)接受一般體積測量課程的對照組，其解題表現優於接受非體積與非幾何課程的控制組。

參、研究設計

本研究分析體積測量與體積公式所包含的核心概念，設計兩套試驗教材：一、三維空間幾何概念與體積測量整合課程，簡稱：實驗課程(實驗組)；二、體積測量課程，簡稱：對照課程(對照組)，此課程類似於教科書的體積單元內容，教材不強調三維空間幾何概念。同時，為瞭解兩份教材對兒童解決體積問題能力的影響，本研究將上述兩組試驗課程與一個控制組(使用非幾何且非體積測量的教科書單元)進行比較。繼而採用準實驗法，將實驗組、對照組及控制組，以隨機分派方式分派到三個班級施行教學。在教學時間與教學方法皆相同的情況下，比較三組兒童於解決體積問題之前測與後測的解題表現。

此外，從接受試驗教材的兩個班級，隨機抽取30位兒童參加一對一個別晤談，以分析兒童對體積概念、體積測量與長方體公式的認知情形。

一、研究對象

研究對象取自臺北市一所公立小學五年級三個班級共87位兒童(N = 87，男生40人；女生47人)，年齡為10.69歲(M = 128.30月，SD = 3.55)。此三個班級皆為常態編班，三班兒童於上學期的數學總成績無顯著差異F (2, 84) = 0.42, p = .66。繼而，隨機分派三個班級到實驗組(n = 29)、對照組(n = 28)及控制組(n = 30)。此控制組乃接受教科書單元——分數與小數的計算。所有兒童在參與教學試驗之前，已學過長度與面積測量、正方體與長方體及1立方公分的意義，但是尚未接受過體積測量的概念及體積公式之正式教學。

在晤談兒童的選取方面，乃從接受試驗教材班級，各班依兒童的上學期數學學業總成績，分成低、中、高分組，並從三個分數組群各隨機抽取4 ~ 6名兒童參加個別晤談。高分組為總成績分數排於全班前27%者，低分組為分數排於全班後27%者，中分組則介於前兩者之間。依上述抽取方法，實驗組與對照組參加晤談的兒童分別為14名與16名。

二、研究工具

(一)試驗教材設計的理論基礎、取材來源、數學概念及教學方式

實驗課程、對照課程及前、後測評量工具，乃修改自謝明欣與黃幸美(2013)的研究工具，使其更切合五年級兒童的體積概念學習。教學試驗時，兩組試驗課程皆使用電腦PowerPoint®簡報軟體播放教學問題、展示實物(例如：長方體盒[14.5 × 5 × 19 (cm^3)]及積木)，提供每位兒童教學問題題本、1立方公分的白色積木一包(50個)及膠片空盒[4 × 4 ×

airiti

2 (cm^3)]，以供堆疊立方體。試驗教材的設計理念、教學問題所包含的數學概念，以及教學方式分別說明如下。

1.體積概念的層次與課程設計

體積測量的知識技能，依其知識性質與學習者所需的認知複雜程度做區分，包含三種不同層次(林仁得等，1993；NCTM, 2006)。

(1)基礎層次：以感官、操作與觀察，認識體積的意義與立體物的特性、物體體積大小比較、使用測量單位與正確語彙(例如：單位)，從測量歷程陳述測量結果，例如：觸摸物體的表面範圍或內部，指出其空間的量。

(2)進階層次：瞭解體積的概念(意義、特質)、認識與選用適當單位(個別單位與公制單位)或可替代性工具做測量(包含堆疊立方單位需緊密相鄰，無空隙且無重疊)、發展公式、能運算單位轉換及估測。

(3)高階層次：理解體積測量的概念結構與測量系統，能推理相關的測量關係，發展比例概念，以及從間接測量導引出來的概念。此層次約為小學高年級～中學學生(6 ~ 8年級)之教材內容。

本試驗教材的設計理念乃根據理論架構、數學課程標準與綱要(教育部，1993，2010)所闡述的五年級體積課程與教學建議，依其概念複雜度，由基礎而進階層次安排。教材關注體積測量概念與公式之導引，包含基礎與進階層次的內容，但不包含體積單位換算、估測及高階層次的概念。

2.體積的數學概念結構

實驗課程與對照課程皆提供堆疊立方體的活動，期以連結兒童對於長方體、1立方公分、長度與面積測量的先備知識，學習使用體積單位測量與報讀測量結果，並導出體積公式。試驗教材包含的數學概念成分包含以下七項。

(1)體積的意義與測量單位(A)：介紹體積意義、個別單位與標準化單位(1立方公分的意義)。

(2)體積的比較(B)：立方體實物與圖的直觀比較、直接比較與間接比較。

(3)長方體(正方體)的特徵與三維空間概念(C)。

(4)長方體(正方體)的長、寬、高邊辨識與測量(D)：辨識與測量長方體三維長度。

(5)體積單位的點數與加法性(E)：使用體積單位堆疊與複製一個全等的物件(或填滿空間)，並計數單位數量。

(6)使用1立方公分堆疊形成的行列矩陣與層的結構(F)。

(7)長方體(正方體)體積公式、乘法運算紀錄與運用(G)。

兩套試驗教材的教學時間皆包含五節課，每節課約40 ~ 45分鐘。各課程的內容及其所分布的教學節次，呈如圖1所示；各課程的教學詳案例隅，呈如附錄一。各課程的特質、內容與所包含的數學概念，分別陳述如下。

(1)實驗課程：此課程包含24個教學問題題組，強調操作與展示體積單位堆疊組成長方體(正方體)的歷程，討論其所堆疊成一層的長、寬、高的意義、行列矩陣與層的結構，以及體積公

airiti

式。在展示長方體(正方體)的特徵、空間、堆疊歷程、一層(高度為1公分的長方體)等三維空間概念上，則使用Flash與Cabri軟體與PowerPoint®簡報軟體播放展示。教學問題所包含的數學概念為：A, B, C, D, E, F, G。

(2)對照課程：此課程包含26個教學問題題組，內容類似於一般教科書的體積單元，但是提供較多使用體積單位堆疊長方體的操作活動、體積計算與應用體積公式解題的討論。此課程雖包含堆疊操作活動、討論立方單位組成一層的長、寬、高的意義及其行列矩陣與層的結構，以及體積公式，但是行列矩陣與層的結構皆以靜態圖呈現，而且此類問題的題數與討論也較少。教學問題所包含的數學概念為：A, B, D, E, F, G。

呈如圖1所示，在教學時間與方法相同的情況下，兩份試驗教材的主要差異為：實驗課程包含以動態圖示表徵展示立方體的幾何特性、三維空間、討論體積單位堆疊過程與其所形成長方體的行列矩陣與層的概念；對照課程則包含較多的體積單位堆疊操作活動、體積計算與應用公式解題的討論。

(二)試驗教材的教學問題類型與解題所需的數學概念與技能

兩份試驗教材的教學問題皆包含兩大類型，各題型解題所需的數學知識與技能亦有差異，其例隅呈如圖2所示。圖2的第一題為體積運算問題；第二題為體積概念理解問題，包含數學想法判斷與說明理由。

1.體積的運算問題：指需使用數字與運算技能解決問題。此類型問題目的，在於透過使用數學的程序性知識，培養體積計算能力。題項包含數字填充題，以及使用運算程序與算式記錄體積測量結果的計算題項。

2.體積的概念理解問題：指需使用體積概念判斷解題陳述的正確性並說明想法。此類問題包含兩種次類型題項：

(1)數學想法判斷問題：指需判斷問題所陳述的解題想法或運算步驟的正確性。此類型問題目的，在於透過數學想法的判斷思考，培養兒童應用數學概念思辨解題陳述的正確性(黃幸美，2009)。

(2)數學想法說明問題：指需使用文字陳述數學想法。而且，當此類問題與數學判斷問題相互關連時，解題者需針對數學想法判斷，說明理由。數學判斷問題與想法說明問題皆提供解釋與溝通數學想法的機會，可以培養兒童的概念理解(黃幸美，2009；Hiebert & Carpenter, 1992)，教師亦可從學生的判斷與想法說明，瞭解學生的概念理解與問題解決的能力(Smith, Wiser, Anderson, & Krajcik, 2006)。

(三)試驗教學的施行

試驗教學乃由一位具有小學教師資格及代理教師教學經驗的碩士班研究生執行教學。為使實驗教師於教學時專注於學生的問答討論與教具操作觀察，兩套課程的教學問題播放，乃由一位研究助理操作電腦播放。

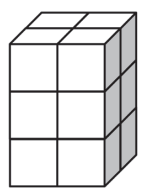
為使試驗教材與導引式討論教學順利施行，研究者於試驗教學施行前，訓練實驗教師與教材播放助理，包含研讀各試驗教材的教學問題與教案、演練導引式的討論解題教學。同時，教材播放者亦需熟悉教材與教學流程，演練教學問題的播放與電腦軟體的執行操作。

airiti

節次	實驗課程主要內容	對照課程主要內容	數學概念
第一節	1.長(正)方體的特徵 (1) 長(正)方體實物及其二維立體圖的辨識與分類 (2) 長(正)方體的構成要素、相鄰及相對的面	1.體積的意義與長(正)方體的直接與間接比較 (1) 長(正)方體實物及其二維立體圖的大小比較 (2) 測量1立方公分的各邊長、體積與記錄方式	1.實驗組：C 2.對照組：A, B
第二節	2.比較長(正)方體的特徵與體積的直接與間接比較 (1) 長方體與正方體特徵比較 (2) 長方體實物與二維立體圖的大小比較	2.體積的堆疊操作、計算與記錄 (1) 使用1立方公分積木堆疊與複製長／正方體 (2) 使用1立方公分積木實測體積與算式記錄 (3) 使用1立方公分積木堆疊成長方體、不規則立方體並計算體積 (4) 討論所堆疊之長方體長、寬、高及其長度、「層」的意義、立方單位的計數及記錄	1.實驗組： B, C 2.對照組：D, E, F
第三節	3.體積的意義與單位 (1) 使用體積個別單位與普遍單位堆疊與複製長(正)方體、立方單位的計數 (2) 1立方公分的意義 (3) 以靜態與動態的二維立體圖展示立方體佔有空間的量	3.體積公式與應用 (1) 展示二維立體圖，辨識長、寬、高與其長度、「行」、「列」、「層」的結構，導引長方體體積公式 (2) 應用體積公式解決體積問題	1.實驗組：A, C, E 2.對照組：D, F, G
第四節	4.體積的堆疊操作、計算與記錄 (1) 使用1立方公分積木堆疊長方體、辨識長、寬、高及其長度；討論「行」、「列」、「層」結構，導引長(/正)體體積公式 (2) 使用乘法紀錄長方體體積與計算	4.體積公式與應用 (1) 展示二維立體圖，辨識長、寬、高與其長度，導引正方體體積公式 (2) 應用體積公式解決體積問題	1.實驗組： D, E, F, G 2.對照組：D, G
第五節	5.體積公式與應用 (1) 討論長方體的「行」、「列」、「層」結構與公式 (2) 應用體積公式與解決體積問題	5.體積公式與應用 應用體積公式解決體積問題	1.實驗組： F, G 2.對照組： G

圖1：實驗課程與對照課程於各節次的主要內容及其所包含的數學概念

Q1.一個小立方體是1 cm^3。你們知道這個立方體的體積是多少立方公分嗎？請用有乘號的算式記下來。



Q2.有一個立方體，它的長邊為7公分，寬邊為5公分，高邊為4公分。婷婷說：「這個立方體的體積是7 + 5 = 12，12 × 4 = 48 (立方公分)。」你們同意她的算法嗎？為什麼？

圖2：體積計算問題與體積概念理解問題例隅

airiti

此外，為檢視實驗教師在實驗組與對照組的教學行為是否一致，於教學試驗實施時，由研究者與另一位受過教學觀察訓練的研究助理進行課室觀察，雙方分別記錄實驗教師是否依實驗課程與對照課程的教案，完成每個教學問題的教學討論；教學時的板書與投影設備使用、行間巡視，以及提供兒童解題鼓勵的方式是否一致。

(四)前測、後測與晤談問題

為瞭解兒童解決體積問題的能力，分別使用前、後測作評量，包含體積基本概念、測量與運算、數學想法判斷與說明之評量。依Smith等(2006)建議在測量概念與技能評量設計，評量問題類型應包含多元形式，例如：在紙筆評量上提供圖示，除了測量運算以外，要求解題者批判想法陳述的正確性與說明理由。因此，本研究評量問題的設計，一方面參考Smith等的建議及修改謝明欣與黃幸美(2013)的工具，增加數題數學想法判斷與概念說明問題，以達評量目的。同時，評量問題皆使用數字較小的整數，以避免大數字及複雜的計算干擾兒童的解題表現。

前、後測問題類型相似，也類似試驗教材的教學問題類型，施測時間各約為40分鐘。兩份評量各包含八個題組——三個題組的體積計算題(6題填充題項與2題運算題項)與五題概念理解問題(3組的數學判斷與說明問題及2題數學說明題項；參見附錄二)。前、後測各包含一題較單純的體積計算問題(參見附錄二Q4題組)，其題型與教科書或習作的體積運算問題相似，解題者可從附有格子的圖，測量與計數邊長及應用體積公式解題。

試驗教材與前、後測問題，乃經兩位任教高年級且具有研究所課程訓練的有經驗教師評閱其適合度，評閱結果顯示：教材問題適合發展與評量兒童的體積測量概念。在評量工具的信度分析上，將前、後測問題對新北市一所公立小學的一個五年級班級25位兒童施測，分析結果顯示：前、後測的平均數分別為15.98 (SD = 8.03)、14.46 (SD = 7.81)，複本信度為r = .79, p < .01。

為瞭解兒童對於體積意義、測量方法及體積公式概念的想法，本研究收集兒童的晤談資料。晤談進行時，晤談者提供1立方公分積木及一個3 × 4 × 2 (公分)的長方體積木，並全程錄音晤談內容。晤談問題包含以下三題項：1.「你知道體積的意思嗎？」(InQ1)；2.「你知道如何測量體積嗎？」(InQ2)；3.晤談者展示一個3 × 4 × 2 (公分)的長方體積木，並提問「有小朋友說：『測量這個立方體的體積可以使用公式「長×寬×高」或「底面積×高」來計算。』你同意他的說法嗎？為什麼？」(InQ3)。晤談此問題時，若受訪兒童未說明公式的意思，則再進一步提問：「請你說說看，體積公式『長×寬×高』的意思。」

同時，為鼓勵受訪兒童盡量表達其數學想法，晤談時，若兒童的回答過於簡短、語意不明確時，晤談者將重複兒童之前所回答的語詞，再詢問一次，但不提供任何答案。例如：「你說『一個東西的大小』，是什麼意思？」

三、資料收集

本研究程序包含前測、試驗教學、後測與個別晤談，四個階段約於三週完成。試驗教學主要安排於原班級日課表上的數學課進行。控制組的教學，則由原班的級任教師，進行分數與小數的計算單元之教學。晤談資料，乃收集自實驗組與對照組受訪兒童於晤談過程的回答，再將晤談資料轉成逐字稿。

airiti

四、資料分析

在分析兒童解決體積計算問題的表現方面，由於體積計算題猶如數學文字問題，評分方式乃參考黃幸美(2009)的多重計分方法，根據兒童的解題記錄、正確性與完整程度，給予不同分數。(一)體積計算問題的評分：此類問題在於評量兒童運用數字運算解決體積問題的能力。1.填充題項：根據數字答案的正確性評分，正確者為1分；不正確者為0分。2.計算問題：根據其算式紀錄與計算結果之正確性評分，滿分為5分，不完整解答者為4.5 ~ 2分(例如：算式與計算皆正確但答案遺漏單位，給4.5分；答案與單位皆正確但無算式紀錄，給3分；算式正確但計算不正確，給2分)；空白未答或算式、解答皆錯誤者，給0分。(二)數學批判問題的評分：正確判斷者給2分；不正確者給0分。(三)數學想法說明問題：根據其文字陳述的想法之正確性與完整性評分，解釋完整且正確者給2分；解釋不完整者給1分；空白與不正確者，給0分。

(一)量化資料的處理

量化資料處理包含前、後測的體積計算問題的解題得分、體積概念理解問題的解題得分，以及整體得分。體積計算總分，乃將前、後測的體積計算題得分加總，總分各為26分。體積概念理解分數，乃將前、後測的判斷問題與想法說明題得分加總，總分各為20分。在前、後測整體總分方面，則將上述兩類題型之總分合併，各為46分。

於後續的資料分析上，本研究將前測的分數作為共變數，進行ANCOVA分析。

(二)晤談資料處理

晤談資料的處理，乃依受訪兒童在晤談問題的口語說明內容做分類，各題的分類說明如下。

1.體積的意義(InQ1)：依說明內容的正確性與完整性作分類，並參考Huang與Witz (2013)分析兒童說明面積的意義之內容分析，分為以下四類。

(1)概念正確且完整：指正確且完整地說明體積的意義，能說明體積為一個立體物所佔的空間大小。

(2)測量的程序性方法：指出公式「長×寬×高」但無說明體積的意義，即描述體積測量的計算程序性知識而非體積意義。

(3)立方體的特徵與體積單位：描述立方體的邊或體積單位名稱，但無說明體積意義。例如：指出立方體的邊名或說出「立體」或「立方公分」，但無說明體積意義。

(4)錯誤概念：所說明的內容非正確的體積意義概念。

2.測量體積的方法(InQ2)：測量方法的說明分為以下四類。

(1)描述工具：指出使用尺或物件為工具，但無說明測量步驟或方法。例如：提出使用尺測量邊長或用小立方體堆疊，但無說明測量方法或步驟。

(2)使用公式：指出公式但無說明測量方法。

(3)使用工具及公式：指出使用尺(或物件)為工具，測量立方體的邊及使用公式測量體積。

(4)無效的測量方法：所說明的方法非正確測量體積的途徑。例如：將立方體的邊長相加。

3.長方體體積公式(InQ3)：公式概念的說明分為以下四類。

(1)概念正確且完整：說明以立方單位(例

airiti

如：1立方公分)排成長方體所組成的行列矩陣結構、長、寬各是由多少個立方單位組成，當一層的高為1公分時，一層的體積運算原則即以底面的長邊、寬邊所排出的1公分單位數量與高邊的1公分單位數量(層數)相乘，即為「長×寬×高」概念。

(2)部分說明概念：指出一層與高邊及底面積為「長×寬」，但未說明以立方單位所排列組成的行列矩陣及層的結構。

(3)使用數字套公式運算：使用長方體邊長與乘法運算結果做說明，但無其他說明。

(4)說明邊名與需相乘的邊數：指出長方體的長、寬、高邊，說明公式是三個邊相乘，但無說明行列矩陣及層的概念。

(5)錯誤概念：非正確地說明公式概念。例如：將立方體各面的面積相加。

晤談資料的分類處理，為依受訪兒童說明內容之多寡，採多重計次。在資料分類的程序上，兩位分析者個別依分類原則做編碼與分類，當有意見紛歧時，則相互討論，以達共識。在分類者內在信度分析方面，兩位分析者在三題晤談問題分類結果的一致性，使用Kappa分析。評分者內在信度Kappa分析結果分別為：體積的意義說明(InQ1)為 .93，p < .01；測量體積方法說明(InQ2)為 .86，p < .01；長方體體積公式說明(InQ3)為 .93，p < .01。

在檢視實驗教師於施行試驗教學所表現的教學行為是否符合各課程教案，兩位觀察員紀錄教師是否依各教案完成教學問題的教學討論、板書與投影設備使用、行間巡視，以及提供鼓勵方式等行為，兩位觀察員紀錄的多項教師行為符合與一致的程度達90%以上，惟在提供教具、板書與投影設備的項目上，受電腦軟體操作突發狀況的影響，教師教學符合教案的程度約為80%～87%，例如：實驗組教學中，因Cabri軟體運作發生障礙，有一個教學問題未成功展示動態展開圖形。

在前、後測各類問題的評分者內在信度分析方面，兩位評分者根據評分原則評分後，隨機抽取60份評分後的試卷，進行評分一致性分析。在體積計算問題與數學判斷問題方面，使用Pearson相關分析，其結果為 .98，p < .01；在數學想法說明問題方面，使用Kappa分析結果為 .92，p < .01。

肆、研究結果

一、不同的試驗課程對兒童體積問題解決表現的影響

三組兒童在前、後測的整體解題表現分數，呈如表1所示。為比較三組兒童於接受實驗教學之前的體積解題能力是否有差異，使用ANOVA分析前測分數。結果顯示：三組兒童的前測解題表現沒有差異，F (2, 86) = 0.64, p = .53。從表1可見，於接受實驗處理之前，三組兒童解決體積問題的能力相近。

在比較三組解決體積問題的整體表現方面，使用前測總分為共變項，以後測總分為依變項，進行ANCOVA分析。由迴歸係數同質性考驗結果，F (2, 81) = 0.51, p = .60，顯示以共變項對依變項作迴歸分析時，其斜率無顯著差異，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設。後續的共變數分析，結果顯示：於去除前測的影響後，三組於後測的整體表現具有顯著差異，F (2, 83) = 17.73, p < .01，組別變項的效果量(partial η^2)為 .30。經Fisher LSD (Least Significant Difference)事後比較，結果顯示：實驗組優於對照組及控制組。對照組的分數雖然高於控制組，但是差異未達顯著水準。

airiti

為進一步瞭解不同課程對兒童解決不同類型問題表現的影響，乃針對體積計算、概念理解問題，以及類似教科書(或習作)的體積計算問題，分別比較三組解題表現的差異。上述三類問題的分析，皆使用各類題型的前測分數為共變項，以後測分數分別為依變項進行ANCOVA分析。三組在前測各類題型的解題原始分數平均數、標準差，及後測各類題型的調整後平均數，呈如表2所示。

從表2可見，實驗組在後測的體積計算、

表1：三組的前、後測總分之平均數、標準差與後測的調整後平均數與比較

	人數 *n*	解題表現					Fisher LSD 事後比較
		前測		後測			
		M	*SD*	*M*	*SD*	Adj. *M*	
實驗組	29	22.67	9.72	32.64	8.45	31.89	
對照組	28	19.91	9.59	23.64	10.96	24.99	
控制組	30	22.47	11.37	22.13	11.28	21.54	
事後比較							
實驗組vs. 對照組							6.90**
實驗組vs. 控制組							10.35**
對照組vs. 控制組							3.45

** $p < .01$

表2：三組在前、後測的體積計算、概念理解與類似教科書的體積問題解題得分之平均數、標準差、後測的調整後平均數及比較

	人數 *n*	解題表現					Fisher LSD事後比較	
		前測		後測				
		M	*SD*	*M*	*SD*	Adj. *M*	體積計算	體積概念理解
體積計算問題								
實驗組	29	13.62	6.30	20.53	4.94	20.15		
對照組	28	12.59	6.19	15.02	7.74	15.32		
控制組	30	12.92	7.48	12.93	7.48	13.02		
體積概念理解問題實驗組	29	9.05	4.50	12.10	3.95	11.83		
對照組	28	7.32	4.20	8.63	4.34	9.51		
控制組	30	9.55	4.81	9.20	4.39	8.59		
事後比較								
實驗組vs. 對照組							4.83**	2.32**
實驗組vs. 控制組							7.13**	3.24**
對照組vs. 控制組							2.30	0.91
類似教科書的體積問題實驗組	29	5.57	2.74	6.93	1.98	6.76		
對照組	28	4.25	2.84	5.91	3.21	6.08		
控制組	30	4.90	2.85	5.20	3.04	5.20		

** $p < .01$

airiti

概念理解問題的解題得分，皆高於其他兩組。在比較體積計算問題的解題表現方面，結果顯示：迴歸係數同質性考驗結果，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設，F (2, 81) = 0.67, p = .51。後續的共變數分析結果顯示：於去除前測的影響後，三組的解題表現呈顯著差異，F (2, 83) = 14.38, p < .01，組別變項的效果量(partial η^2)為 .26。經Fisher LSD事後比較，結果為：實驗組優於對照組與控制組；對照組的分數雖略高於控制組，但差異未達顯著水準。

在比較體積概念理解的解題表現上，結果發現：迴歸係數同質性考驗結果，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設，F (2, 81) = 0.80, p = .45。共變數分析結果顯示：於去除前測的影響之後，三組的解題表現呈顯著差異，F (2, 83) = 9.14, p < .01，組別變項的效果量(partial η^2)為 .18。經Fisher LSD事後比較，發現實驗組優於對照組與控制組；對照組的分數雖高於控制組，但差異未達顯著水準。

比較三組處理類似教科書(或習作)的體積運算問題之解題表現，結果發現：迴歸係數同質性考驗符合共變數組內迴歸係數同質性的假設，F (2, 81) = 0.04, p = .96。後續的共變數分析結果顯示：於去除前測的影響後，三組的解題表現無顯著差異，F (2, 83) = 2.43, p = .09。此表示三組兒童在解決類於教科書(或習作)類型的體積計算問題之能力相近。

綜合上述量化分析結果：實驗組在解決體積問題的整體表現優於對照組及控制組，此現象也呈顯在體積計算與概念理解問題的解題表現；在解決類似教科書(或習作)題型的問題上，三組的解題表現無差異。

二、晤談資料的分析結果

實驗組與對照組受訪兒童在三題晤談問題的分類結果，呈如表3所示。從表3可發現：兩組兒童在說明體積意義、測量體積方法及體積公式概念的類別，具有相似與差異之處。以下分別陳述分析結果。

(一)在體積意義說明方面

從表3可見：兒童的說明包含四種類別——概念完整且正確、測量的程序方法、立方體的特徵與體積單位及錯誤概念。能完整且正確地說明概念的人次，對照組(5/16)比實驗組(3/14)略高；兩組皆有人次概念說明錯誤，對照組為3人次(3/16)，實驗組為2人次(2/14)。而且，兩組皆有較高人次以「測量的程序方法」(實驗組11次；對照組5次)、「立方體的特徵與體積單位」(實驗組13次；對照組9次)來說明體積意義，但是實驗組在此兩類的人次皆比對照組高。多數實驗組兒童認為體積的意義是「長×寬×高」，也提出立方體的特徵與體積單位「立方公分」。上述現象也呈現在對照組，但各類人次較低。例如：實驗組一位受訪兒童(E003)說明體積的意義——「體積就是一個三維的立體。就是把它……長乘以寬和乘以高。」由此可見，接受不同體積課程的兩組受訪兒童能正確且完整地說明體積意義者，人次不高(僅3 ~ 5人)；多數兒童認為體積意義為表徵運算體積方法(程序性知識)的體積公式。

在錯誤概念方面，兩組受訪兒童的迷失概念包含：混淆「體積」與「表面積」，以及難以正確指陳「面」與「體」。前者迷失概念的例隅可見之於一位對照組兒童(C021)的說明——「一個盒子裡面有幾個格子，數完以後就是它的體積，然後還要加上外面。」，此兒童瞭解一個盒子內部可裝的格子數量可以表示盒子的體積，但是尚需包含盒子圖的表面所呈顯的格子數量。後者的迷失概念例隅可見之於一位實驗組兒童(E021)

表3：受訪兒童對體積概念、測量方法及體積公式的說明類別與次數

晤談問題與說明類別	實驗組(n = 14) 次數	對照組(n = 16) 次數	總數
1. 體積概念說明(InQ1)			
(1)概念完整且正確	3	5	8
(2)測量的程序方法	11	5	16
(3)立方體的特徵與體積單位	13	9	22
(4)錯誤概念	2	3	5
2. 測量體積方法的說明(InQ2)			
(1)描述工具的使用	-	-	-
(2)使用公式	-	10	10
(3)使用工具與公式	14	6	20
(4)無效的測量方法	-	-	-
3. 長方體體積公式的說明(InQ3)			
(1)概念完整且正確	-	-	-
(2)部分概念說明	3	2	5
(3)使用數字套公式運算	3	9	12
(4)說明需相乘的邊名與邊數	11	6	17
(5)錯誤概念	-	-	-
(6)其他	-	1	1

註：對照組在InQ2「使用公式」類項的人次，包含1位只說明三個數相乘但未提三維的邊名。

的說明——「就是一個立體的正方形。……一個立體的，什麼形狀都可以，它整個全部加起來的面積。」及一位照組組兒童(C025)的說明——「體積是立體的，所以要測量他的長、寬和高。因為它要算出它有幾個立體面，就是，看有幾個立方體能排出來。」

(二)在測量體積方法說明方面

從表3可見：實驗組皆指出使用尺測量長方體邊長或小白積木堆疊長方體，以及使用公式測量體積(14/14)。相對地，對照組則有6人次兼提使用工具與公式(6/16)；10人次則僅回答使用公式但無其他說明(10/16)，其中包含1人次只說明三個數相乘但未提長、寬、高的名稱。例如：一位對照組受訪兒童(C014)說明——「量它的邊多長，然後把它乘起來。就是長×寬×高，把它長邊、寬邊、高邊乘一個多少公分，乘起來。」上述結果顯示：兩組受訪兒童多關注使用公式測量體積，但是實驗組能描述較多的測量方法，例如：使用尺或體積單位堆疊，其人次比對照組多。

此外，兩組皆無人次被歸類於「無效的測量方法」或「描述工具的使用」而無其他說明。此表示受訪兒童皆能從所提供的課程習得測量體積的方法，但說明內容有差異。

(三)在體積公式說明方面

在說明公式「底面積×高」與「長×寬×高」概念方面，兩組兒童皆同意兩公式的意義相同，其中兩組各有2名兒童於晤談初始時，對兩公式的意義判斷，猶豫不決，但經晤談者再展示積木並詢問「長×寬×高」的意思後，皆確定兩個公式具有相同的意義。

airiti

從表3可見：兩組皆無人次能完整且正確地說明公式概念，亦無錯誤概念的說明。能部分說明公式概念者，兩組人次皆不高，實驗組為3人次(3/14)；對照組為2人次(2/16)。提出部分說明公式概念的例隅，可見之於一位實驗組兒童(E033)說明——「因為底面積就這一塊，……然後這一塊乘以，乘以二，因為他有兩層。一個是先算這個，第一層的體積，再乘以高有幾個，幾公分，先乘長，然後寬和高，就已經算兩層了。」此兒童指出底面積、層與高，繼而陳述「乘法」運算，但是未說明立方單位在長方體底層的行列矩陣及表徵底面積的「長×寬」意義。

同時，實驗組有較多人次提出「需相乘的邊名與邊數」(6/14)，僅有3人次以「使用數字與公式運算結果」做說明(3/14)。前者的說明例隅可見之於一位實驗組兒童(E030)說明——「同意。因為他這樣子算的話，因為底面積跟那個長跟寬都一樣，所以，……只要再乘以高就可以。因為底面積也有長還有寬，然後如果我們沒有看到高的話，也是只有長還有寬。底面積是長乘寬。」此例隅顯示：兒童指出所相乘的邊名及公式，但未說明公式的概念內涵——立方單位在長方體組成的行列矩陣與層的意義。

相對的，對照組則有多人次以「使用數字與公式運算結果」說明公式(9/16)，次多者為說明「需相乘的邊名與邊數」(6/16)。前者的例隅可見之於一位對照組兒童(C003)說明——「同意。體積，長×寬×高是算體積的公式，然後一個面算它這個平方公分，它要算一個面，然後乘以高，12，乘以高等於24，兩個答案是一樣的。」此例隅顯示：兒童僅陳述運算體積的公式與計算程序，但缺乏說明公式的概念內涵。此外，對照組有1名兒童因只說出長、寬、高，但無其他說明，此說明被歸類於「其他」(1/16)。

伍、討論、結論與建議

一、討論

本研究設計不同的體積測量課程並應用電腦軟體播放以進行教學試驗，在導引式討論教學模式下，對兒童概念理解體積測量、公式與解決體積問題表現的影響。研究結果發現，在體積問題解決的整體表現上，接受三維空間幾何與體積測量整合課程的實驗組，其表現皆優於接受體積測量課程之對照組與接受非體積且非幾何課程的控制組。同時，對照組的整體表現雖然高於控制組，但是差異未達顯著。在不同類型問題解決表現比較上，實驗組於解決體積運算問題及概念理解問題類型的表現，皆優於其他兩組；對照組在前述兩類問題的解題表現略高於控制組，但是差異未達顯著水準。同時，在解決類似教科書(或習作)類型的體積運算問題上，三組的表現則無顯著差異。上述結果支持研究假設(一)在解決體積問題的整體表現上，實驗組優於對照組也優於控制組；但是研究假設(二)在解決體積問題的整體表現上對照組優於控制組，未受支持。

從晤談分析結果顯示：實驗組與對照組受訪兒童在對體積意義與體積公式概念說明上，存有部分相似現象；但在說明測量體積方法上，可顯見差異之處。(一)在說明體積意義上，兩組能正確且完整說明之人次皆不高，但是皆有較高人次以「立方體的特徵與體積單位」做說明。在說明體積公式概念上，兩組皆無人次能完整且正確地說明，亦無人次提出錯誤概念。(二)在說明測量體積方法上，實驗組能說明使用工具測量與公式；對照組則有多人次僅指出「使用公式」但無其他說明。在說明體積公式概念上，實驗組有較多人次提出「說明需相乘的邊名與邊

airiti

數」；對照組有較多人次「使用數字套公式運算」。

統整本研究的量化分析與晤談分析結果，後文將討論不同課程對兒童理解體積概念與解決體積問題能力的影響，並提出課程與教學建議。

(一)不同課程對兒童概念理解體積測量與解題表現的影響

在教學時間與教學模式相同的情況下，將三維空間幾何與體積測量整合的實驗課程，對提升兒童解決體積測量問題的整體表現具有顯著助益效果，此效果彰顯在體積計算問題、需概念理解以判斷解題陳述正確性及數學想法說明的問題解決。此結果類似於謝明欣與黃幸美(2013)研究結果，也支持Battista (2003)及Owens與Outhred (2006)的觀點，幾何知識與空間概念屬於幾何量測量的概念成分，體積測量的學習需整合三維空間的幾何概念。

同時，從晤談結果呈顯的差異現象，可見實驗組較多能針對所認知的體積公式，指出立方體三維的邊與使用乘法說明公式，以及說明長方體底面的長、寬邊及底層的高。上述的說明內容，包含對立方體的認識及三維空間概念。相較於對照組偏好直述公式與使用數字說明公式，實驗組對體積測量與公式概念持有較豐富的理解，而提供較多的測量過程、將公式「長×寬×高」(或「底面積×高」)對應長方體的邊，說明公式概念；少有直接使用數字套公式計算結果說明公式。上述的兩組差異現象，呼應量化分析結果，除了說明不同課程的試驗效果，也顯示三維空間幾何概念對兒童學習體積測量與公式概念的重要性。

本研究的實驗課程整合體積測量概念、長方體(正方體)的特徵與三維空間概念，藉助積木堆疊活動與幾何動態表徵，導引兒童觀察與建構體積單位堆疊組成的行列矩陣與層的結構，以介紹體積公式。上述課程概念要素的結合與教學導引之設計，乃考量先前文獻所指陳的兒童在體積測量的迷失概念(例如：譚寧君，1997)，以及教師於教學現場所觀察到的學生學習困難 ——難以瞭解體積公式為何關乎三維邊長的乘積，同時，參考相關文獻之論述(例如：Battista, 2003; Owen & Outhred, 2006)，形成課程設計之理念——長方體體積測量概念與公式之學習，需植基於認知立方體性質與其三維空間概念及量的測量技能之結合。而且，體積公式所隱含的邊長、邊長測量與行列矩陣、層的結構關係，相當複雜且抽象，兒童需結合體積單位堆疊操作輔以動態幾何軟體展現圖示，觀察實物堆疊後的組合體與行列矩陣與層的結構，同時，在教師導引討論的歷程中，使用語言指出立方體特徵、測量立方體體積的方法與歷程。在結合圖形表徵、立方體模型、操作與語言表達的學習情境下，兒童投入探索幾何形體的特質與空間概念，觀察三維物體所佔空間及其與體積測量的關係，藉此認知推理長方體體積公式。誠如Duval (1995)及Clements (2003)的觀點，藉助觀察、操作實物模型，助益形成幾何圖像表徵與心像。幾何心像、歸納與推理的運作，有助兒童對體積測量概念之建構(張碧芝、吳昭容，2009；Cooper, 1990)。此助益效果可從實驗組在解決體積問題的整體表現優於對照組之表現，以及兩組兒童對體積測量方法的晤談結果之差異窺知。

相對地，對照組所接受的體積測量課程，無整合三維空間幾何概念。於本研究的教學歷程，兒童可從立方單位堆疊立方體與

airiti

體積測量的解題討論，習得體積測量技能與公式，以及處理較單純的體積運算問題，但其學習也傾向關注公式或使用數字計算體積。當體積測量課程缺乏三維空間幾何概念成分，此匱乏將導致兒童建構立方體三維空間的心像與推理受限，也限制其解決體積問題能力的提升程度。

本研究實驗課程強調三維空間認知與體積測量學習結合，其與記憶公式、套公式運算的學習迥異。此課程對兒童解決體積問題的助益，尤其彰顯在需要較高層次數學思考、判斷與想法說明的問題情境，此助益性可從三組兒童解決不同類型問題表現的比較結果窺知。以下針對三組兒童在不同類型問題解決表現差異，提出討論。

1.概念理解為解決具較高層次數學思考需求問題之基礎：本研究的評量工具，除了體積計算問題，尚包含數學想法判斷與說明問題。解題者需對體積測量持有概念性的理解，方能連結長度、面積與體積概念與運算技能，判斷所陳述的解題想法之正確性，並說明判斷的理由。幾何量的測量與幾何概念關係密切(Owens & Outhred, 2006)，實驗課程整合三維空間幾何概念與體積測量，在測量立體物空間大小學習歷程上，三維空間幾何概念認知提供推理思考輔助(Clements, 2003)，裨益對體積測量概念的理解。

2.解決較單純的體積計算問題之技能：本研究的評量問題多提供圖示，以幫助解題。解決較單純的體積計算問題(例如：前、後測的類似教科書或習作之體積問題)，解題者可從方格子圖示，計數長方體各邊的格子數，套用體積公式計算體積。相較於批判數學想法與說明理由，解決此類問題需要簡單的計數格子或應用公式計算，其所需的數學思考複雜程度也較低(Hiebert & Carpenter, 1992)。未接受體積課程的兒童，亦可應用先前學過的計數格子與加法的策略，完成解題。因此，對照組與控制組皆能表現與實驗組相當的能力，解決較單純的體積計算問題。

另一方面，比較對照組與控制組的整體表現、解決體積計算問題、概念理解問題及類似教科書類型的體積計算問題表現，對照組在上述的解題表現皆未顯著優於控制組。造成此結果，可能由於本研究的體積評量問題性質所導致。本研究的體積評量問題雖然包含多種形式的題項，但是呈如前文所述，評量問題多提供附有格子的二維立體圖，解題者若能提取先前學過的長方體、長度與面積測量知識，辨認長方體的三維與使用格子數算邊長，亦能解決部分問題。同時，此評量用以檢視體積基本概念的數學想法說明問題，兒童亦可提取先前的測量知識與技能解題。例如：前、後測的說明體積單位(1立方公分)問題，以及面積與體積測量的想法等問題，皆為兒童先前學過的概念，控制組亦可應用先前所學的測量知識與技能解題。當對照組對體積測量概念理解不充足時，其解題表現未必顯著優於控制組。

此外，有關對照組與控制組的解題表現無顯著差異的現象，此不同於謝明欣與黃幸美(2013)對四年級兒童分析的結果。此不一致的現象，除了可能受上述評量性質影響以外，亦可能源自於兩份研究的受試對象之數學學習經驗不同。相較於四年級兒童，五年級兒童因數學學習的時間較長，其在長方體、長度與面積測量技能的學習與測量經驗也比四年級兒童豐富，能提取以用於解題的先備知識與技能也較多。就控制組解決體積問題的能力而言，五年級兒童可能較四年級

airiti

兒童善於應用其先前的測量知能解題，在體積評量上展現部分解題能力，表現得與對照組相近。

為達檢測兒童對體積意義的認識之目的，本研究評量工具包含體積基本概念的想法說明問題，解題者可應用先前學過的知識技能解題，但未包含難度略高的製作問題——要求兒童製作一個定量體積的長方體並說明為什麼此製作符合所要求的體積(Smith et al., 2006)，例如：提供數個1立方公分單位積木，要求兒童製作一個定量體積量的立方體，並說明為什麼所製作的產品符合既定的體積量。未來的研究，建議可將定量體積的立方體製作或繪圖問題納入評量工具，從更多元的題型檢測兒童的體積問題解決能力，以進一步探討不同課程的影響。

二、結論與建議

體積為幾何量的一種(Owens & Outhred, 2006)。三維空間的幾何概念對兒童學習體積測量與公式概念，具有輔助推理的角色。長度與面積概念為建構體積概念的基礎，三維空間的幾何概念為幫助兒童理解體積測量公式不可或缺的要素。本研究結論也間接呼應黃幸美(2009)的建議，面積與體積測量乃與二維、三維空間的幾何概念密切相關，此兩領域的教學皆需整合相關的幾何概念。

本研究的實驗課程對增進兒童的體積問題解決能力具有幫助，但是接受實驗課程的兒童能正確且完整說明體積意義之人次偏低，而且亦有少數人次持有錯誤概念，此現象雖然間接呼應Huang與Witz (2013)分析兒童說明面積意義之結果；然而，兒童以測量體積的程序方法(公式)或立體物的特徵，描述體積意義，顯示其對體積意義的認識不足，甚或缺乏正確認識。同時，實驗組兒童偏向以「說明需相乘的邊名與邊數」說明公式概念，但是兩組皆未有人次能完整地陳述公式概念，其可能由於此概念包含立方單位的堆疊、長度、面積與層等多項概念，內容較複雜，兒童在使用語言描述的表現不足；但此現象也顯示實驗課程在提升兒童使用語言說明公式概念上的能力，需再強化。教學者可配合教學問題，提醒兒童注意體積的意義，例如：於比較立方體大小時，再討論物體所佔空間大小所指為何、比較的標的為何，以強化兒童對體積意義與性質的認識。教學者於導引歸納體積公式時，可以再提醒兒童注意邊長與三維空間內的行列矩陣與底面積「長×寬」的關係，繼而討論層的結構與高的關係。未來的研究，可依上述建議補充實驗課程，再進一步檢視其教學效果。

本研究為使教學進行順暢，於施行實驗課程與對照課程教學時，皆由一位助理協助播放教學投影片及操作電腦軟體。考量當前小學教室的電化設備裝置，電腦與播放螢幕多分置於教室的前、後兩方，教師一人難以同時掌控電腦播放與教學討論，此為使用電腦軟體教學時常見的困難。未來在推廣本試驗教材時，建議教師嘗試協同教學，使教學與電腦軟體操作、投影播放有效率地配合進行。

誌謝

本研究為科技部補助專案研究計畫(NSC 100-2511-S-133-006-MY2)之部分研究成果，特此誌謝，但本文之言論不代表科技部。同時，作者感謝鄭琪臻、林婉婷、吳雯婷、謝明欣老師在研究過程的協助，也感謝參與研究學校之校長、參與班級之教師與與小朋友，以及臺北市立師範學院音樂系93級同學簡菁瑩、王錦屏、賴曉庭、莊惠淳、沈玫伶在電腦播放圖片上的繪製協助。

airiti

參考文獻

1. 王學武、陳偉文(2008)。支援國小體積教學之Web3D教學網站開發之研究。**國民教育**，**49**(1)，41-51。
2. 朱建正(2000)。小學量與實測教材課程解讀——從八十二年課程標準到九年一貫課程綱要。**翰林文教雜誌**，**16**，6-19。
3. 林仁得、謝祥宏、陳文典(1993)。國小學童對體積測量的認識。**師大學報**，**38**，269-281。
4. 林慈容、劉祥通(2000)。從單位量的觀點探討國小體積教學。**科學教育研究與發展季刊**，**21**，45-55。
5. 南一書局(2009)。**國民小學數學5下備課用書**。臺南市：作者。
6. 高敬文(1989)。我國國小學童測量概念發展之研究。**國立屏東師範學院初等教育研究**，**1**，183-219。
7. 國家教育研究院(2006)。**國小數學教材分析——體積和角度**。新北市：作者。
8. 康軒文教事業(2009)。**國民小學數學5上備課用書**。新北市：作者。
9. 張碧芝、吳昭容(2009)。影響六年級學生立方體計數表現的因素——空間定位與視覺化的角色。**教育心理學報**，**41**(1)，125-145。
10. 教育部(1993)。**國民小學課程標準**。臺北市：台捷。
11. 教育部(2010)。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**(3版)。臺北市：作者。
12. 黃幸美(2009)。整合二維空間幾何與面積概念的課程與教學試驗。**科學教育學刊**，**17**(6)，509-530。
13. 翰林出版社(2009)。**國民小學數學5下備課用書**。臺南市：作者。
14. 謝明欣、黃幸美(2013)。體積電子教材對四年級學童學習體積概念的影響。收錄於國家教育研究院(編著)，**2013中小學電子教科書發展趨勢學術研討會會議手冊**(頁91-99)。臺北市：國家教育研究院。
15. 譚寧君(1997)。面積與體積的教材分析。收錄於臺灣省國民學校教師研習會(編印)，**國民小學數學科新課程概說(中年級)——協助兒童認知發展的數學課程**(頁175-192)。新北市：國家教育研究院。
16. Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1981)。兒童的面積與體積概念(李惠貞譯)。**國教園地**，**2**，12-16。(原作出版於1960)
17. Askew, M., Hodgen, J., Hossain, S., & Bretscher, N. (2010). *Values and variables: Mathematics education in high-performing countries*. London: Nuffield Foundation. Retrieved October 30, 2010, from http://www.nuffieldfoundation.org
18. Battista, M. T. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry-based classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30* (4), 417-448.

airiti

19. Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 122-142). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
20. Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258-292.
21. Cabrilog Company. (2009). *About Cabrilog history*. Retrieved October 30, 2009, from http://www.Cabrilog.com
22. Carthcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2003). *Learning mathematics in elementary and middle school* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
23. Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
24. Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.
25. Cooper, L. A. (1990). Mental representation of three-dimensional objects in visual problem solving and recognition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *16*(6), 1097-1106.
26. Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin, Germany: Springer.
27. Hart, K. (1989). Volume of a cuboid. In K. Hart, D. Johnson, M. Brown, L. Dickson, & R. Clarkson (Eds.), *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching* (pp. 126-150). Windsor, UK: NFER-Nelson.
28. Hazzan, O., & Goldenberg, E. P. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*, 263-291.
29. Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
30. Huang, H.-M. E., & Crockett, M. D. (2008, March). *Promoting fifth-grade children's conceptual understanding of volume measurement: A curriculum and teaching experiment*. Paper presented at the AERA 2008 Annual Meeting. New York.
31. Huang, H.-M. E., & Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, *2* (1), 10-26.

airiti

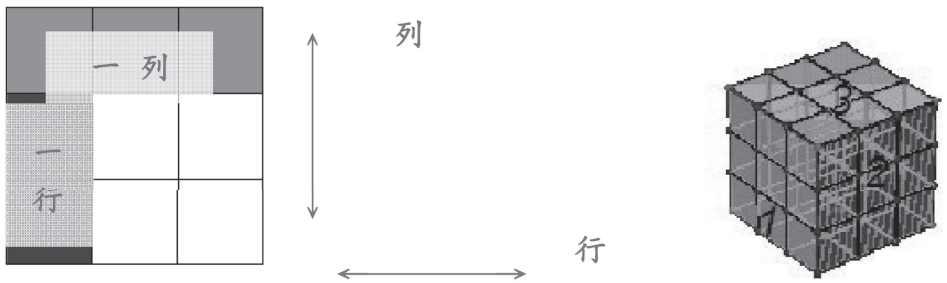
32. Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
33. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.
34. National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: The Author.
35. Olkun, S. (2003). Comparing computer versus concrete manipulatives in learning 2D geometry. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *22*(1), 43-56.
36. Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and feature* (pp. 83-115). Rotterdam, The Netherlands: Sense.
37. Smith, C. L., Wiser, M., Anderson, C. W., & Krajcik, J. (2006). Implications of research on children's learning for standards and assessments: A proposed learning progression for matter and the atomic-molecular theory. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, *14*(1-2), 1-98.
38. Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). Boston, MA: Pearson Education.
39. Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2008). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Rotterdam, The Netherlands: Sense.
40. Van der Meij, J., & de Jong, T. (2006). Supporting students' learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. *Learning and Instruction*, *16*, 199-212.
41. Wilson, P. S., & Osborne, A. (1988). Foundational ideas in teaching about measure. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grade K-8: Research based methods* (2nd ed., pp. 89-121). Newton, MA: Allyn & Bacon.

airiti

附錄一

一、實驗組教學問題與教案例隅

Q17. 你知道這個正方體的體積是多少立方公分嗎？



投影片號碼：37	教具：PPT#37
正確回答	不正確或無回答
兒童的回答： 1.「一個小積木是1立方公分，3 × 3 × 3 = 27(立方公分)。」 2.「一個小積木是1立方公分，一層有3 × 3 = 9(個)小積木，共三層，所以，總共是9 × 3 = 27(個)小積木，體積是27立方公分。」 3.如果兒童只回答「27個」或「27立方公分」，則實驗者需再提：「請你們告訴我，你知道這個正方體是怎麼堆成的嗎？」 **兒童的能力檢核：** 1.確定兒童能從觀察積木的堆疊，發現三維立體物(正方體)是由數個體積一樣大的立方單位(白色積木)堆疊而成。 2.確定兒童能觀察：正方體是使用長、寬、高都是1公分的立方單位組合成的，所組成的正方體長邊與寬邊都可排出3個立方單位，表示長邊是3公分，寬邊也是3公分。而且，一層的高為1公分，一層的體積為3 × 3 × 1(cm^3)。而且，此正方體是由三層的3 × 3 × 1(cm^3)組合而成，表示此正方體的長是3公分，寬邊是3公分，高也是3公分。	【如果兒童回答不正確或超過10秒鐘未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：【指投影片上的立方體，並掀開3、2、1的面，展示3 × 3 × 3的正方體】**「你們看，這個立方體是由幾層小積木堆成的？」 【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**[指出3層]「3層。請你們看，這個正方體的頂層[指出第一層，最頂層]，是由多少行、每行多少個積木堆成？」 【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**[指出最頂層的三行積木]「這個正方體的頂層，是由1, 2,3，三行的積木堆成的。每行是由1, 2, 3，3個小積木堆成的。那麼，[指出頂層]這一層是由多少個小積木堆出來的？」 【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**[指出每一行]「你們看，這一層有三行積木，每一行有3個小積木堆成，一層是由3 + 3 + 3 = 9，9個小積木堆成。請問這個立方體有多少層？[指出最頂層的三行積木]而且，而且這個立體物的長、寬、與高邊是不是都一樣長？」 【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**「這個立方體有三層，而且這個立體物的長、寬、與高邊都一樣長，長、寬、高邊都是3個小積木堆成的。所以，它是個正方體。你們看，[指出第二層]這個正方體的第二層，是由多少個積木堆出來的呢？」 【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**「第二層也是由3 + 3 + 3 = 9，9(個)積木堆出來的。那麼，[指出第三層]你們知道它的第三層是由多少個積木堆出來的嗎？」

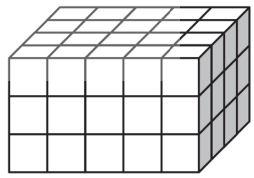
airiti

投影片號碼：37	教具：PPT#37
正確回答	不正確或無回答
3.確定兒童能觀察並說出：正方體的三個邊長等長。體積的計數，是在正方體的空間裡，是由多少個立方單位組合而成行(長)、列(寬)和層(高)的立方體將它全部排滿。	【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者**：「這個正方體的第三層，也是由3 + 3 + 3 = 9，9個小積木堆出來的。我們剛才數了3層，每層都是由9個積木堆出來的。那麼，三層總共有多少個小積木呢？」 【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者**：「每層有9個小積木，那麼，三層總共有9 + 9 + 9 = 27(個)小積木，也可紀錄為9 × 3 = 27(個)小積木。如果每個小積木的體積是1立方公分，那麼，這個立方體的體積是多少呢？」 【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者**：[**指出正方體**]「每個小積木的體積是1立方公分，三層共有27個1立方公分，這個正方體的體積就是27立方公分。」。
註：操作Cabri正方體圖，將圖的頂面展開後，讓學生觀察立方體的長、寬、高邊所堆疊出的積木數量，然後討論行、列與層的結構以計數立方單位，運算體積量。	

airiti

二、對照組教學問題與教案例隅

Q9-1. 長方體中所堆疊出的一層是用多少個白色積木？你怎麼知道的？



投影片號碼：11	教具：PPT#11
正確回答	不正確或無回答
兒童的回答： 1.「它用1立方公分的白色積木去排長方體，一層排了5 × 4 = 20(個)白色積木。」	【如果兒童回答不正確或超過10秒鐘未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**[指著5 × 4 × 3立體圖的頂層]「你們看，這個長方體的頂層，堆疊了多少個小立方體呢？」
2.「用1立方公分的白色積木去排長方體，一層排了 4 × 5 = 20(個)白色積木。」	【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**[指著長方體的頂層與其長邊]「這個長方體的長邊(水平方向)堆了多少個小積木？」
3.「長邊用了5個小積木，有4排的5個小積木，所以，一層是20個小積木。」	【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 實驗者：[指著長方體的頂層與其長邊]「這個長方體的長邊(水平方向)堆了5個小積木。你們看到，一列5個的小積木，共有多少列？」
4.如果兒童回答：「20個」，則實驗者進一步提問：「請告訴我，你們怎麼知道的？」	【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】 **實驗者：**[指著長方體的頂層與其長邊]「有4列5個小積木。所以，你們看到，5 + 5 + 5 + 5 = 20(個)小立方體組合而成。另外，[指著長方體的頂層與其寬邊]，從寬邊來看，一行有多少個小積木？有多少行？」
兒童的能力檢核： 1.確定兒童瞭解長方體體積可以由相同的立方單位堆疊而成。	【假如兒童回答錯誤或超過5秒未回答，則實驗者提供教學。】
2.確定兒童能以計數積木個數測量長方體的長邊、寬邊、高邊的長度，並計算長方體一層的積木個數。	**實驗者：**[指著長方體頂層的長邊與寬邊]「寬邊有5行，一行有4個小積木。所以，你們看到，5 + 5 + 5 + 5 = 20(個)，或是4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20，4 × 5 = 20，20個小立方體組合而成。」

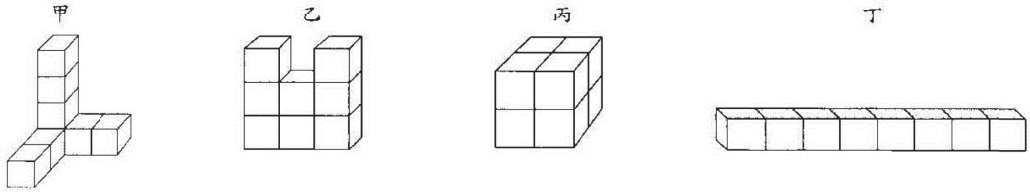
airiti

附錄二

一、前測

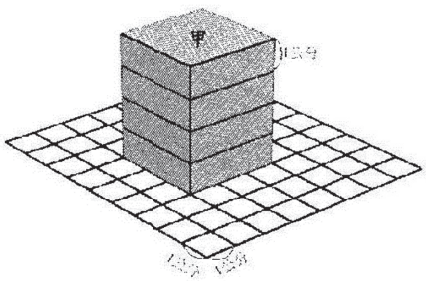
1. 安安想知道「1 立方公分」的意思，你可以向他說明嗎？請把你的想法寫下來。

2. 大雄說：「圖中的四個立方體各別由  堆疊而成，雖然它們的形體不一樣，但是體積都一樣大。」你同意他的說法嗎？為什麼？



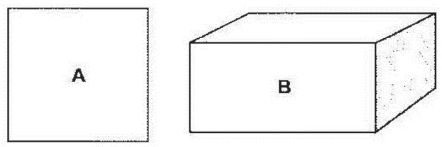
3. 你知道「體積」的意義是什麼嗎？請把你的想法寫下來。

4. 王老師把甲立方體放在平方公分板上。請看圖回答下列問題：

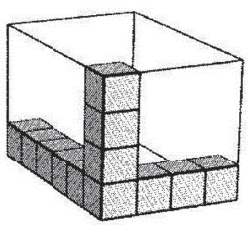


a. 甲立方體的長邊的長度是多少公分？（　　）公分。
b. 甲立方體的寬邊的長度是多少公分？（　　）公分。
c. 甲立方體的高邊的長度是多少公分？（　　）公分。
d. 請問甲立方體的體積是多少立方公分？請用算式記錄說明你的想法。

5. 下面有 A 正方形和 B 立方體兩個圖。請問各要如何測量，才能算出 A 的面積和 B 的體積？你可用文字說明你的想法。



6.  為 1 立方公分的積木。圖中的框架是一個長方體。



a. 王老師想用  積木把長方體框架的空間堆滿。

你知道長邊可用（　　）個  積木排成，

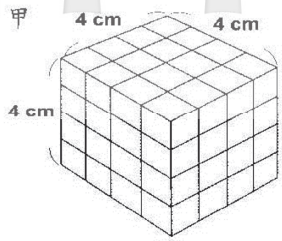
寬邊可用（　　）個  積木排成，

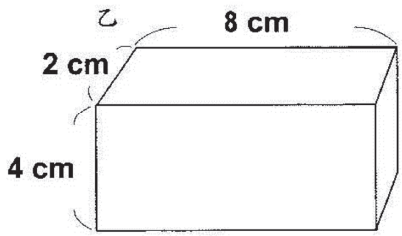
高邊可用（　　）個  積木排成。

b. 你知道王老師需要用幾個 ，才能把這個長方體框架的空間堆滿呢？請用算式紀錄說明你的想法。

airiti

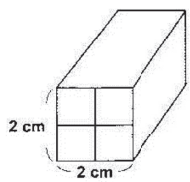
7. 甲和乙立方體都是由一立方公分白色積木堆疊而成。請看圖回答下列問題：





小欣說：「甲立方體的體積和乙立方體的體積一樣大。」你同意嗎？為什麼？你可以用算式紀錄來說明你的想法。

8. 小奇用 20 個一立方公分的小積木，堆成一個長方體。



a. 小奇說：「這個長方體的高邊是 2 公分，寬邊是 2 公分。」

你知道這個長方體的高邊是用多少個一立方公分的小積木堆出來的嗎？你怎麼知道的?

b. 你知道這個長方體的長邊是多少公分嗎？你怎麼知道的?

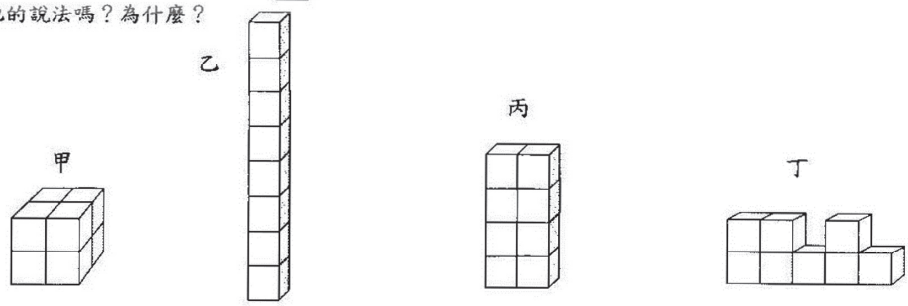
c. 莉莉說：「小奇堆出來的長方體，它的體積是 4 立方公分。因為 2x2＝4（立方公分）。」你同意她的說法嗎？為什麼？

airiti

二、後測

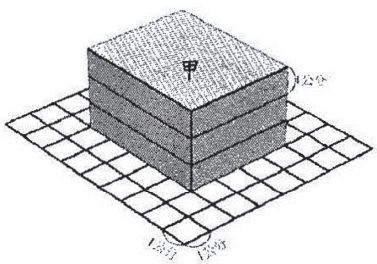
1. 你知道「1 立方公分」的意思嗎？請把你的說明寫下來。

2. 甲、乙、丙、丁四個立方體，分別由  堆疊而成。小威說：「乙立方體比較高，所以乙的體積比甲、丙、丁大。」你同意他的說法嗎？為什麼？



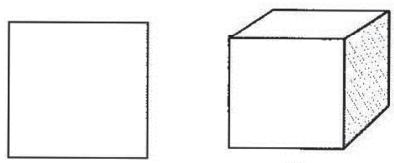
3. 你知道「體積」的意義是什麼嗎？請把你的想法寫下來。

4. 王老師把甲立方體放在平方公分板上。請看圖回答下列問題：

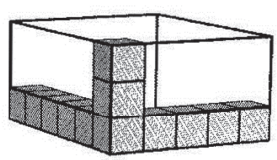


a. 甲立方體的長邊的長度是多少公分？（　　）公分。
b. 甲立方體的寬邊的長度是多少公分？（　　）公分。
c. 甲立方體的高邊的長度是多少公分？（　　）公分。
d. 請算出甲立方體的體積。
計算方式：

5. 下面有 A 正方形和 B 立方體兩個圖。請問各要如何測量，才能算出 A 的面積和 B 的體積？你可用文字說明你的想法。



6.  為一立方公分的積木。右圖中的框架是一個長方體。



a. 小虎想用  積木把長方體的框架堆滿。

你知道長邊可用（　　）個  積木排成，

寬邊可用（　　）個  積木排成，

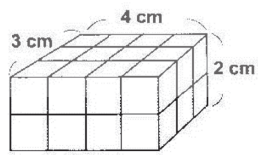
高邊可用（　　）個  積木排成。

b. 你知道小虎需要用幾個 ，才能把這個長方體框架的空間堆滿嗎？請用算式紀錄說明你的想法。

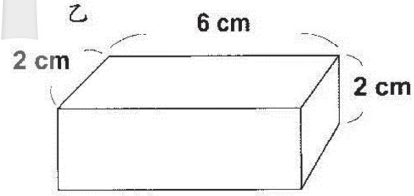
airiti

7. 甲和乙立方體都是由一立方公分的積木堆疊而成。請看圖回答下列問題：

甲

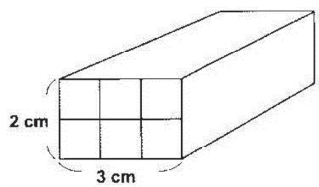


乙



小喬說：「甲立方體的體積和乙立方體的體積一樣大。」你同意嗎？為什麼？你可以用文字或算式紀錄來說明你的想法。

8. 小奇用 36 個一立方公分的小積木，堆成一個長方體。



小奇說：「這個長方體的長邊是 3 公分，高邊是 2 公分。」

a. 你知道這個長方體的高邊是用多少個一立方公分的小積木堆出來的嗎？你怎麼知道的？

b. 你知道這個長方體的寬邊是多少公分嗎？你怎麼知道的？

c. 莉莉說：「小奇堆出來的長方體，它的體積是 6 立方公分。因為 3x2＝6（立方公分）。」你同意她的說法嗎？為什麼？

科學教育學刊
2015, 第二十三卷第一期, 53-82
DOI: 10.6173/CJSE.2015.2301.03

Chinese Journal of Science Education
2015, 23(1), 53-82

An Experiment of Three-Dimensional Spatial Geometry and Volume Measurement Integrated Digital Teaching Materials and Instruction

Hsin-Mei E. Huang
Department of Learning and Materials Design, University of Taipei

Abstract

This study aimed to examine the effectiveness of digital teaching materials that integrated three-dimensional spatial geometry and volume measurement on improving fifth-grade children's learning of the formula of volume measurement of a rectangular prism and ability to solve volume measurement problems. The fifth-grade participants (N = 87) who were recruited from three classes in a public elementary schools in Taipei, Taiwan, were randomly assigned to the following three conditions: (1) the experimental curriculum in which three-dimensional spatial geometry and volume measurement were integrated (the experimental group); (2) the contrast curriculum which contained volume measurement only (the contrast group); (3) the control condition which a textbook lesson involving neither geometry nor volume measurement was given (the control group). Findings show that the three groups did not perform differently in the pretest prior to the instructional experiment. As to the total scores of the posttest, the experimental group outperformed the other two groups post experimental instruction. The effectiveness of the experimental curriculum also showed on children's solving problems that required numerical volume calculations and that required conceptual understanding of volume measurement. The interview data reveal that the interviewees who received the experimental curriculum were more able to express ideas about the meaning of volume and the formula of volume measurement of a rectangular prism than the interviewees who received the contrast curriculum. Nevertheless, the frequency of providing accurate and complete explanations for the meaning of volume and the formula of volume measurement of a rectangular prism was low either in the experimental group or contrast group. Overall, the study provided evidence and suggestions for enhancing children's conceptual understanding of volume measurement and problem-solving ability.

Key words: Three-Dimensional Spatial Geometry, Formula for Volume Measurement, Volume Measurement