

數學自由擬題之設計與評量——一個合作的取徑

陳斐卿¹ 江家瑋² 張鐵懷² 黃佩岑² 單維彰^{3,*}

¹國立中央大學 師資培育中心

²國立中央大學 學習與教學研究所

³國立中央大學 數學系

摘要

解題能力是正式數學課程主要培養的能力，而擬題能力常被忽略。本研究關切融入合作精神以設計自由擬題課程模組之規劃與實施。合作擬題模組共計約400分鐘，國小四年級學生不受課程單元侷限進行自由擬題，歷經同儕給予建議、出題者修改、同儕試答、出題者批閱後再修改、通過班級與專家檢驗等歷程，在多回合的建議修正之合作氛圍下，完成擬出一個題目的活動。本研究針對自由擬題的題目特徵，發展一份包含四個向度的自由擬題品質規準：可解性、可讀性、生活性、與精緻性；在自由擬題的同儕建議方面，在前述四個向度以外又辨識了四個向度：完備性、情意面、雜類與誤導性。結果顯示，在同儕給予建議的幫助下，擬題品質的版本一與最終版本相比，進步達顯著，其中以精緻性進步最多；同儕給予的建議也以精緻性與題目的進步最為相關，其次是情意面的幫助。這些發現建議：擬題活動涉及的面向並不單純只用到數學能力，值得後續更多的探索。本研究對提升擬題能力的課程設計、評量，以及提高學生對於數學活動的興致皆有所探討。

關鍵詞：合作、同儕互評、評量規準、數學、擬題

壹、前言

數學擬題能力一直沒有受到足夠的重視(Ellerton, 2013; Silver, 1994)。以「國際數學與科學教育成就趨勢調查」(Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS)為例，連續三期橫跨12年的國際評比的數據顯示：臺灣小四生的數學成就排名持續在前四名，但是對數學的喜愛與自信，卻一期比一期更落後 (Mullis, Martin, & Foy,

2008; Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012; Mullis, Martin, Gonzalez, & Chrostowski, 2004)。如此的現象建議：關注學生數學情意面的興趣培養要比認知面的解題能力更為急迫。

這是唯獨臺灣孩童的數學學習現象嗎？新、港、日、韓四國於2011年TIMSS的表現(表1)證實，亞洲國家有相同趨勢，「會解題但是頗不喜歡數學」的學習態度，儼然成為一個跨國的區域性問題，也更增加了研究數學學習情意面的重要性。

*通訊作者：單維彰

(投稿日期：民國102年9月14日，修訂日期：民國103年7月15日，接受日期：民國103年9月5日)

表1：亞洲各國小四學生在TIMSS的數學成就、喜愛程度與信心的排名

國家	成就排名	喜歡排名	自信排名
臺灣	4	43	46
新加坡	1	21	45
香港	3	25	42
日本	5	48	50
韓國	2	50	49

註：2011年度參加的國家總數為50國。

擬題活動可促進學習數學的情意面。特別是自由擬題活動，學生經歷三階段不同的過程：第一、察覺真實世界的情況與已經具備之數學知識的關聯；第二、決定選擇運用上述關聯；第三、執行數學與外部的連結。這三項也被視為學習遷移過程的三個階段(Perkins & Salomon, 2012)。若透過這樣的思考過程，不但促成數學認知面學習遷移的效果，更因為培養數學與真實生活連結的能力，而啟發數學情意面的學習。

擬題活動可促進數學觀念的連結能力。連結可分為內部連結與外部連結，內部連結注重不同觀念之間的連結以強化數學能力(教育部，2008)，例如所擬一個題目之概念跨越數個單元，因而展現出各概念之間的連結統整；另一方面，外部連結注重數學與生活情境、歷史、自然與社會科學等連結，透過擬題能讓出題者對數學與日常經驗有更深刻的觀察與連結。

考察當前的數學學習活動，加強概念之間的內部連結仍然是主要目標；換言之，外部連結的培養較少被關注(English, 1998; Silver, 1994)。本研究的目的即是促成學生探索數學之內部與外部連結的可能性，提升學生對數學的興趣，期能讓臺灣學生對數學的成就與喜愛認同性，兩者能有均衡的發展。

貳、文獻探討

本文聚焦於與生活連結為目標的自由擬題活動，評述的文獻範圍包括：擬題的定義、自由擬題的發展趨勢、設計擬題階段與合作擬題、以及評量擬題表現等。

一、擬題的定義

擬題研究已經盛行超過二十年。最早的擬題活動文獻可以上溯到一個世紀前(Belfield, 1888)，這筆文獻裡擬題的活動描述是：給孩子抽象的範例，讓他們從範例改變成為具體的題目。一百年以來，擬題的主軸一直沿著擬題「必有所仿」的路線發展，這二十年來最廣泛採納的擬題意涵有以下三組表徵方式：

第一，1994年美國匹茲堡大學學者Silver指出有兩種擬題活動：一個是「從被給定的情境生出新問題」(the generation of new problems)，另一個是「從被給定的問題再形成問題」(the reformulation of given problems; Silver, 1994)，因此，從時間安排來區分，Silver主張擬題可以發生於解題的前、中、後三個時間段落。

第二，1996年澳洲學者Stoyanova將擬題定義加以拓展為：「學生以數學體驗為基礎，建構具體情境的個人解釋，並依此形成有意義的數學題目」。經拓充後的定義有助於探索擬題與解題的相互關係，並特別關注擬題情境的設計，Stoyanova將擬題情境區分為三類：1.自由擬題、2.半結構擬題、與3.結構擬題(Stoyanova & Ellerton, 1996)。三類情境的開放性不同：自由擬題指學生從一個被給定的、人為的、或自然的情境中出題；半結構擬題指給予學生一個開放的情境，邀請他們探索這個情境的結構，根據自己所知的數學知識、技能、

和概念來出題；結構擬題指學生被指定要沿著一個特定的題目來出題。

第三，1998年澳洲昆士蘭科技大學學者English將擬題情境命名為兩類：形式情境(formal context)與非形式情境(informal context; English, 1998)。如果將「形式」解讀為Piaget對認知發展分類裡的形式運思期，則形式情境是指提供一個有數字符號的算式表徵，讓孩童去寫題目；而非形式情境則是給孩子一個不含數學符號的「刺激物」情境(如照片或插圖)去寫題目。

從定義的演變也依稀透露出數學社群對擬題的期待。從Silver以「解題」活動為中心來描繪擬題活動，到Stoyanova以擬題「情境」為中心，鬆綁了擬題與解題兩者之間在活動設計面的緊扣關係，而English區隔出非形式情境，也呈現對日常生活經驗與擬題關係的正視。擬題定義與分類演進顯露出一個正在發展中的趨勢：自由擬題、半結構擬題、與非形式情境擬題都不再沿著被給定的「題目」出題，而主張給予出題者更寬廣的擬題空間，使他們自身的數學認知與生活經驗能在擬題活動裡扮演更為重要的角色。擬題作為一個獨立活動的主體性正逐步發展開來，本文即是沿著此一較為寬廣的定義，對自由擬題活動的內涵進行探究。

二、自由擬題的發展趨勢

過去文獻採用自由擬題的原則來設計活動者少，採用結構與半結構擬題比較普遍(e.g., Ellerton, 2013; Silver & Cai, 2005; Tichá & Hošpesová, 2013)。但主張沿著結構擬題，並以「應有所仿」為原則而設計的擬題活動，其效果也出現檢討的聲浪。

首先，出題者的心思容易受限於給定條件而封閉了生活經驗，將擬題任務窄化為符

合特定的運算(Ellerton, 1986)。一方面，當給予出題者既定的數學式子，擬題的功夫多半花費在湊出符合該運算符號的文字題目。例如English (1998)發展兩組概念詞來詮釋擬題流暢度的真正內涵差別：整合(integration) vs. 重複(iteration)。整合指涉問題結構上具有複雜性(structurally complex)，所擬題目需要經過多個關連想法的整合，才能解題；而重複指涉問題涉及熟悉的基本改變關係，只具有運作上的複雜(operationally complex)，形式情境容易引導出重複的擬題品質。另一方面，當給予出題者既定的情境(context)，出題者以替換情境的方式繁衍題目，他們對於形式陳述的詮釋是侷限的，不能超越照結構寫的模式(structure plus-writing approach; Rudnitsky, Etheredge, Freeman, & Gilbert, 1995)。

其次，出題者的擬題成品容易受限於課本題(Ellerton, 1986; Lowrie, 2002; Tichá & Hošpesová, 2013)。傳統數學課本的範例題型通常與其後的練習題有著極為類似的結構，出題者長久以來帶著這樣的印象，當面對「捕捉某個题目的結構來擬題」這種任務時，刻板的連結效果致使各個題目的一致性很高，即便產生很多道題目，僅在數目、數量或提問方式上稍做變更。

此外，所擬題目常出現刻板化的出題情境。僅有單一主題，例如蛋糕，或僅有單一的情境，例如買菜等(Tichá & Hošpesová, 2013)，出題者鮮能將自己的真實生活情境入題；反之，當出題者與其題目建立起個人的關係或情感時，通常是個較好的題目，能展現靈巧性與有趣性(Crespo & Sinclair, 2008)。

基於上述「結構擬題」活動的困境，鬆綁擬題聯想空間的「自由擬題」活動設計應受到更多關注(Silver, 1994)。數學家致力

於解決一些公認重要的數學問題，但他們更常基於自己的經驗與興趣來形成他們自己的題目(Poincare, 1948)。這種以開放性擬題任務促發個人化與人性化數學活動的過程，不是只能專家經歷，即便生手學生也常有令人驚艷的成果，能夠擬出非教科書標準題型的題目(Koichu & Kontorovich, 2013; Silver & Mamona, 1989)。

三、設計擬題階段與合作擬題

擬題活動要落實於教室，還需詳究教學程序與教學任務。基於自由擬題的文獻有限，以下關於活動設計與評量的部分，也包括自由擬題以外的各種擬題類型所發展的活動。整體來說，晚近有四種對擬題階段論的主張。

(一)敘利亞學者(Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-pantazi, & Sriraman, 2005)以小六生為建立擬題過程模式的測試樣本，所推出的擬題過程有四(以下簡稱[敘論])：1.編輯量化資訊及其意義與關係(edit)、2.選擇(select)量化資訊、3.透過對量化資訊的意義賦予或對所提供訊息建立關係來理解(comprehend)與組織量化資訊、4.將量化資訊從某一形式轉譯(translate)為另一形式。

(二)墨西哥學者(Pelczer & Gamboa, 2009)比較專家與生手擬題差別而使用的擬題階段有五(以下簡稱[墨論])：1.準備(setup)，包括解讀任務的限制、2.轉化(transformation)，包括分析問題的特徵與反思可行的技術、3.形成問題(formulation)，包括辨識可能的問題、4.評估(evaluation)，包括根據初始設定的規準評估問題與判斷修改的必要與方向、5.最後評價(final assessment)，包括反思問題的難度與有趣性等。

(三)捷克學者(Tichá & Hošpesová, 2013)為理解職前小學教師擬題能力而設計的擬題步驟有四(以下簡稱[捷論])：1.出題、2.解部分題目、3.個人書寫對活動之反思、4.參與同學和老師的共同反思。

(四)以色列學者(Koichu & Kontorovich, 2013)從主修數學教育的大學生為樣本進行Billiard Task，分析能成功擬出有趣題目的個案，其擬題歷程可分為以下階段(以下簡稱[以論])：1.暖身、2.找出一個有趣的數學現象、3.修飾問題隱藏解題的線索、4.審題。

這些不同階段論建議的重點不同。結構擬題活動注重「仿題」，出題首要釐清給定的侷限為何(如敘論、墨論)，其次涉及到轉化與轉譯；當進行的是較為開放的自由擬題活動，出題的靈感與找尋線索便是首要挑戰(如捷論)。

從階段論的步驟看出擬題的幾個新趨勢：首先，多份階段論都提及對所擬題目的自評與互評的重要(如墨論、捷論、以論)，也看到擬題過程不再單單是個人的活動，而涉及與人合作的學習任務；其次，出題之後的解題工作、與模擬檢覈答題者對於解題的可能思路也是一個很有趣的琢磨階段(如捷論、以論)。茲分述於下。

擬題理論架構具有合作擬題意涵。擬題活動日漸將合作學習的成分納入，透過合作一起琢磨題目的品質，以色列科技大學Kontorovich等針對小組擬題活動建立了第一個先探性的擬題理論架構(Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman, 2012)，指出團體動態與互動(group dynamics and interactions)是擬題複雜性的一個面向。合作的方式與任務包括：成對合作擬題(Koichu & Kontorovich, 2013; Lavy & Shriki, 2010)、集體討論與

擬題、一組所擬題目的答案由另一組提供(Kontorovich et al., 2012; Leung, 2013)、同儕試答以提供修正建議(Ellerton, 2013; Koichu & Kontorovich, 2013)。

過去強調擬題數量多產的研究，容易忽略琢磨一個題目品質的重要，合作擬題的設計搭建起新的學習機會。研究顯示多數的題目欠缺措辭與邏輯上的精修，建議先透過同儕交換與互相檢視彼此的漏失並討論所需的修改，會比老師直接指出要更為合宜(Ellerton, 2013)；來自多人反思所給予建議的角度多元性，對於修題活動極為重要。研究進一步指出修改的意願與否是個議題，而修改的動機來自出題者先接受題目有修訂的必要(Tichá & Hošpesová, 2013)。

綜上所述，擬題階段論包含的各個任務具有從個人擬題走向合作擬題的發展趨勢特徵，擬出數量少但品質好之題目能增加成功的經驗(Koichu & Kontorovich, 2013)，從重視個人「一例多仿」逐漸演變為合作「一題多磨」，似乎是擬題發展的未來趨勢。

四、評量擬題表現

擬題活動的評分向度頗為複雜。審視題目特徵的角度很多，如：題目的情境向度、正確性、創造力的元素、有趣的規準、解題過程之難度、數學內容向度、甚至同儕給評語的類別等。

(一)情境特徵：注意情境的真實程度，de Lange (Gravemeijer, 1994)將情境的真實程度分為三種：1.只含算式而沒有文字描述(bare problem)、2.虛擬情境，解題者並沒有真的需要用到情境所提供的訊息、3.蘊含重要數學概念訊息的情境。另一套分析擬題情境的分類方式以情境的真實程度為基礎，分為以下幾種現象：1.虛擬的

題目、2.情境數據失當，過大或過小與事實背離、3.情境不合理，與生活真實性背離、4.佈題的數據欠缺精心設計，沒有讓解題者需要使用某種解題策略(林碧珍, 2003)。此外，某些不符合現實狀況的問題，被歸為「不正確」的擬題成品(馬秀蘭, 2007)。有趣的是，在國內教科書裡，徒具形式的虛擬情境題目卻是比比皆是，而這些課本題目都經過專家背書認可，於是，情境到底在數學題目中扮演什麼角色？這個議題值得深究。

(二)數學特徵：這一組是最廣為採用的評量編碼。Silver與Cai (1996)將擬題成品分成多步驟的編碼系統，關注點有：1.是否為數學問題；2.擬題的數學結構前提。如果是結構擬題，則3.審視是否符合前提。如果是自由擬題，則4.審視題目涵蓋的數學內容(Lowrie, 2002)。

(三)複雜性特徵：此類編碼關注題目的複雜程度。Silver與Cai (1996)將複雜性分成兩大類型：語意(semantic)的複雜和語法(linguistic syntactic)的複雜，更仔細的分項尚包括解題程序中的計算難度與運算次數、問題的設計以及數系(number system)的選定等(Ellerton, 1986)。

(四)正確度特徵：此類編碼關注數學題目之是否可解？若不可解則進一步分析其錯誤類型、錯誤結構、錯誤或不完整文字表徵、資料不足、不符現實狀況等問題(馬秀蘭, 2007)。

(五)有趣度特徵：從數學專業美感的角度審視題目或答案，包括一些特徵如簡單(simplicity)、簡潔(brevity)、明晰(clarity)、雅緻(elegance)、豐富(fruitfulness)、慧黠(cleverness)、認知困難度、新奇性與驚艷性(Koichu & Kontorovich, 2013)等。

(六)創造力特徵：很多研究將所擬題目視為生產品，借用Torrance (1966)測量創造力的規準來評量擬題。例如以流暢性看擬題的產量、以變通性看擬題的題型變化度、以原創性看題目的稀罕性(Balka, 1974; Chang, Wu, Weng, & Sung, 2012; Van Harpen & Presmeg, 2013)。

(七)擬題建議的類別特徵：基於互助擬題，一些研究也一併分析同儕給予意見的項目種類，例如情境、困難度、可能的表徵(Tichá & Hošpesová, 2013)；或是從功能上分為提問、推測、其他無關的說明(Kontorovich & Koichu, 2009)。

各種評量著重的角度有所不同。有些涉及結構擬題，關切的是所擬題目與示範題的範圍落差；有些看擬題的產量多寡；有些分析題目的錯誤類別；有些看擬題情境建立的適切性與有趣度等。以上這些考量，反映出成人世界的數學專家對理想的兒童擬題活動的期待，然而，時代的變遷急速影響著學童的生活世界，他們根據生活經驗所擬的題目也將跟著反映他們的所見所思，因此關注孩童生活世界變遷的程度，也將影響我們如何發展審題的規準。

總結地說，從擬題的定義、自由擬題的發展趨勢、到擬題活動的設計與評量一系列文獻的回顧，顯示合作而彈性的自由擬題是一個值得關注的趨勢，擬題模式在個人與合作的交織處有待更多的探索，合作的擬題品質該如何評量，更是新興議題。基於以上評述，本研究將提出一個合作的自由擬題活動程序，具體的研究問題有三：(一)自由擬題的成品有哪些特徵？(二)自由擬題的題目品質如何？(三)自由擬題的同儕建議幫助如何？

參、研究方法

本節介紹施測的樣本、使用的研究工具、以及資料收集與分析的方法。在研究過程中開發出三種工具：自由擬題的階段活動設計、自由擬題的品質規準、以及給予自由擬題建議的品質規準。

一、自由擬題的階段活動設計

參酌前述對擬題階段論的文獻評述，本研究的自由擬題設計呼應「一題多磨」的趨勢，圍繞著以下幾個原則來進行設計：(一)擬過的題一定需要修改(Pelczer & Gamboa, 2009)、(二)多人給建議可多方檢覈、(三)擬題包括自附解答(Tichá & Hošpesová, 2013)、(四)同儕試答後提出修正意見、(五)從批改答題者的作答獲得不同的修題線索(Koichu & Kontorovich, 2013)。

在擬題文獻裡，從擬題「必有所仿」到「一題多磨」反映著一股新興的趨勢。一方面，先前大部分的擬題活動偏重流暢或產量，輕忽擬題品質與從中湧現的學習機會；事實上，學生是擬題生手，所擬題目多半有待精進，題目若透過重新審視，必能提高擬題能力，加強分析題目結構的能力對解題也可能有幫助。但是另一方面，一題多磨的教學策略必有其侷限，包括課程時間與學生耐性等，本研究以拉高擬題的目標與價值作為對策，學生對於先「建立班級題庫」、進而「考倒別人／班」的目標，顯得興致高昂，其合作無間與磨題能耐因而比一般數學作業或任務要大為提升。

擬題整體活動的時程籌劃，主要根據進班導師所提供的班級彈性時段，實際實施的時程為2011年11月至2012年1月這段時間，前後

長度約兩個月，一週平均有1~2堂課的活動時間，修題過程共歷經四個版本的磨練(如圖1)。

表2為詳細的自由擬題歷程，一共有12個步驟：(0)介紹擬題活動，(1)出題版本一，(2)對版本一建議，(3)出題版本二，(4)試答版本二題目，(5)對版本二建議，(6)批改版本二試卷，(7)出題版本三，(8)專家判題品質與分類，(9)對版本三建議，(10)出題版本四，(11)擬題成果發表會。

「一題多磨」模組的獨特之處在步驟(4)和步驟(6)。一般的擬題同儕互評活動，互評的基礎很單純，題目是互評者唯一的刺激物；然而，本模組的設計讓建議者在建議之前有作答的體驗(步驟4)，也讓擬題者在修改之前有批改的體驗(步驟6)，這兩重設計讓出題者與建議者都能有深層的體驗：評題者「看」題目哪裡有問題，不如「做」了之後更知道哪裡有問題，能夠將建議寫得更具體。同樣地，出題者「看」同儕的建議，不如從「批改」同儕答題錯誤的線索中悟得更深，或更知道自己該如何修改，才能避免誤解或是增加誘答的力道。

「數」個回合的修改比「一」個回合要更紮實。表2的擬題「重點」欄位顯示，12個步驟中有四次擬題與修改的機會，不同階段有四個給建議的時刻，一共可以收到九人次以上的建議(步驟2、4、8、9)，簡言之，這個模組的合作意味十足，磨出一個題目的過程能收取到多元的建議，並極為慎重地完成。

二、研究對象與課程情境

本研究之田野為北臺灣某縣內三個市鎮邊陲接壤地帶之某中型國小。共計50班1,500餘人，社經地位中等但學區複雜，家長以上班工人居多，鄰近國際兒童村，單親弱勢及原住民人口近400位，極為適合進行與坊間補習項目無關之學習活動，故選擇該校為研究對象，又因數學自由擬題活動需要國語文句書寫能力以及數學四則運算基本能力，故選擇四年級。

研究樣本小而深入。由於施測時間總計長達10堂課400分鐘，故透過該校行政主管推薦一個合適班級進行。該班男學生為17人、女

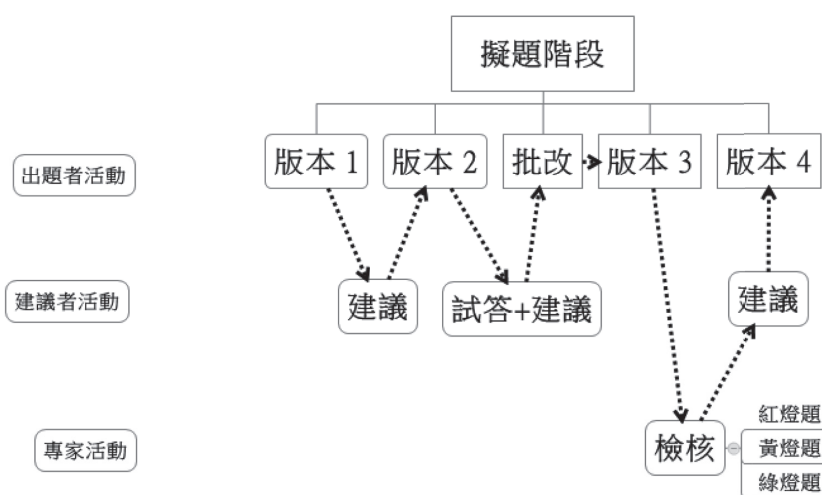


圖1：自由擬題四次合作修改之過程

表2：自由擬題的12步驟

步驟	行動	說明	重點	時間
0	介紹擬題活動	合作擬題、班級題庫建立的目標	動機	40
1	出題版本一	每人出一題	擬題	80
2	對版本一建議	每一題收到來自高中低程度之各1位同學的建議	建議	40
3	出題版本二	根據步驟2的資訊，修改版本一	擬題	40
4	試答版本二題目	每一題有數學程度高中低程度各2位同學試答(至少6位試答者)，以利出題者獲得不同答題能力者的反應；行有餘力的學生可以多答題目	答題	40
5	對版本二建議	上述三群不同答題程度的同儕根據試答的體驗，寫下建議	建議	
6	批改版本二試卷	擬題者獨力批改試答者的考卷，推敲他人如何理解與計算題目。透過批改的過程，由同儕的答案與算式，來反思自己的題目設計，甚至發現自己的訛誤而修改原先的正確答案	批改	40
7	出題版本三	根據步驟5與6的資訊，修改版本二	擬題	
8	專家檢核	由數學授課老師與研究者共同研判擬題品質，依據題目與解答的瑕疵與否，區分為綠燈(都無瑕疵)、黃燈(題目無瑕疵但解答有瑕疵)、紅燈(都有瑕疵)三類，對於瑕疵題目，也透過個別討論來提供出題者具體建議	建議	-
9	對版本三建議	將所有題目張貼於班級牆壁之布告欄，徵求給予黃燈題與紅燈題建議，班上同學自由給予之建議數量不一	建議	早自習／ 課間
10	出題版本四	根據步驟9的資訊，修改版本三	擬題	40
11	成果發表會	分享擬題經驗	收尾	40

學生為13人，共30位學生，其中一位為閱讀障礙，資料不納入分析，故實際樣本為29人。

10堂課由研究人員主導，班級導師旁觀備詢。每一堂課之教案與進行方式，事前均先與該班導師徹底溝通並修正，以提高可行性與順暢度，課堂進行則由教育專長博士班研究人員擔任活動引導人員，任務包括自由擬題過程舉例、各階段擬題與修題活動之主持與說明、以及課後訪談等。每堂課程共有三位研究人員相互支援，班級導師也均在場，以旁觀者角色提供即時或事後的建議。

自由擬題的集體擬題活動並非任由個人憑空發想。發展第一個版本時，研究人員提供與生活相連結的題目作為擬題靈感的啟動機制，以下為舉例的題目「遲到的代價」：

黃揚今天不小心睡過頭了。7:20分才出門，但是7:30之後就是遲到了。徐老師這學期還規定同學們遲到一分鐘就要捐兩塊錢當慈善基金。如果黃揚用走的來學校，不用錢，要走25分鐘。

等公車+坐公車，需要12塊錢，總共要花18分鐘。

跟隔壁小黑租腳踏車需要20塊，但只要13分鐘。

請問，黃揚今天要怎麼做才可以付比較少錢呢？是多少錢？

此故事之主角姓名為班上一位學生，遲到是小學生活的一個常見議題，適度的罰則

也是同學所熟悉的校園運作，透過精心設計的題目舉例，企圖引導學生將出題靈感聚焦在自己的日常生活，而非大人或生活細節過於乾澀的傳統文字題型。

擬題修題之互評對象有特別安排。每一份題目能得到多位同儕的建議，給予建議的來源有所不同：依據前一學期的數學學期成績將班上同學分為高中低三群，三群人數分別為10、10、9，在步驟2、4、5的建議與試答階段，每位學生的題目，平均分派給高中低各群的學生提供建議。

三、資料收集

在整個自由擬題模組活動前後，共收集六種資料：(一)擬題卷與建議卷、(二)活動後問卷、(三)訪談、(四)觀察筆記、(五)前一學期之數學學期成績、(六)以所擬題目為全校播臺賽之答題狀況。

擬題過程有總計4個修訂版本，與3回合約九份的建議資料。擬題的題目卷約有題目一百字以上的長度、擬題者提供之解題步驟、與答案，擬題卷每人4個版本，共計有116個版本的擬題題目。建議包括第一回合建議的3個空白建議欄(步驟2)，以及第二回合建議卷6張試題(步驟4)與空白建議欄(步驟5)，總計每題收到9人次以上的建議，總共有328則建議。

活動結束後有參與活動之開放式學習單，共計8題。分別針對擬題過程的重要合作步驟(如：出題、給建議、收到建議、參考建議修改、作同學的題目、批改別人作答我的題目)，以及整體的情緒感受，資料有兩種：(一)填答五點量表的喜歡程度，(二)說明原因。題目如：「我(喜歡，不喜歡)自己出題目，為什麼？」、「我(喜歡，不喜歡)收到別人給我的建議，為什麼？」、「我(喜歡，

不喜歡)批改別人作答我的題目，為什麼？」等。這些問題的回答長度約為一行左右，內容也將作為訪談對象的選取根據。

整體課程結束之後一一與學生進行訪談。基於中年級學生的對談表達能力尚未普遍成熟，訪談採輕鬆開放式，沒有具體的結構大綱，內容以參與活動的感受與特別想說的事情為主，或是參酌學習卷上的填答內容為線索進行深入訪問，時間長度為每人半小時或以上。

觀察日記在十一次課堂之內及之後進行撰寫。觀察日記共有三位研究人員撰寫，每人／次約有一千字不等，觀察日記是訪談的基礎，訪談之後的想法也併入後續觀察日記之內。觀察的方向主要是學生在擬題課堂中的各種現象，例如協助同學擬題時的爭執事件或擬題的情緒反應等。

答題播臺賽的資料，用於初步判定每個题目的品質指標，如難度與鑑別度。播臺賽於該學期期末考之後的兩天舉行，六年級已經畢業，一年級認字程度尚不足，故二至五年級參加。每一份答題卷印有一題題目，共計回收1,120份答題卷，共計267人參與，各年級學生與答題數之分布狀況為：二年級11人、答題數17題，三年級46人、答題數130題，四年級125人、答題數636題，五年級85人、答題數337題。

四、發展兩個評量規準：擬題品質與建議品質

本研究採用紮根理論精神產生評量規準。由於所開發的擬題模組以「一題多磨」、「多次建議」為特色，不同於強調「多多益善」、注重擬題數量、以流暢性為評量規準的取徑。根據29題116個修訂歷程版本的自由擬題题目的內容特徵，與每題至少

9人次共有328則建議的內容特徵，分別發展兩種評量規準：「自由擬題題目品質評分規準」與「給予建議之品質評分規準」。

「自由擬題題目品質評分規準」有四類，規準的向度名稱與說明見表3前三欄。

四個向度的計算方式多採集點法(Silver & Cai, 1996; Yu, Tsai, & Wu, 2013)。質性資料分析在建立「向度」時，透過多項特徵來具體描述該向度，也以指認出某項特徵為計分依據，但為了避免對任一向度形成加權效果，雖然每一向度的具體描述特徵個數多寡不一(參酌表4)，但每一向度滿分上限為四分。換言之，評量每一個題目時，具有表4說明欄提及的特徵種類越多，則分數越多，但同一特徵只計一分(有／無)。另外，第一向度「可解性」計法不同：以專家評量題目之可解程度性給予0～4的分數。

第二個工具是發展建議品質的評量規準，由於建議必然與促進題目品質有關，因此先參考自由擬題「題目品質」評量規準，檢視四個向度是否也適用於作為「建議品質」評量規準，再對於不適合納入原先規準

之建議，以紮根理論的精神從資料萃取核心概念，繼續開發了四個向度，總計「建議品質評量規準」共有八個向度，如表3第一、二、四欄。

八個向度的計算方式如同「題目品質」評量規準，同樣採用集點法。針對所擬題目給予建議，題目瑕疵多寡不同，建議的面向與多寡也必然不同，因而建議必存在著多元面向之可能，故而採用集點法。八個向度中，「誤導性」建議係指同儕給的建議有明顯錯誤，對擬題者可能產生誤導修改方向之建議，因此，建議品質的給分將會扣除此向度之集點。

建議類別與所建議之題目息息相關。舉例而言，某生的題目第二版本文字如下：

有一天，于婷和三個同學放學要去逛夜市，一放學就對媽媽說，我要和同學去逛夜市，媽媽給于婷一千元，于婷買了一杯冬瓜茶和一串烏蛋共要付多少元？另外三個同學買了三碗豆花和三串花枝丸還有三串烤玉米，加起來剩多少元？(冬瓜茶一杯40元、豆花一碗30元，烤玉米

表3：自由擬題品質與建議品質評量規準

向度	向度名稱	擬題品質說明	建議品質說明
1	可解性	偏重數學面向之題目可解性與否	有助於提升前述可解性之建議
2	可讀性	偏重文字面向之題目用字明確、合理程度	有助於提升前述可讀性之建議
3	生活性	偏重題目與生活之連結程度，以及題材的特殊性	有助於提升前述連結性之建議
4	精緻性	偏重數學面向之題目精心設計程度	有助於提升前述精緻性之建議
5	完備性		意圖使題目更具完整性之建議
6	情意面		給予之建議偏向情意面的鼓勵或呈現易於引發負面情緒的評語
7	雜類		其他建議
8	誤導性		同儕給的建議有明顯錯誤，對擬題者可能產生誤導

一串20元，花枝丸一串30元，烏蛋
一串30元)

(洪琬婷_V2)

其中一則建議為「琬婷很棒喔！有運用日常生活的經驗，可是你的最後面怪怪的什麼是『加起來剩多少』因(按：應)該是寫說：這些東西的錢用一千元減掉是多少元。」(4626_A401)。此則建議兼有鼓勵與題意敘述不清的提醒，故於可解性與情意面二向度上各得1分。

五、資料分析

(一)擬題特徵

首先針對題目進行特徵分析。本文處理兩個面向：1.題目之文字長度、2.生活情境題的生活性。面向一：文字長度計數方式包含

標點符號，但不包含圖表內的文字，檢視高中低三群的題目，其文字長度的差別是否達顯著？以及文字長度與題目難度與鑑別度的關係？面向二：日常生活情境納入數學題目的情境有哪些種類。

難度與鑑別度的初步分析是利用解題播臺賽的施測資料。播臺賽採開放制，每個題目於播臺賽吸引同儕作答的份數不一，收得之資料若要進一步建立嚴謹的題目品質指標，必須有所妥協。例如，受測學生涵蓋四個年級，誰是高分組？誰又是低分組？因為題目是四年級學生的作品，四年級參與播臺賽的人數也最多，故以四年級學生作答資料作為分析題目難度鑑別度的依據，再決定用前一學期之數學學期成績為準，將四年級學生分成高低二群，計算每一題的鑑別度與難度，以探究題目文字長度與題目品質指標的關係。

表4：學童擬題品質各向度具體特徵的符合次數分配表($n = 29$)

向度具體特徵	版本一 (次數)	版本四 (次數)	版本四符合向 度細項的比例 (%)
2可讀性			
2-1.沒有文字累贅的情形。	25	26	90
2-2.沒有誤導用途外的多餘訊息。	27	26	90
2-3.沒有漏掉關鍵字、詞的情況。	16	23	79
2-4.使用的數字與敘述皆合乎常理、邏輯。	20	23	79
3生活性			
3-1.構想取自生活經驗事等。	27	27	93
3-2.具有在地特殊性，或是具有該年齡層學童之特別經驗。	13	12	41
3-3.與數學科之外的學科或常識有所連結。	7	9	31
3-4.具有生活實際應用性。	24	24	83
4精緻性			
4-1.需運算的數字有經過有意義的設計。	13	20	69
4-2.有精心安排的陷阱設計。	9	14	48
4-3.運算上的設計。	25	27	93
4-4.運算之外的數學概念種類數目有兩項以上。	7	10	34
4-5.利用圖示或表格輔助題目敘述。	7	8	28
4-6.具有至少5步驟。	18	19	66

(二)擬題品質

依據「自由擬題題目品質評量規準」分析各版本的品質，本文僅分析版本一和版本四的擬題品質。以相依樣本t檢定來考驗自由擬題的題目版本四與版本一前後測是否有差異，繼之檢驗高中低三群成績在兩個版本的差異。

(三)建議品質

依據「建議品質評量規準」，辨識每個題目形成過程所收到的建議種類。分析單位為「則」，根據每一則內容涉及的建議面向來給分。舉例言之，某則建議涉及「建議品質評量規準」向度一、三、六這三個面向，則這三個面向各得一分(有/無)。建議品質評量規準共有8類，每一則建議的得分為第一到第七向度的總得分減掉第八向度的分數，最多可得7分。之後再進行建議向度與擬題品質各向度進步分數的相關性檢驗。

學生對於同儕所給建議之感受，有五點式量表及開放式填空資料，則與訪談內容、修題過程等資料進行交叉比對分析，以解釋個別學生對於修題活動之脈絡性想法。

六、研究信效度

有關擬題規準與分析的信效度建立過程如下：第一階段是發展擬題品質與建議品質的評量規準，第二階段是根據上述兩種規準來分析學生所擬題目與所給建議的品質。研究人員為兩名數學專長(國中數學老師A、大學教授B)，及三名學習領域專長(博士生C、D、大學教授E)。信效度建立經歷10次、每次3小時的討論。

(一)建立規準的階段：為建立題目品質向度，由A先將所有題目閱讀數次，逐一紀錄題目顯露的問題，從問題筆記中，

採用歸納法合併為一組特徵清單，再進一步提出含攝不同特徵之向度，建立初始向度清單，包括每一向度的定義、說明與範例，再由ACD根據初始向度清單進行獨立分類，分類後針對歧異看法，加入E共四人進行多次討論，包括增刪向度、修改向度名稱與定義等，最後再加入B共五人，再次修改以確認向度的建構效度，以及每個向度之特徵異質性。建立「建議品質」向度的程序與建立「題目品質」向度類似：先採納題目品質的四個向度，將能納入這四個向度的建議先進行分類，所餘無法歸納於這四類的建議，重新以紮根精神產生新的向度。

(二)根據規準分類的階段：擬題品質部分，ACD三位的互評者信度為.92。建議品質部分，AC兩位研究成員的互評者信度為.99。

肆、研究結果

研究結果有以下三點：一、自由擬題的文字長度和題目內涵特徵，二、自由擬題的題目品質，高中低各群學生在各向度上的進步程度，以及三、同儕給予建議的效果。

一、擬題特徵

(一)文字長度

自由擬題的文字長度很不同於一般擬題活動。全班29位學生在版本四題目的字數平均數是101.86，標準差是41.01。自長條圖可以見得，高低二群於字數上尤有明顯之落差，其中：高分群為126.40字，中分群100.20次之，低分群76.44最少(見表5)。

自由擬題的字數特別長，遂與題目品質進行相關檢驗。本研究分別檢驗與難度和

表5：高中低三群學生擬題題目之字數

項目	高分群學生(n = 10)		中分群學生(n = 10)		低分群學生(n = 9)		整體學生(n = 29)	
	平均數	標準差	平均數	標準差	平均數	標準差	平均數	標準差
字數	126.40	46.38	100.20	36.63	76.44	21.81	101.86	41.01

鑑別度的關係。結果發現長度與題目難度有負相關：字數愈長，難度愈難 ($r = -.43^*$, $p < .050$)。可能的原因有二，一為：對於四年級學生來說，字數愈長，愈需要閱讀與文字理解力，多達五至十行的文字題看來也會覺得吃力，如學習單裡的表達：「有的題目很多字會讓我眼花但是我覺得很有趣」(I2_WS_M5)。二為：字數愈長，題目可能藏納愈多細緻的設計、涉及較多的數學概念、甚至是較多的陷阱，如學習單裡的表達：「有時候同學的題目不清楚。有時同學的題目，要思考很久，但我都會把題目寫完」(I2_WS_H25)。

擬題字數長度與題目鑑別度亦呈現負相關($r = -.45^*$, $p < .050$)。題目愈長，愈不能發揮鑑別度，可能小四學童對於文字的駕馭能力仍不夠成熟，題意若不清楚將導致高分群與低分群皆無法正常作答，鑑別度也將因此降低；再者，無論高中低分群的學生面對文字長的題目，一樣都會覺得難，如學習單裡的表達：「很多字又很難」(I2_WS_L4)，兩者都可能是字數愈多、鑑別度愈低的原因。

自願出一個較多字數的題目，反映著學生的興趣與投入度。學生不喜歡解佈題太長的文字題目，但卻都喜歡出很長的題目考同學，這是自由擬題活動所發生的有趣現象：字數長代表投入的時間多，而投入的時間多是出於「自願」，可見他們在出題的心境上，有著與解題截然不同的投入性，擬題可以改變他們對數學活動的興致。為瞭解自由擬題字數長度的可能意涵，以下將題目之情境布局加以分類，並找出題目特徵。

(二)情境題的特徵

字數較長的題目到底表現出什麼，值得進一步探索。透過自由擬題活動，小四學生以自身的生活經驗為材，生活中的真實情境大致分為四類。

1. 反映校園生活內涵(24%)

學生到校會發生許多事情，他們將在意的經驗與期待的心情入題，被他們入題的場景常是獎勵或懲罰。獎勵像是累積所做好事可以換各種等級的象徵物，如印章貼紙摸彩券，好的行為還包括當糾察隊第一名和各級幹部；壞的事像是打傷同學，被懲罰的方式是不能下課，例如累積到的象徵物，或是多少時間不能下課。舉一例如下：

郭品宏很喜歡和黃耀德玩，但是黃耀德不能下課，可是郭品宏還是和黃耀德玩了23次，後來郭品宏做了很多好事，所以老師讓他抵掉57分鐘，但是郭品宏不小心打傷了同學，所以老師又罰他76分鐘不能下課，請問郭品宏剩下幾分鐘不能下課？也就是幾小時幾分鐘？如果一天的下課時間只有30分鐘，那郭品宏是幾天幾時幾分幾秒不能下課？(和不能下課的同學玩的人，每次也不能下課12分鐘)(20120617黃揚2)

若沒有校園生活的共同經驗，這個例子可能就不清楚，因為不能下課的背後預設是：學生最珍惜下課時間，老師處罰學生的最有效方法就是「不能下課」，因此題意是

否清楚涉及讀題者與擬題者的共同經驗重疊程度，情境交代的「看似」不清楚是學生出題的一個基本特徵。有趣的情節是最後一行所附註的規則：和不能下課的同學玩的人，每次也不能下課12分鐘，但是佈題的思路是黃耀德不能下課，可是郭品宏還是和黃耀德玩了23次，顯現著小孩的真摯，友情遠比處罰所帶來的損失更重要，顯露出屬於小孩世界的人性(Silver, 1994)。

其他校園生活題目如：個人競賽活動常常會安排上課時間，整個學校各年級的演講比賽共花了多少上課時間；又如學生是體育校隊，將賽跑跌倒耽誤時間的心情與情節入題；校園解說員將校內景點古蹟的工程時間入題等。

小四學生在自由擬題之下的成品，與專家佈題的意境差距頗大。貼近校園的數學教科書題目，入題的情境很淡，如部編本第八冊第80頁的題目：「小可早上7時40分到學校，下午4時放學，小可在學校待了多少時間？」(國家教育研究院，2012)，相較之下，本研究中的題目，學生能將他們真正在意的規則或感受入題，對其他孩子的吸引力極為不同，如學習單所示：「做同學的題目時，我總覺得超級難得，就像在玩線上遊戲的智慧遊戲一樣，好有趣呢」(I2_WS_H18)。

2. 反映電玩世界經驗(17%)

對數位時代的部分小學生而言，電玩世界是生活的一部分。電玩世界的基本規則與遊戲世界觀都需要用到算數的概念，如道具的購買與消耗、抽獎機制、投資與報酬等等，可能超越國小課本現階段所教授的數學概念，但卻是每日遊戲世界中必有需要會的考驗，例子如：

多摩有一天當上了將軍，為了打仗，所以開始訓練軍人，可是，卻

因為太累而各死了10人，可是，他們都死而復生了，原來，每個人、動物都有兩條命，開始打仗，雙方各有1,000人，非洲象是戰寵，非洲象數量是兩個軍隊加起來的雙倍，所以，總共兩軍加起來，可以死幾次？(20120617倫鈞2)

電玩情境入題反映著更加走向生活數學化，但同時也帶來新的問題。玩家覺得題目情境親切，許多電玩次文化裡的遊戲基本概念，擬題者認為不須多做說明而眾所皆知，但是玩家功力有所不同，電玩經驗有限的同學和讀者，便有不同解讀，電玩經驗較少者提出建議：「請問你的非洲象是幾隻？當初太累又各死了十個人，他們到底有沒有死而復生？這些都要更清楚」(58-A401-7)

其他反映電玩世界經驗題目如：遊戲中把錢花去購買道具後，突破關卡賺取新的一批金錢，再購買道具的數量估計；訓練軍隊來打仗，且雙方的士兵與坐騎都會「復活」，整體可以「死幾次」等題目。

與第一類的校園生活情境題類似，這些電玩世界就是學生真實生活的一部分，能將生活中的數學概念拉進數學擬題活動裡，是極為理想的擬題境界，也是學生在挫折解題之餘，極為享受的另一種數學活動。因此，在專家眼中，這些自由擬題題目樣貌或許與當前的題目評價標準(如用詞精簡、文意清晰等)有所不同，但若確能達到提升數學活動興趣的目標，便是一種新的成功途徑。

3. 反映家居生活(21%)

家居經驗入題也因著自由擬題方式而呈現許多鮮活的表達。反映生活實踐是其一，與家人和朋友的相處，像是買東西逛街等金錢的消費和時間的花用是常見陳述，但有趣的是，不再只是平淡的數量與數值，而出現

真實生活裡的交易彈性。例如「老闆說滿500元就可以送50元」、「……老闆說杯子蛋糕每買4個送3個，媽媽最後拿到幾個杯子蛋糕？媽媽共花多少元？」它們反映小學生隨父母採購的真實消費經驗，而一般市面上課本題較少反映這類真實交易的經驗。

反映小孩心中的正義與價值是其二。題目的外貌混雜著電玩世界裡的熱門人物，但生活理路的鋪陳卻有著孩子望向成人世界的純真：

蛇姬是魯夫的女朋友，有一天魯夫邀請蛇姬去吃飯，他們坐計程車要30分，他們7:50在外面等，可是計程車晚到1時30分，計程車司機為了彌補過錯，付他們5,000元，他們為了公平，便把錢仔細的平分給對方，請問魯夫有多少元？蛇姬呢？他們什麼時候到餐廳？(魯夫原有1,300元，蛇姬原有3,000元)(20120617楨茹2)

主要題型是時間和消費金額兩種計算，洩漏孩子純真心思的細節是：計程車司機為了彌補過錯，付他們5,000元，他們為了公平，便把錢仔細的平分給對方，顯示小學生的世界裡，車子晚到是願意等待的，計程車司機是會賠償的，而男女朋友之間的帳務是公平的，在小孩的世界，人際往來單純而更有理想性。

還有以新聞人物林書豪為主角的題目。出題者表示電視訪問裡看到「林書豪每次出手投球都在想一個數學問題」，所以出了這樣一題：「林書豪最近好像是神附身一樣，0.2秒可答對3題數學，順便投進5顆3分球，請問他15分鐘後可答對幾題數學？順便投進幾顆3分球？」(20120617仲達2)

從成人的角度看，這題的數據設計瑕疵

為情境數據失當，過大或過小與事實背離(林碧珍，2003)，但小孩的回應是：「數字如果合理，就不叫做好像是神附身一樣」。小孩世界有自己的有趣與邏輯性，是自由擬題情境活動才能透露出成人／孩童世界的不同觀點。

4. 課本題型(38%)

在四個分類裡這一類屬於類似課本題型，共同特徵是僅問一種問題，例如花費、時間、長度、厚度、與重量等，會加上一些故事的轉折，造成解題者要處理較多的數據。例子如：「彎彎原本32公斤，因為吃太多東西，所以變成43公斤，他要減肥到38公斤，那他要減幾公斤？幾大卡？後來他又吃了十支熱量750大卡的大雞腿，所以現在又變成幾公斤？(減肥一公斤要運動消耗7,500大卡)(增加一公斤＝增加7,500大卡)」(20120617瑞琳2)。這個題目以單純的加減法為主，似乎為了增加題目挑戰性，出題者增加許多轉折，引發不易掌控的細節。許多的題目瑕疵正是來自這類的曲折細節，然而，這些題目正是展現學生生活與數學的一種連結，而不同主題特徵也反映學生的興趣所在，例如，校園生活類題目反映學童的真實校園生活脈動，電玩世界類題目反映數位世代住民已然將電玩世界的思維流通到他們的實體世界。自由擬題讓學生在數學的活動當中有所投入而自得其樂。

二、擬題品質

(一)各向度品質進步情形

根據「自由擬題題目品質評分規準」，版本四題目的總成績比版本一的總成績成長達顯著。兩個版本題目得分的平均數與標準差見表6，四個向度之中有三個均達顯著，分別為可解性、可讀性和精緻性，僅生活性未達顯著差異。

表6：自由擬題題目的各向度分數

向度	版本	版本一		版本四		<i>t</i> 值	<i>p</i> 值
		平均數	標準差	平均數	標準差		
1可解性		2.82	0.72	3.24	0.68	-2.59	.020
2可讀性		3.04	0.67	3.37	0.42	-2.84	.010
3生活性		2.43	0.71	2.48	0.65	-0.67	.510
4精緻性		2.63	0.95	3.15	0.73	-2.98	< .001
總分		10.91	1.68	12.24	1.54	-5.14	< .001

可讀性、生活性與精緻性三個向度的分數評定，是透過具體的特徵描述來判定。表4記載每一向度內，學童所擬題目符合該描述的情形，次數為全部29題目的加總。在可讀性向度，較不容易做到的是「2-3.沒有漏掉關鍵字、詞的情況」、「2-4.使用的數字與敘述皆合乎常理、邏輯」；在精緻性向度裡，較不易發揮「4-5.利用圖示或表格輔助題目敘述」「4-4.運算之外的數學概念種類數目有兩項以上」的能力。

從版本一到版本四的進步幅度來看(見)，透過互評的提醒，可讀性向度最容易提升的細目是「2-3.沒有漏掉關鍵字、詞的情況」，而在精緻性向度最容易提升的細目是「4-1.需運算的數字有經過有意義的設計」、「4-2.有精心安排的陷阱設計」。換言之，在互評者協助下，出題者容易察覺題意不清楚而在關鍵字句的改善上很有進展。

在多次修改之後，滿足比例仍然低於50%的細目有五個。分布在生活性與精緻性：「3-2.具有在地特殊性，或是具有該年齡層學童之特別經驗」、「3-3.與數學科之外的學科或常識有所連結」、「4-2.有精心安排的陷阱設計」、「4-4.運算之外的數學概念種類數目有兩項以上」、和「4-5.利用圖示或表格輔助題目敘述」。

在版本一到版本四的修改歷程後，「生活性」品質的提升程度是唯一沒有達到顯著

的向度。題目的不易變動來自兩方面：一方面，自出題者的角度探其原因，學生選定的出題素材靈感可遇不可求，在版本一出題決定後，大多不輕易在生活情境上變動。例如若一開始題材為「媽媽上街買菜、打折」的問題，情境大多不會修訂；另一方面，自建議者的角度探其原因，生活向度是個人經驗之展現，並無所謂的對錯問題，建議者較常對題目數字的「誇張程度」給予建議，如「想點生活中的，50,000份，太多了巴。可以把數字變小，算出的答案才不會太大」(CLP02)。此外，對於題目的題材與情境，同儕雖然覺得題目未臻完美，但也僅會給予「你的題目一點也不次(註：刺)激，也不好玩，而且就是加加起來而以(註：已)，又很容易一(註：易)破解，所以希望你出難一點」(4605_A302)。這類感受性的評語，而不會推薦一個「新的情境」，是故，同儕建議在推進生活性品質上不容易進展。

(二)高中低群進步情形

除了分析整體學生的擬題品質表現之外，本節以「解題」能力將出題學生區分高中低三群，檢視他們在一題多磨模組的「擬題」互評進步情形。以版本一與版本四的品質分數進行比較(見表7)。

三群的樣本數低，以描述統計檢視其變化。首先，每個向度的三群分數並非如常理預測：高分群最高或低分群最低，例如修到

版本四時，可解性這個向度，低分群的分數反而最高；可讀性這個向度，中分群反而最高；仔細地看，只有精緻性這個向度，分數沿著高中低三群由高到低排列；生活性這個向度，高分群沒有進展，低分群甚至退步。

何以高分群的「可解性」會低於低分群？自由擬題的自由度與考倒別人的企圖心，讓高分群學生急於發展複雜的文字題，而低分群的小本經營反而使得題目的瑕疵機會減低，下面的兩個例子(表8)呈現對比效果。

上面兩題來自高低分群學生的對比，展現文字駕馭能力對擬題可解性的作用。低分群文字駕馭的能力較為薄弱，用較少較短的文字佈題，由於簡單俐落，牽涉之概念與算式也不複雜，容易達到可解性的要求；而高分群的學生，雖數學能力較高，語文能力也可能較為優異，進而從數學概念或是陷阱上多予雕琢，卻由於過多著墨導致語意與題目

關鍵無法掌控，不少陳述有一種以上的解讀方式(如上一段畫線處)，使得可解性存疑，出現多處題意不清的瑕疵，導致可解性得分反而偏低。

描述統計的結果無法對高低分群的差異多做推論。但是表7數據多處顯示：以「解題能力」為基礎的高中低群，在「擬題表現」上，並未顯現出相應的差異趨勢，甚至出現低分群高於高分群，或是中分群高於高分群的異常情形，洩漏了一個潛在的探索線：自由擬題表現與解題表現可能來自不同的數學或其他能力。

三、建議品質與擬題品質的關係

合作出題是本研究焦點。出題之後歷經許多回合的建議與修正機會，同儕幫助的效果值得深探。

表7：高中低三群擬題品質各向度的平均值

向度	版本	高分群(n = 10)		中分群(n = 10)		低分群(n = 9)	
		版本一	版本四	版本一	版本四	版本一	版本四
1可解性		2.93	3.23	2.63	3.23	2.89	3.26
2可讀性		3.07	3.30	3.20	3.50	2.82	3.30
3生活性		2.70	2.70	2.17	2.47	2.41	2.26
4精緻性		3.03	3.67	2.50	3.07	2.33	2.67
總分		11.73	12.90	10.50	12.27	10.45	11.49

表8：高低分群所擬題目在可解性向度的比較

低分群(倉)得分4分

校長原有600隻布馬，校長平分給4年級的同學，一班有31人，四年級有八個班，平分完還剩下幾隻布馬？

高分群(宏)得分2.67分

10條白筆換1個印章，100個印章換1張葵花貼紙，10張葵花貼紙換1張摸彩券。(一樣好事加1/2個印章)哥哥每天都會做30樣好事，過二天生氣一次，每當他生氣時都會把10個印章丟掉，他每學期都會擔任自治市幹部、班級幹部，而且他每天都會擔任糾察隊以及第一名。請問哥哥他六年後全部換成摸彩卷會有幾張白筆、幾個印章、幾張葵花貼紙、幾張摸彩卷？(擔任自治市幹部或班級幹部每學期各50個印章，糾察隊每天50個印章，第一名30個印章，六年12學期，2學期一年)

(一)建議的面向與相關性檢驗

29個題目歷經步驟二、四、九等三個步驟的同儕建議活動，共蒐集328筆建議，平均一個題目收到11個建議。在八個建議向度之下，平均一個建議可拿到約1.3分(表9)，其中最大宗的建議偏向「情意面」占總建議數之比例高達四成五，次則為「精緻性」、「完備性」與「可解性」。從高中低分群給建議的傾向上，高低分群偏好「精緻性」而中分群偏好「可解性」，高分群最常提供「誤導性」的建議。而促進題目品質很重要的「可讀性」與「生活性」分數卻敬陪末座，顯示同儕並不青睞。

同儕的建議對修題是否有實質幫助？首先，採用相關分析法檢驗，每一個題目所獲得的建議品質分數、與題目第一版本到第四版本的各版本之間進步分數作為兩個變量進行相關分析。數據顯示建議第四向度「精緻性」和建議第六向度「情意面」都與題目品質第四向度「精緻性」的進步分數有中相

關，其相關係數分別為 .38與 .41 ($p < .050$)。次之，統計檢驗並不足以透析同儕合作修題的互助細節與翻修脈絡，茲以一個題目得到的建議與各版本因應的轉變，以完整呈現「一題多磨」同儕互相翻修的學習歷程。

(二)兩個例子

以下呈現兩例來說明「一題多磨」修題過程的建議內容與題目進展，這兩者是如何相伴發生，展現同儕的覺察確實能對部分題目有具體的推進貢獻。

1.增強題目品質與精緻性進展的例子

沿著擬題的各個步驟的順序，表10與表11依序呈現題目各階段版本與各階段同儕給予之建議。

這一題共有十則修改建議，同儕的關切形成三個焦點。第一是情境合理性。版本一「被店員吃了一半」的情節，歷經「被媽媽吃掉」(A302)、「店員根本就不會吃要賣的蛋糕，而且媽媽幹嘛要買被吃過的蛋糕」

表9：高中低三群學童所獲得的同儕建議於各向度貢獻之次數分配表

向度	組別		高分群(n=10)		中分群(n=10)		低分群(n=9)		整體(n=29)	
	次數	百分比	次數	百分比	次數	百分比	次數	百分比	次數	百分比
一、可解性	13	4	36	11	13	4	62	19		
二、可讀性	7	2	12	4	8	2	27	8		
三、生活性	3	1	0	0	5	2	8	2		
四、精緻性	26	8	19	6	29	9	74	23		
五、完備性	16	5	24	7	23	7	63	19		
六、情意面	45	14	53	16	49	15	147	45		
七、雜類	10	3	11	3	2	1	3	7		
八、誤導性	15	5	9	3	7	2	31	9		
總次數	135		164		136		435			

註：1.本表格之次數為高中低三組學童獲得的建議，涉及哪些向度的次數分配表。

2.表格中數據435之意義：328則建議的次數於各向度貢獻的總次數為435，而1則建議的內容，約涉及1.3個不同向度之貢獻。

3.百分比欄位中，雖建議總次(分)數為435，但為了呈現有多少比例的建議涵蓋某向度之貢獻，以328則為百分比計算之分母。

表10：同儕建議增強擬題品質的例子

步驟1：版本一		
媽媽去買一個三層的正方形蛋糕，第一層周長是80公分，第二層邊長是12公分，第三層邊長是第二層的一半，請問三層面積加起來是多少？如果第三層的蛋糕被店員吃了一半，請問一到三層的面積又是多少呢？		
步驟2：同儕建議		
店員根本就不會吃要賣的蛋糕，而	你可以寫第三層正方形蛋糕被店員	我覺得可以出得更刺激，有挑戰性，考倒別人，你的題目出得就像
且媽媽幹嘛要買被吃過的蛋糕。	吃一半，你寫媽媽買回家吃切蛋糕，不小心切掉50平方公分，被媽	我說的有挑戰性。(A301)
(A303)	媽吃掉199平方公分，然後寫請問蛋糕剩下幾平方公分？(A302)	
步驟3：版本二		
媽媽去買一個三層的正方形蛋糕，第一層周長是100公分，第二層邊長是16公分，第三層邊長是第二層的一半，請問三層面積加起來是多少？如果店員不小心吃了一半，媽媽又不小心切掉209平方公分的面積，請問一到三層的面積又是多少呢？		
步驟5：同儕試答後建議		
好難哦！(A405)	題目很有趣。(A403)	(空白)(A402)
你的題目可以多一些陷阱，比如	請問一到三層的面積是多少這一句	我覺得你的題目很難應能考倒全四
說：再多一個二層長方形蛋糕。	是要在寫答時寫3個面積的答案嗎？	年級呢！加油(A406)
(A404)	(A401)	
(空白)(A407)		
步驟7：版本三		
媽媽去買一個三層的正方形蛋糕，第一層周長是100公分，第二層邊長是10公分，第三層的邊長是第二層的2倍，請問三層面積加起來是多少？如果媽媽不小心把第三層蛋糕用掉1/4，又不小心切掉200平方公分，請問一到三層面積是多少？再多一個一模一樣的第二層蛋糕，那請問一到二層到第三層3/4到第二層面積是多少？		
步驟9：專家檢核後同儕建議		
我覺得你的題目可以再出難一點，你可以寫：「第一層50公分，第二層3.5公分，第三層60.9公分，媽媽不小心弄掉了30.1公分的蛋糕。這樣可以更好。(CLP01)		
步驟10：版本四		
媽媽去買一個三層的正方形蛋糕，第一層周長是100公分，厚度是5公分；第二層邊長是20公分，厚度4公分；第三層的邊長和厚度比第二層的少2倍，請問三層的體積是多少？媽媽切第三層蛋糕的一半給朋友吃，請問整個蛋糕剩下的體積是多少？		

(A303)、「媽媽不小心弄掉了」(CLP01)，到版本四定稿為「媽媽切第三層蛋糕的一半給朋友吃」，歷經同儕的交互修正，最終成為非常合理的故事情節。

第二是文句清晰性。版本一「請問一到三層的面積又是多少呢？」的問句，歷經「然後寫請問蛋糕剩下幾平方公分？」(A302)、「請問一到三層的面積是多少這一句是要在寫答時寫3個面積的答案嗎？」

(A401)，到最終版「請問整個蛋糕剩下的體積是多少？」，擬題者將關鍵問句改寫得更為清晰。

第三是展現度量錯誤之修正。版本一對於三層的蛋糕高度沒有著墨，歷經「再多一個二層長方形蛋糕」(A404)、「你可以寫：『第一層50公分，第二層3.5公分，第三層60.9公分』」(CLP01)，到版本四赫然從蛋糕面積修正為蛋糕體積：「第一層……

表11：同儕建議削弱擬題品質的例子

步驟1：版本一

榮鑫玩跑跑卡丁車，他有10,000個樂豆點，他要買2臺Z7系列的卡丁車，買一臺SR系列的卡丁車，然後買20個槌子，請問他剩下幾個樂豆點？用剩下的樂豆點買槌子，用無條件捨去法到百位。

Z7系列……429樂豆點

SR系列……195樂豆點

槌子……25樂豆點

步驟2：同儕建議

- | | | |
|---|---|---|
| 1.你可以講，主角不小心買錯什麼東西，買了幾個，如果其他東西也買了，那請問剩下多少樂豆點。 | 1.寫得太亂了。
2.項目太少了。
3.題目出的太簡單。
4.還可以寫他做了什麼事。(A102) | 字寫漂亮一點，字要寫大一點，你可以說買什麼樣的槌子，你的題目在改一點，就可以考倒別人，出得更刺激。(A101) |
| 2.把字寫清楚。 | | |
| 3.符號寫清楚。 | | |
| 4.字不要黏在一起。 | | |
| 5.字不要太小。(A103) | | |

步驟3：版本二

榮鑫玩跑跑卡丁車，他有1,000個樂豆點，他想買車子，可是他賣錯買到槌子，而且樂豆點也花光，他用槌子抽到4臺Z7的車，買2臺SR的車(永久)，抽到3種寵物(30天)，抽到25種氣球100顆，抽到6種頭飾(30天)，請問他剩下幾個樂豆點？

Z7系列……429樂豆點

SR系列……195樂豆點

寵物……85樂豆點

氣球……20樂豆點

頭飾……35樂豆點

步驟5：同儕試答後建議

不清楚，可以在寫清楚一點，30天 括號內的字我看不懂，你已經花完 我不清楚。是什麼意思，100顆是什麼意思，所樂豆點，因該要說她買了幾個槌 (A203)
以我「不會寫」><「剩下可以把子。(A202)
他改成得到」。(A206)

- | | | |
|----------------------------------|---|-------------|
| 他的樂豆點不是已經花光了，為什麼會還剩下多少樂豆點？(A204) | 1.什麼叫「27的車」？
2.槌子幾天？
3.樂點豆不是花光了嗎？(A201) | 寫的很好。(A205) |
|----------------------------------|---|-------------|

步驟7：版本三

(無，出題者請假)

步驟10：版本四

榮鑫完跑跑卡丁車，他有1000個樂豆點，他買兩臺Z7的車，之後他買氣球100顆，剛好樂豆點花完，請問一顆氣球值幾個樂豆點？(Z7系列：429樂豆點)

厚度是5公分；第二層……厚度4公分；第三層的..厚度比第二層的少2倍，請問三層的體積是多少？……請問整個蛋糕剩下的體積是多少？」。這些擬題歷程展現了同儕建議所

扮演的有效協助角色，而擬題者未必立即了悟同儕的建議，心理上也未必全然採納，但同儕多次建議引發當事人深度思索的課程安排，對修題品質的進展顯然有其重要性。

2. 削弱題目原先的豐富與原創性的例子

擬題的自由度使得題目往往反映出題者的生活經驗。當題目含有特定的生活經驗時，沒有共同經驗的伙伴給出的建議，對於出題者就會產生複雜的修改體驗。表11為完整的修題歷程，凸顯電玩經驗入題的同學面對沒有對等電玩經驗者的建議時，內心的抉擇歷程。

以電玩世界的遊戲經驗為底，小四學生在這一題的修改過程出現兩個深度截然不同的題目。版本一不需要用到任何電玩世界的知識，只考單純的加減法，第一輪的三個建議於是傾向修難一些，使得擬題者在版本二大舉引入電玩的專門知識，例如：「槌子」其實是一種「抽獎用福袋」的概念，抽到的道具有其固定的售價，而「福袋」本身的價錢可能高於抽到的道具，也可能低於抽到的道具，而玩家通常會比較自己在這次的抽獎經驗中，是否「賺了」、是否「回本」？其最後的問題想要詢問的概念是「投資一千點，然而用一千點抽到的道具總額是多少？」，這些都是玩家在遊戲世界裡面真實發生的狀況，是一種接近投資報酬率的高度複雜之概念。

同儕生活經驗不同，給的建議對當事人不一定都有幫助。一旦加入電玩專門知識，像是各種道具的「單位」，例如氣球以100顆為單位，頭飾則以遊戲天數30天為單位等等，六個同學裡面只有一個同學能賞識稱「寫的很好」(A205)，其他五位電玩門外漢的建議都是「不清楚」(A206、A203)、「看不懂……」(A202)、或「為什麼……」(A201、A204)，擬題者被這樣的一面倒批判而拋棄了題目原本的創意。這樣的合作磨題的幫助與否，取決於遊戲經驗的有無與電玩消費的投資多寡，而較不涉及數學能力。

擬題者在接受意見中遭逢挫敗。擬題者在版本四又把關鍵概念「槌子」整個刪去，幾乎回到版本一的單純運算，只是比版本一多了除法，在學習單裡，擬題者表示「很不喜歡」收到別人的建議，因為：「別人的建議要我重新想一個題目」，擬題者也很「不喜歡」因為別人的建議去修改自己的題目，因為：「我只喜歡自己的題目」，甚至對於合作出題，他覺得「很生氣」，因為「別人一直給我建議，改題目」(I2_WS_M15)，擬題者比較滿意自己原始的版本，但是同學因為看不懂而作罷，為了迎合多數人的理解，題目只能保留遊戲的表面情境。顧及多則來自遊戲外行者的建議，反而讓題目從蘊含深度的電玩知識，消滅到僅具有「清淡」的電玩味兒，對電玩當事人而言，擬題興趣遭逢不小的扼殺。

伍、討論與結論

本研究提出以「合作擬題」與「一題多磨」的概念設計課程，並發展題目品質與建議品質的評量規準。基於學生普遍對於擬題活動不熟悉導致困難度高，合作擬題鼓勵不同的學習數學的氛圍：一個人不會出題可以找人問、找人一起出題；一次出不好也可以一修再修，大家多次互相給意見，達到優於一「人」出題、一「次」出題的學習效果。

整體而言，值得深究的議題有二：第一，自由擬題到底好在哪裡？從本文中看出國小學生透過豐富的情境描述，反映他們確實察覺到真實生活經驗與數學脈絡的連結，舉例來說，部編本第七冊第50頁例題是這樣出：「10個李子賣80元，媽媽買了50個李子，要付多少元？」(國家教育研究院，2012)，但是本研究中的國小學生則是這樣出：「媽媽去糖果店買了11個巧克力、

18根棒棒糖……老闆說滿500元就可以送50元，……老闆說杯子蛋糕每買4個送3個，媽媽最後拿到幾個杯子蛋糕？媽媽共花多少元？」(I2_v4_珍)。換言之，自由擬題的學生主動展現出更強的數學與「外部」連結性，而這正是整個數學科解題活動長久忽略的重要學習面向。

分析佈題的情境顯示：電玩題目比例不低，有什麼深層的意義？數位世代的生活本即屬於「虛擬」情境，電玩世界的孩子在實體與虛擬世界之際進出自如，電玩世界沒有年齡的疆界，也沒有區分單元和概念來學習數學的傳統，他們往往能將電玩世界的生活邏輯、所磨練的數學概念融入下筆的佈題裡，所出的題目概念往往超越學校進度，這是值得肯定的現象，也是在結構和半結構擬題活動裡不易見到的驚艷表現。

自由擬題活動衝撞數學專業社群的傳統價值。一方面，題目的字數上，「少即是美，才是一個好的數學題目」的思維在數學社群一直受普遍認同，但自由擬題學生思路靈活、概念蓬勃、認真描述日常生活中的遭逢，反映學生生活理路。以四年級學生平均寫出一百字的數學題目，看出擬題活動對學生的意義，已經超過數學課的刻板解題。另一方面，學生在題目裡的數字設計，常有刻意過大或過小的意圖，並不以與事實相符為設計題目的標的，與事實背離的數據反而增加出題的樂趣，他們也深信數據的複雜性能提升題目的挑戰度。熱絡擬題的現象，同時也湧現一些新的價值，衝撞社群現正流通的意義。

第二項值得深究的議題是：一題多磨到底好在哪裡？多磨的代價如何評價？透過合作擬題與多次翻修的活動過程分析，本文從兩種取徑加以評價，一種是可化約為數據的：建議

向度與題目品質進步向度的相關分析，數據顯示同儕建議最能夠促進的面向是「情意面」的打氣加油，以及「精緻性」的反覆推敲協助，讓題目在精緻性上不斷推進。

另一種取徑則是真實的田野參與觀察。在這漫長的擬題過程的班級參與觀察裡，研究者與班級任課老師所感受到班級熱絡的活動氛圍，以濃郁的形式瀰漫在整個活動現場，顯示更真實的數學投入度。由於班級氣氛烘托的是合作而非競爭，不管是往昔數學表現好與不好的，大家都有自己的題目有待烘焙，班上每位同學的題目也歷經至少九位同學的試作與建議，人人有角色，個個有事做，能多幫忙的不受侷限，需要幫忙的也不會洩氣，這種全班熱鬧烘烘長達好幾個禮拜的投入氛圍，絕非傳統的數學解題活動所能締造。

然而，「一題多磨」的自由擬題尚處於探索性研究的階段，未來還有很多值得深思的方向。舉例而言，在同儕合作的意義方面，本文發現同儕之間一來一往的細細琢磨，同儕輪流擔任出題、修題、答題、改題等多種角色，省思機會遠遠多過傳統的學生解題老師改題；但是，什麼是同儕互相學習互相修正的極限？什麼是老師專家鷹架才能獲得進展的面向？這一條同儕協助與老師協助的邊界線(boundary)，是一個未來極有價值的探問方向。此外，在數學學習的情意方面，多次磨題磨出感情與遭受批評導致挫折的可能性各為何？多次修正花費許多時間，在可行性與價值性之間如何拿捏得當？對自己題目雕琢日久而滋生的擁有感與成就感，對他人題目形成過程的參與感，它們對於促進臺灣學生喜愛學習數學的具體效果為何，都是極為有趣的探索。

四種自由擬題特徵究竟揭露了什麼數

學教育上的意義？文字題情節寫得長固然瑕疵多，卻不能遮掩學生玩數學玩得開心的罕見現象。在臺灣以及前述亞洲五個在儒家思想影響下的東方社會，數學是主科，將數學讀好是一種特定的成就目標，具有較高的社會價值。不管學生的先天能力或後天努力是否得當，學生關係網中的重要他人例如父母師長，可能因為學生所扮演的社會角色是把書讀好與念好學校，而期許學生達成這個目標，於是，追求數學科的成就目標被視為這些社會裡個人應盡的角色義務，因此這種目標的內容和標準主要是由外在社會所選擇與界定的，學生有義務追求但卻不一定會對這些目標抱有內在興趣；另一方面，卻可能因為同儕之間比較成就高低的競爭心理，而呈現出某種程度的動機外貌。前者來自社會期許，稱為「縱向目標」，後者來自自我興

趣，稱為「個人目標」(黃光國，2009)。表1的數學成就高但數學興趣與自信低的數據，呈現的便是這些華人社會的小學生致力於滿足社會期許但自我興趣不高的忍耐美德。

本研究從「數學不等同於解題活動」出發，選擇具有創造活力的「自由擬題」活動來促進學生喜歡數學的可能性，欣見其忍耐與受苦的現象有所轉化，不但對於臺灣的數學教學有所應用，亦能對東亞儒家主義下五個國家的共同數學教育困境有所啟發。

誌謝

本文於科技部計畫NSC 100-2511-S-008-016-MY3及NSC 100-2511-S-008-015-MY3贊助下完成。

參考文獻

1. 林碧珍(2003)。生活情境中的數學。新竹縣教育研究集刊，3，1-19。
2. 馬秀蘭(2007)。學生思考過程之探究——以實務推理為例。科學教育學刊，15(4)，387-416。
3. 國家教育研究院(2012)。九年一貫數學部編本教科書國小數學課本。新北市：作者。
4. 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：作者。
5. 黃光國(2009)。儒家關係主義：哲學反思、理論建構與實徵研究。臺北市：心理。
6. Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 21(7), 633-636.
7. Belfield, H. H. (1888). *The revised model elementary arithmetic*. Chicago, IL: Geo. Sherwood.
8. Chang, K. N., Wu, L. J., Weng, S. E., & Sung, Y. T. (2012). Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. *Computers & Education*, 58(2), 775-786.
9. Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing process. *International Reviews of Mathematical Education*, 37(3), 149-158.
10. Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395-415.

11. Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271.
12. Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. [PME special issue: Problem posing in mathematics teaching and learning: Establishing a framework for research]. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.
13. English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.
14. Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471.
15. Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. [PME special issue: Problem posing in mathematics teaching and learning: Establishing a framework for research]. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 71-86.
16. Kontorovich, I., & Koichu, B. (2009). Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 401-408). Thessaloniki, Greece: PME.
17. Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149-161.
18. Lavy, I., & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 11-24.
19. Leung, S. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: Challenges and strategies. [PME special issue: Problem posing in mathematics teaching and learning: Establishing a framework for research]. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 103-116.
20. Lowrie, T. (2002). Young children posing problems: The influence of teacher intervention on the type of problems children pose. *Mathematics Education Research Journal*, 14(2), 87-98.
21. Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
22. Mullis, V. S. I., Martin, O. M., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

23. Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
24. Pelczer, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 4* (pp. 353-360). Thessaloniki, Greece: PME.
25. Perkins, D. N., & Salomon, G. (2012). Knowledge to go: A motivational and dispositional view of transfer. *Educational Psychologist, 47*(3), 248-258.
26. Poincare, H. (1948). Mathematical creation. *Scientific American, 179*, 54-57.
27. Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, S. J., & Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal of Research in Mathematics Education, 26*(5), 467-486.
28. Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14* (1), 19-28.
29. Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.
30. Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135.
31. Silver, E. A., & Mamona, J. (1989). Problem posing by middle school teachers. In C. A. Maher, G. A. Galdin, & R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 11th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education*. (pp. 263-264). New Brunswick, NJ: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
32. Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne, Australasia: Mathematics Education Research Group of Australasia.
33. Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. [PME special issue: Problem posing in mathematics teaching and learning: Establishing a framework for research]. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143.
34. Torrance, E. P. (1966). *Torrance tests of creative thinking: Norms-technical manual*. Princeton, NJ: Personnel.
35. Yu, F. Y., Tsai, H. C., & Wu, H.-L. (2013). Effects of online procedural scaffolds and the timing of scaffolding provision on elementary Taiwanese students' question-generation in a science class. *Australasian Journal of Educational Technology, 29*(3), 416-433.

36. Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. [PME special issue: Problem posing in mathematics teaching and learning: Establishing a framework for research]. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 117-132.

The Design and Evaluation of Free Math Problem Posing: A Collaborative Approach

Fei-Ching Chen¹, Chia-wei Chiang², Tieh-huai Chang², Belle Pei-Tsen Huang²
and Wei-Chang Shann^{3,*}

¹ Center for Teacher Education, National Central University

² Graduate Institute of Learning & Instruction, National Central University

³ Department of Mathematics, National Central University

Abstract

Problem-posing is usually dwarfed by problem-solving in school mathematics curricula. This study attempted to design a free-form problem-posing curricular module that incorporated collaborative strategies into the activities. The module took about 400 minutes to implement. The 4th grade participants were invited to pose a word problem free of any constraints on subjects or contents. Each initial problem would be evaluated through peer comments, trial work-outs, peer and expert inspections, and back-and-forth revisions, before it was considered a collectively owned asset. In order to evaluate the quality of the activities in each phase, this study developed a set of rubrics for the freely posed problems and the comments given by the peers. Dimensions of the rubrics were solvability, readability, reality, and sophistication. There were four types of comments: completeness, emotionality, misleadingness, and miscellany. According to the results, all posed problems were significantly improved through the revisions across all four dimensions of the rubrics, especially in the dimension of delicacy. As for the contribution of peer comments, the type of delicacy helped most, and that of emotionality followed. Findings of this study suggested that problem-posing involves abilities other than those in Mathematics, and is worthy of further investigation. This work also addressed the curriculum and rubrics design that might raise the ability of problem-posing and the enthusiasm of students on mathematical activities.

Key words: Collaboration, Peer Assessment, Rubrics, Mathematics, Problem Posing

* Corresponding author: Wei-Chang Shann