

國小教師數學教學知識之個案研究

陳彥廷

國立臺中教育大學 數學教育學系

摘要

過去，許多研究認為數學教學知識是數學教學的核心，但鮮少研究從動態觀點探究數學教學知識在數學教學過程中的整合。本研究運用「數學教學知識知覺量表」，提供二位國小個案教師自我評估數學PCK現況；並依據量表中數學PCK的五個面向，透過教學觀察與晤談，分析個案教師在數學教學過程中的數學PCK統整情形；進而比較個案教師自覺與實際教學所顯示的數學PCK的差異。蒐集的資料包括個案教師所填寫的「數學教學知識知覺量表」書面資訊、教學錄影及晤談語料。結果顯示：一、兩位個案教師在數學教學過程中所呈現的數學PCK整合，是以「學科內容知識」、「教學策略知識」與「教學表徵知識」為整合的核心；二、「課程與目標知識」與「學習成效評估的知識」與其他面向知識連結受限；三、兩位教師在「數學教學知識知覺量表」所知覺的數學PCK情形呼應本研究透過實際課室觀察所獲得的數學PCK map。

關鍵詞：國小教師、數學教學知識、數學教學知識知覺量表

壹、前言

近二十多年來，關於教師知識的研究，包含許多不同面向。Shulman (1986)鑑於許多學者甚至實務界教師逐漸重視促進學生學習之教學法與教學技巧等實務知識(如：Elbaz, 1983)，而忽略學科內容知識之際，主張教師教學的知識應融合學科知識與教學知識，因此提出學科教學知識(Pedagogical Content Knowledge, PCK)的觀點。而Shulman (1986, 1987)所提關於教師PCK的觀點，算是近年來數學教育探究教師教學知識研究的濫觴。後續，有許多學者(Ball, 1990; Eisenhart et al.,

1993; Fennema & Franke, 1992)基於Shulman的想法，針對教師進行數學教學時所需的數學知識及如何使用這些知識進行探究，進而提出不同觀點。可見，數學教師所應具備的教學相關知識內涵受到數學教育學者持續的關注與重視。

Cheang, Yeo, Chan與Lim-Teo (2007)指出，PCK強調的是教師能掌握主題內容知識(Subject Matter Knowledge, SMK) (例如：他們知道教些什麼)和教學知識(pedagogical knowledge) (例如：他們知道教學相關知識)的關係，以及主題內容知識如何成為教學推

*通訊作者：陳彥廷

(投稿日期：民國103年11月9日，修訂日期：民國104年3月26日，接受日期：民國104年6月13日)

理過程中的一部分。因此，Shulman (1986)認為，PCK意指教師知道如何表徵想法及有效類比、圖解、舉例、說明與論證的最有用的形式。也就是將制式化(formulating)的主題內容知識表徵成其他可理解的形式。由此看來，PCK即是教師在進行專業領域教學過程中所涉及的知識。然而，要界定與測量教師的數學教學知識其實並不容易。因為數學教學知識是融合一般教學知識、對數學學科具有深層理解以及熟稔數學獨特教學規準的知識(Cheang et al.)。Ball (2000)也認為，教師對於PCK理解的深度將會決定他在教學中所使用的例子、解釋、練習題目以及對學生的回饋。而針對這些知識內涵，則有許多不同的觀點(例如：Cochran, 1993; Hashweh, 2005; Loughran, Berry, & Mulhall, 2006)，可說是眾說紛紜。但是，多數學者同意Shulman (1986, 1987)所述，PCK是教師能將主題內容知識表徵成學習者容易理解之內容的知識。這些知識包括瞭解如何將特定主題、問題或議題加以組織、表徵及傳遞給具不同能力或興趣的學習者，也就是如何表徵的教學方式(Shulman, 1987)。對此，陳彥廷(2014)綜合國內外相關文獻進行分析，並以量化統計的方法，將教師的數學教學知識分為「課程與目標知識」、「學科內容知識」、「教學策略知識」、「教學表徵知識」、「學習成效評估知識」等5個面向，並據此編製成具信、效度之「國小教師數學教學知識知覺量表」，以提供國小教師自我檢視其擁有的數學教學知識內涵。

雖然諸多學者對於PCK有不同看法，但多數學者(Cohen & Yarden, 2009; Veal & Kubasko, 2003)都已開始探究，這些PCK的面向彼此間如何相互影響而形塑學科教學知識的結構。但是，這些研究只聚焦在PCK中的

一個或兩個面向，檢視這些特殊的面向彼此間的關聯；或是這些面向如何發展以及影響教師整體的PCK或實務(Kamen, 1996; Matese, 2005)。但是，這些成分間互動的本質與動態歷程至今並未完整被理解與描繪(Park & Chen, 2012)。對此，Park與Chen提出一個探究教師PCK整合歷程分析的方法，認為教師擁有的PCK在教學過程中是處於一個動態流動的狀態，並且，PCK各成分間是彼此交互作用與影響。

鑑此，本研究站在陳彥廷(2014)所開發的量表以及Park與Chen (2012)所發展之PCK整合歷程分析的基礎上，從量表中PCK所包含的面向出發，探究兩位國小個案教師在進行數學教學時，所呈現的數學教學知識之內涵與動態整合情形。茲羅列本研究目的如下：

- 一、理解兩位個案教師自覺的數學PCK內涵。
- 二、探究兩位個案教師在不同主題單元教學中呈現之數學PCK整合。
- 三、分析兩位個案教師自覺數學PCK與教學中呈現之數學PCK整合的差異。

貳、文獻探討

一、教師數學教學知識

關於教師PCK，Shulman (1986)首先提出此想法進一步思考教師的知識，他認為教師能將主題內容知識轉化為教學素材知識是重要的。因此，PCK是將主題內容知識轉化為學生更可理解的知識。也就是教師對「從能夠理解主題內容知識到能夠以新的方式詮釋該主題內容知識；重組、分割主題內容知識；運用活動與情感包裝；運用隱喻與練習；運用舉例與論證，讓學生更加掌握此主題內容知識」的轉化過程(Shulman, 1987)。

此觀點也區分了一位教師與學科專家的差異，因為教師要擁有PCK，象徵他必須同時具備主題內容與教學所交織而成的相關知識，這包含教師應該要知道學生在現階段年齡發展所要學習的主題內容、該如何呈現以及如何達成概念性的理解(Loucks-Horsley, Hewson, Love, & Stiles, 1998)。

延續上述想法，許多學者(Ball, Thames, & Phelps, 2008; Grossman, 1990; Magnusson, Krajcik, & Borko, 1999; Marks, 1990; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1991; Park & Oliver, 2008)提出許多關於PCK的模型。他們所提出的PCK模型中，較大的差異在於主題內容知識(SMK)與PCK間的關係(Kind, 2009)。例如：Ball等、Grossman及Magnusson等認為SMK與PCK是建構在教學之上的兩個分離成分；但Marks認為：PCK包含SMK。雖然大家的觀點不盡相同，但這些模型有一個共通點，就是所有學者都更精緻化Shulman (1986, 1987)的想法，分析PCK的組成面向或透過實證資訊或研究者個人的信念為PCK注入新的元素(Kind; Park & Chen, 2012)。總的來說，PCK是一個綜合許多面向而組成的知識(Abell, 2008)，因此，多數學者(Friedrichsen et al., 2009; Park & Chen, 2008; Park & Oliver)同意，教師所擁有PCK的層次取決於教師個人內心中PCK組成面向間的整合程度；而且，教師的知識是無法脫離所處的情境與脈絡，這些知識是在活動、文化與脈絡交互作用下發展與改變(Fennema & Franke, 1992)。綜合上述觀點，研究者認為，欲探究教師數學教學時所涉及的知識，學科的主題內容知識勢必無法忽略。因此，研究者較贊同Marks所持：PCK應包含SMK的觀點。

因此，本研究為探討兩位個案教師的數學PCK，首先，先行建構本研所欲探究

之數學PCK內涵。從數學教育的觀點來看，NCTM (1991)在《數學教學專業標準》一書中提到，教師教數學時應具備五種能力與知識：對教學材料與資源理解的知識、表達數學概念和過程的知識、組織教學策略與課堂模式的知識、促進課堂互動與培養數學集體意識途徑的知識及評定學生數學理解的知識。Fennema與Franke (1992)分析關於數學教師的相關文獻，提出教師的知識包括數學知識、對學習者認知的知識及教學法知識。此外，Ball與Rowan (2004)從數學教學實作過程檢視教師所使用的知識，以瞭解教學中所需要的數學知識以及這些相關知識如何被教師使用。因此，提出了數學教學的知識(MKT)模型，認為教師進行數學教學時會使用的知識包括兩大類別：一類是主題內容知識(SMK)，包括特殊內容知識(Specialized Content Knowledge, SCK)、一般內容知識(Common Content Knowledge, CCK)、數學水平內容知識(Horizon Content Knowledge, HCK)；另一類則是學科教學知識(PCK)，包括內容與學生知識(Knowledge of Content and Student, KCS)、內容與教學知識(Knowledge of Content and Teaching, KCT)、內容與課程知識(Knowledge of Content and Curriculum, KCC)。

綜合上述觀點(詳見表1)，本研究將教師數學PCK的內涵分為五個面向：(一)課程與目標知識：是指教師能理解數學課程內容的沿革、課程架構、教學目標與資源等相關知識。屬於NCTM (1991)所稱「教學材料與資源理解的知識」、Ball等(2008)所稱「內容與課程知識」及Marks (1990)所稱「媒體資源知識」；(二)學科內容知識：是指教師能理解教學單元的概念內涵與運算法則、學生學習此單元前的先備知識及他們在此單元可能產生的迷思等相關知識。屬於Fennema與

表1：教師數學教學知識面向彙整

學者主張	PCK面向	教學表徵知識	對學習者認知的知識	教學策略知識	促進課堂互動與培養數學集體意識途徑的知識	對教學材料與資源理解的知識	評定學生數學理解的知識	數學知識
NCTM (1991)		✓		✓	✓	✓	✓	
Fennema與Franke (1992)			✓	✓				✓
Ball等(2008)						✓		✓
Marks (1990)		✓	✓	✓		✓		✓
研究者綜合彙整		教學表徵知識		教學策略知識		課程目標知識	學習成效評估知識	學科內容知識

Franke (1992)、Ball等以及Marks所稱「數學知識」；(三)教學策略知識：是指教師能擁有教學過程中所需的一般教學策略知識。屬於NCTM所稱「組織教學策略與課堂模式的知識」與「促進課堂互動與培養數學集體意識途徑的知識」、Fennema與Franke所稱「教學法知識」及Marks所稱「教學策略知識」；(四)教學表徵知識：是指教師具備教學過程中可能使用的活動、舉例、示範、說明(例如：圖表、口說、符號……)，以幫助學生學習的知識。屬於NCTM所稱「表達數學概念和過程的知識」、Fennema與Franke所稱「對學習者認知的知識」、Ball等所稱「內容與學生知識」；(五)學習成效評估知識：是指教師能運用適當的評量方式評估學生的學習成效。屬於NCTM所稱「評定學生數學理解的知識」。而陳彥廷(2014)藉此架構，透過探索性因素分析、驗證性因素分析及信、效度考驗開發「國小教師數學教學知識知覺量表」，該量表經項目分析、探索性因素分析檢驗、修訂後，形成知覺量表共17題，再透過結構方程模式進行驗證性因素分析檢驗量表的構念效度，結果顯示，此量表的測量模式與觀察資料適配度大致良好；整體信度(Cronbach's alpha值)為 .919，各分量表的信

度介於 .644至 .837之間，具有良好的信度與效度。

因此，本研究站在此架構的基礎上，讓兩位國小個案教師透過該量表檢視自身的數學PCK風貌，並從兩位個案教師實際進行數學教學的過程中，探析他們呈現的數學PCK樣態。

二、教師數學教學知識的互動與整合

過去，許多關於教師知識之研究(例如：李源順、林福來、呂玉琴、陳美芳，2008；林碧珍、蔡文煥，2007；劉曼麗，2008；鍾靜、張淑怡、陳幸玫、陸昱任、戴坤邦，2012；Fennema & Frank, 1992)大多建立相關的知識面向，或建構對應的指標，以檢視教師所具備的數學教學相關知識。這屬於從靜態的觀點審視教師所具備的專業知識狀態。然而，有些研究(Berliner, 2001; Meijer, Verloop, & Beijaard, 1999)指出，教師所具備的教學知識會隨著教學的進行，而不斷地連結與整合。Krauss等(2008)的研究比較198位數學教師的學科內容知識(CK)與PCK發現，數學專業的程度取決於教師個人所擁有CK與PCK兩種知識的連結程度。此觀點支持研究

者先前所論述「探究教師PCK，就無法脫離CK」的觀點，也說明「教師的PCK會隨著教學的進行，而呈現動態整合」的意義。

延續上述「教師的PCK是在教學過程中呈現動態整合」的觀點，有兩種研究取向逐漸開展 (Park & Chen, 2012)。一是探究PCK的其中一個面向知識如何影響其他面向的知識 (Abell, 2008; Cohen & Yarden, 2009)，例如，Abell探究教師「對學生理解的知識」如何影響「教學策略知識」。Cohen與Yarden則探究教師的「特定主題的課程知識」如何影響「教學策略知識」；另一個取向，則是在檢視PCK的某個面向知識與整體PCK之間的關連。例如，Clermont, Krajcik與Borko (1993) 發現，教師「對學生在特殊主題先備知識、學習困難及推理類型的理解」影響其PCK的發展。Matese (2005)則發現，教師的「評量知識」影響其教學知識與實務。而Hashweh (2005) 針對上述兩種研究取向建議，我們應該更深一層去探究PCK這些面向彼此間如何互動，以及這些互動的狀態如何影響教師的教學實踐。

因此，Park與Chen (2012)依此觀點，提出「PCK成分整合歷程圖」(integration of the components of pedagogical content knowledge)，藉此分析科學教師在「特定主題」教學過程中，所呈現PCK各面向間的整合情形。而此「PCK成分整合歷程圖」的分析，首先是植基於該研究團隊所發展的PCK面向，以個案教師在進行教學過程中的「PCK事件」為單位，分析個案教師在教學中每個「PCK事件」所涉及的PCK各面向知識，最後繪製成教師在特定主題中的PCK map。以下，茲闡釋其分析步驟如下。

(一)切割教學過程中的PCK事件

首先，從個案教師的教學影帶中切割教學的片段。而教學片段的切割判準如下：

- 1.教師PCK的展現，是教師在教學過程中呈現兩個或多個面向整合的歷程。
- 2.當一個教學片段顯示同時涉及兩個或多個PCK面向時，稱為一個「PCK事件」。
- 3.而這個PCK事件是從教師與學生互動的行為中看見，顯示PCK的面向在PCK事件中互動與整合。

(二)確認每個PCK事件中PCK面向的出現次數與整合

上述PCK事件中，PCK面向整合過程的描述，主要是從觀察並輔以晤談與相關文件支持而獲得。當研究者確認PCK的面向在一個PCK事件中被整合時，就把焦點放在PCK各面向出現的次數，以及關注有哪些PCK面向出現在這個PCK事件中。換言之，即計算出PCK事件中PCK各面向出現的次數，以及此事件中有哪些PCK面向被整合。

(三)繪製教師教學過程中的PCK map

當每一個PCK事件中的PCK各面向分析完成後，Park與Chen (2012)便在他們所建構的PCK面向架構中，將同一個PCK事件所涉及的PCK面向畫上連結線(圖1中各面向旁的數字代表該面向在教學過程中出現的次數；連結線上出現的數字代表在教學過程中產生連結的次數)。圖1為Park與Chen研究中一位個案教師在一堂課室教學中，所呈現的PCK各面向知識整合的情形。最後，再計算出教學過程中PCK各面向出現的總次數，及各面向連結的總次數。當面向與面向間的連結次數愈多，則連結線就會愈粗。最後，形成教師在該堂課教學的PCK map。

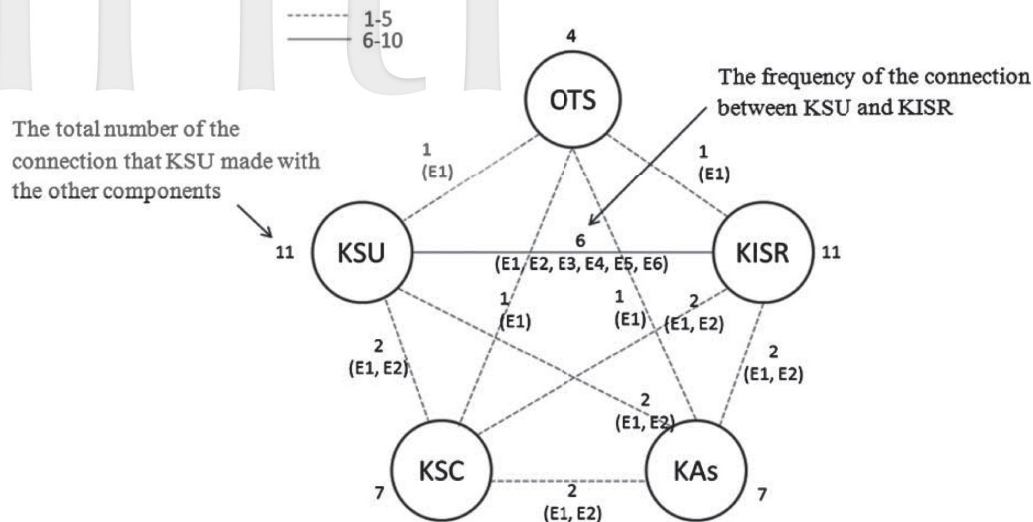


圖1：個案教師的PCK map整合

資料來源：“Mapping Out the Integration of the Components of Pedagogical Content Knowledge (PCK): Examples from High School Biology Classrooms,” by S. Park and Y. C. Chen, 2012, *Journal of Research in Science Teaching*, 49(7), 930.

基於研究者所持「探究教師PCK，就無法脫離CK」以及「教師的PCK會隨著教學的進行，而呈現動態整合」的觀點，本研究將以Park與Chen (2012)分析教師進行教學所呈現的PCK map為基礎，運用陳彥廷(2014)所開發的「國小教師數學教學知識覺量表」，並以此量表的數學PCK面向作為分析面向，探究兩位國小個案教師在進行兩個單元的數學教學時，所呈現的數學PCK整合情形。

三、教師數學教學知識相關研究回顧

過去，已有許多研究針對數學教師的專業知識進行探究。其中一個取向，是數學教師專業標準或面向的建立(李源順、呂玉琴，2006；李源順等，2008；林碧珍、蔡文煥，2007；劉曼麗，2008；鍾靜等，2012；Thornton & Morony, 2005)，而涉及的教師身分包括職前教師、初任教師、一般教師、輔導教師。然而，儘管不同專業標準所使用的

分類與專業名詞不盡相同，但他們所建立關於教師的數學專業標準大致包含數學內容知識、一般教學知識、數學教學知識、數學課程知識、學習者數學認知知識、情境脈絡知識、數學評量知識(鍾靜等)。然而，由於研究者認為教師進行數學教學時，所使用的數學PCK無法脫離CK而進行分析。因此，本研究採Marks (1990)所提「PCK應包含SMK」的觀點，進而形成PCK的面向：課程與目標知識、學科內容知識、教學策略知識、教學表徵知識、學習成效評估知識。而這些PCK的面向亦經過相關的量化分析、考驗，也與過去研究成果相符合，故適合作為本研究分析個案教師數學PCK的依據。

研究的另一個取向，是透過學習歷程促進教師數學PCK發展，這些學習歷程包括專家教師輔導模式(陳品婷、李源順，2011；陳彥廷、康木村、柳賢，2010)、學習社群模式(李源順、林福來，1998；李咏吟、趙曉美、李孟

文、蔡曉楓、陳鏗任，2008；姚如芬，2006；張宇樑，2010；Engeström, 1994; Matsumura & Steinberg, 2002)。這些研究均發現，參與的教師都在培育的過程中達成專業成長。

但是，研究者發現，「數學PCK在教學過程中是動態流轉」的想法，似乎在數學教育領域較為少見。因此，本研究企圖從這個角度出發，審視兩位國小個案教師在進行數學教學過程中，其數學PCK各面向的整合情形，以提供未來促進教師數學PCK發展的參考。

參、研究設計與實施

一、研究方法

本研究旨在運用陳彥廷(2014)所發展的「數學教學知識知覺量表」架構，透過課室觀察與晤談，分析兩位國小個案教師在數學教學實踐中，數學PCK整合情形的差異。此外，Gibson與Dembo (1984)指出，若教師能擁有好的教學效能感，那麼他對於自己以及學生也比較有信心，較相信自己能把書教好且能勝任愉快。因此，本研究亦基於此觀點，讓兩位個案教師填寫「數學教學知識知覺量表」，以探究他們對自身數學PCK的評估。最後，再從量表資訊與教室觀察的相關資料，檢視他們自覺的數學PCK與教過程中表現出來的PCK整合情形間的差異性。

而郭生玉(1997)指出，個案研究意旨採用各種方法蒐集有效的完整資料，對單一個人或社會單位做縝密而深入研究的方法。由於本研究期望有別於過去研究「從靜態觀點」看教師的數學PCK發展，而是「從動態觀點」審視教師在數學教學過程中，數學PCK各面向的互動與整合，屬較新的嘗試方向。因此，本研究先行以兩位教師作為個案，企圖從深入理解個案教師在數學教學過程中的數學PCK整合情形，進而建立可供分

析教師數學PCK發展的新取徑。故本研究屬個案研究。

二、研究樣本

本研究邀請兩位在國小擔任數學領域教學之教師接受研究者的探析。研究者選擇此兩位教師的原因有三：(一)研究者與兩位教師屬舊識，當研究者邀請他們參與本研究時，他們都顯示有高度的興趣；(二)兩位教師其中一位教師阿倫，已具10年教學經驗，他曾擔任南部某縣市數學領域國教輔導團輔導員，對於數學領域的學科知識、課程設計與教學方法等素養，尚稱熟稔；另一位教師小容，則初入國小教學現場，可稱為生手教師；(三)兩位教師一位是數理科系畢業，另一位則非數理科系畢業。

然而，Shulman (1987)指出，教師在教學過程中所需要的各種知識，以「學科教學知識」(PCK)最為重要。這也是區別具有專業知識的專家與會教這門知識的教師最明顯不同之處(邱美虹、江玉婷，1997)。因此，本研究在樣本的選擇上屬立意取樣，其相關背景如表2所示。

三、研究工具

(一)數學教學知識知覺量表

本研究運用陳彥廷(2014)所開發之「數學教學知識知覺量表」，來瞭解教師對自身數學教學知識的感知。量表中包含五個面向，共17道題目。該量表的測量模式與觀察資料適配度大致良好，整體信度為.919，各分量表的信度(Cronbach's α 值)介於.644至.837之間，具有良好信度與效度。量表的施測時間為10～15分鐘，題目作答選項採取Likert五點設計形式，分別為「總是如此」、「經常發生」、「偶爾發生」、「很少發

生」、「從來沒有」，記分的方式則依序以5至1分計算。

(二)個案教師的教學單元

由於本研究旨在探究兩位個案教師在進行數學教學時，所呈現的數學PCK整合情形；並將此結果與他們在「數學教學知識知覺量表」中的數學PCK自覺情形進行比較。因此，本研究選擇進入兩位教師的數學課室進行觀察與探究。然而，Baxter與Lederman (1999)指出，PCK成分間的互動與整合，會隨著主題與脈絡的特殊性而有差異。因此，研究者在「數與量」及「幾何」主題中，各

擇取一個單元，進入兩位教師的數學課室進行觀察，期待除了比較兩位個案教師在同一個教學單元中所顯示的PCK map之外，也希望比較同一位教師在不同主題單元的PCK map。

但是，依目前國民小學的課程進度來看，每個單元進行時間約一週(三節課)，這涵蓋主要教學以及習作討論與評量時間。因此，研究者僅選擇主要教學的一堂課進班觀察。換言之，即每位教師在每一個單元教學過程中，被觀察的時間為一節課。兩位教師教學的單元與內容，見表3所示。

表2：個案教師背景分析

背景資料	化名	阿倫	小容
性別		男	女
教育程度		學士	學士
專業背景		非數理科系畢業	數理科系畢業
主要領域專長		語文領域	數學領域
教學年資		10	1
經歷		南部某縣市數學領域國教輔導團輔導員	無

表3：個案教師的教學單元分析

教學單元	第1單元：最大公因數與最小公倍數		第2單元：圓	
主題屬性	數與量		幾何	
教學目標	1. 認識短除法的計算 2. 運用最大公因數與最小公倍數解題 3. 理解互質的定義		1. 認識圓周率 2. 解決圓周率應用問題 3. 理解圓面積的公式原理及計算	
教學概念	1. 最大公因數 2. 最小公倍數 3. 互質		1. 圓周率 2. 圓面積	
教師	阿倫	小容	阿倫	小容
教學方法	1. 提問引導討論、分享 2. 綜合論述	1. 數學解題 2. 上臺分享、全班討論	1. 數位媒材詮釋概念 2. 提問引導討論、分享 3. 綜和論述	1. 引導學生進行實作 2. 講解說明
學習情境	數學寫作	數學解題	資訊科技融入 數學寫作	動手做
評量方式	口頭報告、課堂巡視	口頭報告	口頭報告、課堂巡視	口頭報告

由表4觀之，兩位教師的教學活動設計，都是從「建構主義」的觀點出發。在「數與量主題」，阿倫是透過「小組合作數學寫作」的情境，引導學生從解題歷程中理解數學概念，藉由同儕討論、分享及教師做總結性彙整的方式建構知識；小容則是透過「個人解題」、「上臺分享」與「全班討論」的方式，從解題過程中建構數學概念。在「幾何主題」，阿倫是運用「數位媒材：Flash」引入圓周率、圓面積等相關概念，透過「提問」的方式引導學生進行「數學寫作」以促進理解；小容則透過「學生動手操作」情境，引導學生從視覺理解「圓周率」概念，藉由實作與講解說明的方式建構知識。而阿倫多是從學生的口頭報告與課間巡視，來掌握學生的學習情況；小容則從學生的口頭報告中，掌握他們對於知識的理解情形。

四、資料蒐集與分析

(一)問卷調查——個案教師數學PCK的自覺

為了瞭解兩位個案教師自覺所具有的數學PCK內涵，研究者在進入個案教師數學課室，進行教學觀察前，先行請兩位教師填寫「數學教學知識知覺量表」，並將此資料與研究者在兩位教師數學課室進行教學實踐，所獲致的數學PCK整合情形進行比較，以回應本研究相關的研究目的。其中，量表的資料是以描述性統計(總分、平均分數)的方式呈現。此外，本研究亦以個案教師的「背景晤談」語料為輔助，以交叉比對個案教師對自身數學PCK的自覺情形。

(二)觀察與晤談——個案教師PCK map的繪製與比較

為了分析兩位個案教師在「數與量主題：最大公因數與最小公倍數」以及「幾何主題：圓」兩單元教學過程中，數學PCK各

面向整合的情形與差異，本研究以非參與式課室觀察並輔以晤談的方式進行相關資料的蒐集。

在非參與式課室觀察部分，本研究於兩位個案教師進行數學教學過程中進行全程錄影，而研究者也會記錄當下所觀察到值得討論的個案教師行為，於教學後以「觀察後晤談」的方式與個案教師針對這些行為背後的想法進行確認。關於教學過程中師生的對話資料，本研究以「倫-1-教-006」代表這是阿倫在第1單元教學中的第6句對話。本研究分別觀察每位個案教師在每個單元的教學一堂課(40分鐘)，總計蒐集4堂課(160分鐘)的師生對話語料。

在晤談部分，本研究使用了「背景晤談」、「觀察前教學計畫晤談」與「觀察後晤談」等三類半結構式晤談。其中，對每位個案教師分別進行1次「背景晤談」，主要在瞭解教師的教學背景、對數學教學的看法及對於「最大公因數與最小公倍數」、「圓」教學的相關知識(晤談問題見表4)。因此，每位個案教師接受「背景晤談」1次，晤談時間約30～45分鐘。然而，Hashweh (2005)指出，PCK會出現在教學計畫、過程中的互動與教學後的行動中。因此，本研究於個案教師進行教學前，也針對他如何規劃課程、教學目標為何、如何規劃評量進行「觀察前教學計畫晤談」，因此，每位個案教師接受「觀察前教學計畫晤談」2次，每次晤談時間約40～50分鐘。最後，當每位個案教師完成1個單元的教學後，研究者則針對他教學後的反思(特別是教學過程中觀察者所觀察到發生的事件)……等議題進行「觀察後晤談」，讓每位個案教師有機會說清楚他教學決定的理由(晤談問題見表4)。因此，每位個案教師接受「觀察後晤談」2次，每次晤談時間約40～50

表4：本研究晤談題幹

晤談類型	晤談題目		
	編號	內容	資料編碼／代表意義
背景晤談	I-1	您過去有多少年的數學教學經驗？涉及的年段是那些？	倫-1-背晤-2-03／阿倫老師在背景晤談針對I-2問題的第3句對話。
	I-2	您認為數學課的教學應該如何進行？為什麼？	
觀察前教學計畫晤談	II-1	請說明您規畫此單元教學活動的想法為何？	容-2-前晤II-1-09／小容老師在第2個教學單元之觀察前晤談針對II-1問題的第9句對話
	II-2	請說明您在實施本單元教學的教學目標為何？	
	II-3	您在本單元教學時如何評估學生是否達成您期望的目標？	
觀察後晤談	III-1	請說明您對此單元教學後的想法為何？	倫-1-後晤III-12-05／阿倫老師在第1個教學單元之觀察後晤談針對第12個PCK事件的第5句對話
	III-2	您認為，您有達成原先規劃的教學目標嗎？	
	III-3	您在教學過程中，為何會採取這樣的措施？	

分鐘。上述「觀察前教學計畫晤談」與「觀察後晤談」過程，研究者都全程錄影並將對話轉譯為文字稿，再進行後續分析。

上述的「非參與式課室觀察對話語料」，主要作為本研究描繪兩位個案教師在教學過程中，呈現數學PCK各面向動態整合歷程的資料。至於分析這些語料的方式，主要參考Park與Chen (2012)發展的「PCK成分整合歷程圖」之分析方式。而此圖的繪製，則是透過深入分析教學過程中的PCK事件(Park & Oliver, 2008)、列舉途徑(LeCompte & Preissle, 1993)與恆常比較法(Strauss & Corbin, 1990)三個管道分析而得。以下，茲輔以研究過程中獲致的一部分資料，說明分析步驟如下：

1. 切割教學過程中的數學PCK事件

個案教師的教學行為，若研究者認為具有數學教學的意義，並經「觀察後晤談」中個案教師確認，即確定為一個數學PCK事件。舉例來說，阿倫在第1單元教學時(參見表5教學事件內涵)，研究者認為：「他依序引導學生從讀題、瞭解題意、思考這題目涉及的數學概念、如何表徵題意、解題並與同儕討論」(阿倫-1-事件1)，經過阿倫確認對

話背後真正想法後，決定將此「引導學生解題」的過程定為第1個數學PCK事件。

2. 確認每個數學PCK事件中涉及的PCK面向整合情形

當研究者完成每位個案教師在每個單元教學的數學PCK事件切割後，接續，則繼續進行每個數學PCK事件涉及的數學PCK面向確認。而此項任務，除了研究者自行判斷外，研究者亦邀請另外一位數學師資培育者，分別針對每個數學PCK事件進行分析，再與個案教師透過溝通、協商的方式，達成三人都同意的結果，以判定此數學PCK事件涉及的數學PCK面向。研究者再以阿倫在第1單元教學時第1個數學PCK事件為例(參見表5教學事件內涵)，研究者與協同分析者對此數學PCK事件「涉及的數學PCK面向」有不同的看法。在此情形下，研究者會先行和協同分析者進行討論、取得共識，再以兩位分析者的共識徵詢個案教師確認，做出數學PCK事件涉及的數學PCK面向確認。

3. 繪製個案教師在每個單元教學過程的PCK map

最後，研究者再將每個數學PCK事件涉及的PCK面向進行計次、繪製，而形成PCK

表5：個案教師數學PCK整合分析

教學事件	教學事件內涵	涉及的數學PCK面向		個案教師 確認
		研究者	協同分析者 (師培者)	
倫-1-E1 (阿倫在第1單元的 第1個數學PCK事件)	倫：好，大家一起把題目唸一次 ⁽²⁾ 。			
	生：……(讀題)。			
	倫：請你將關鍵資訊畫起來 ⁽²⁾ ，然後開始做做看。			
	倫：想一想， <u>在你所學過的知識裡面，有哪些和這道題目有關。</u>	1. 學科內容知識	2. 教學策略知識	學科內容知識
	<u>例如：因數、倍數……等等⁽¹⁾。</u>	2. 教學策略知識	3. 教學表徵知識	教學策略知識
	這些和這個題目的關係是什麼？	3. 教學表徵知識		教學表徵知識
	倫：你應該用什麼方式來表示題目的意思 ⁽³⁾ 呢？			
	倫：好，現在做好的同學開始與小組的同學討論 ⁽²⁾ 。			

map。再以阿倫在第1單元教學時第1個數學PCK事件為例，此數學PCK事件(編碼為E1)經研究者與另一位協同分析者以及個案教師討論後，確認此事件涉及學科內容知識、教學策略知識及教學表徵知識等三個數學PCK面向的整合，而此三個面向知識分別出現了2、3、1次。因此，研究者首先以直線連結這三個數學PCK面向知識；接續，在直線上標示出「E1」，象徵這三個數學PCK面向知識於第1個數學教學PCK事件中整合；最後，則在每個數學PCK面向知識中標上出現次數，完成1個數學教學PCK事件的數學PCK面向整合(參見圖2)。

五、研究的信效度

為使本研究在資料分析達到信、效度的要求，本研究參考學者(曾崇賢、段曉林、靳知勤，2011；Abd Rahman & Scaife, 2006)的建議，以「確實性」(credibility)、「可遷移性」(transferability)、「可靠性」(dependability)與「確認性」(confirmability)等判準以反應質性研究典範的預設立場，茲分別說明如下。

(一)確實性

此乃研究資料的真實性程度。研究者為求資料能真實反應個案教師的數學PCK整合情形，採取的作法包括：1.研究進行前，向教師表明研究結果將以匿名方式處理，讓教師能以開放的心態接受觀察與探析；2.除了依據錄影轉譯的語料進行分析外，研究者亦將資料分析的結果提供個案教師本人確認，以達研究資料的交叉檢視效果；3.本研究資料的分析，分別經由研究者與另外一位協同分析者各自分析，期能讓研究結果確實反應出個案教師進行教學過程中的數學PCK整合情形。表5即呈現本研究的結果，都是經由研究者、協同分析者以及個案教師溝通、協商而確認。在本研究中，2位個案教師共形成4個數學PCK map，這4個數學PCK map共有55個數學PCK事件。在判斷每個數學PCK事件涉及的數學PCK面向時，研究者與協同分析者無須經由協商即達一致看法的數學PCK事件有46件，其一致性達 $46/55 = 0.836$ 。

該面向總共發生的次數

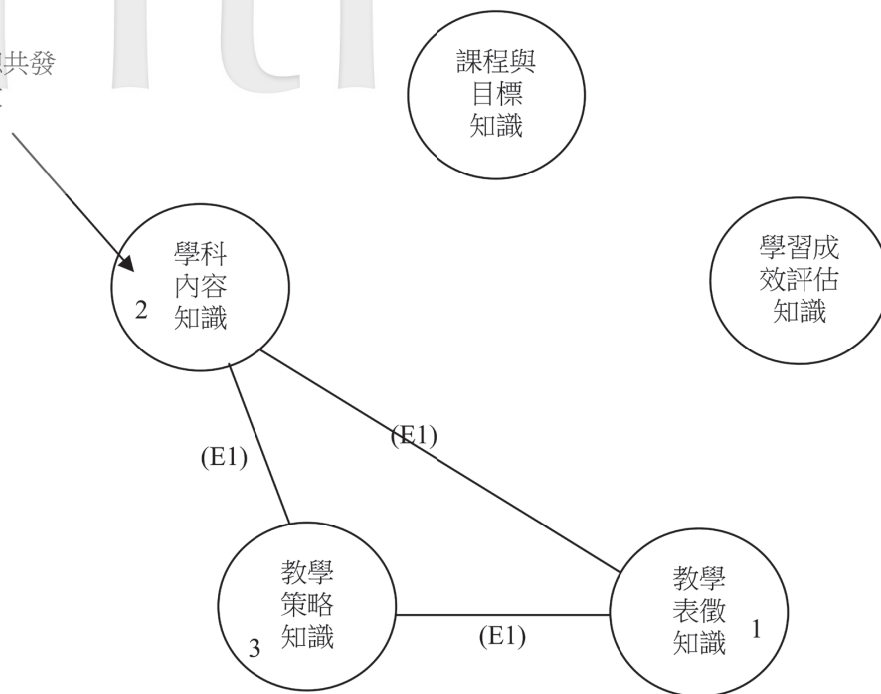


圖2：圖繪PCK map的數學PCK事件舉隅

(二)可遷移性

為使本研究在探究過程與發現能有效遷移至不同教師，因此，本研究詳實呈現觀察與分析個案教師的每個步驟與做法，並依據獲得的資訊進行理解、分析，以描述個案教師的數學PCK整合情形，期能提供未來師資培育者參考。

(三)可靠性

Abd Rahman與Scaife (2006)指出，可靠性可取代信度。這是指讀者能夠從研究呈現的資料蒐集、分析等過程之詳細說明，判別資料的可靠性。因此，本研究在個案教師完成教學後，將所有上課的對話內容轉譯為逐字稿；再由研究者與協同分析者進行數學PCK事件切割，進而判斷數學PCK事件涉及的數學PCK面向；接著請個案教師本人檢視、確認，以符合當事人在教學當下的原

始想法，進而據實呈現個案教師原有的數學PCK整合風貌。

(四)確認性

研究者進行資料分析時，會反覆檢視原始資料、反思閱讀進行觀察時所記錄的札記，以減少涉入研究者的主觀意識。期能透過文字與自身的對話，增加對理論的覺察並證實普遍性的發現。

肆、研究結果

一、兩位個案教師自覺的數學PCK內涵

以下，茲彙整兩位個案教師在「數學教學知識自覺量表」中數學PCK的自覺情形。表6顯示，阿倫自覺在「教學表徵知識」($M = 5$)面向表現最佳，其次依序為「學科內容知

表6：個案教師對數學PCK的自覺

	課程與目標知識	學科內容知識	教學策略知識	教學表徵知識	學習成效評估知識	整體
阿倫	6/3	23/4.6	13/4.33	20/5	12/4	74/4.35
小容	6/3	21/4.2	13/4.33	18/4.5	12/4	70/4.12

註：表中數字所代表的意義為「面向總得分／平均得分」。

識」、「教學策略知識」、「學習成效評估知識」與「課程與目標知識」。其中，又以「課程與目標知識」面向表現最不佳($M = 3$)。至於小容，她自覺在「教學表徵知識」($M = 4.5$)面向表現最佳，其次依序為「教學策略知識」、「學科內容知識」、「學習成效評估知識」與「課程與目標知識」。其中，以「課程與目標知識」面向表現最不佳($M = 3$)。

綜合來說，兩位教師自覺在數學PCK各面向表現是否理想的順序一致性頗高。他們都自覺在「教學表徵知識」、「教學策略知識」與「學科內容知識」等面向表現較為理想，而自認為在「課程與目標知識」面向的表現較不理想。其中較不相同的是，阿倫自覺其在「學科內容知識」的表現優於在「教學策略知識」的表現，而小容則自覺其在「教學策略知識」的表現優於在「學科內容知識」的表現。

研究者進一步從晤談中發現，兩位教師均認為，進行數學教學時應注意的內容包括：(一)教學表徵知識；(二)學科內容知識；(三)教學策略知識。

「如果要談進行數學課教學時應注意的內容，我想最重要的應該是讓學生聽得懂我上課的內容吧。」(倫-1-背晤-2-09)與「我想，數學教學最重要的是用學生聽得懂的方式講解數學知識。」(容-1-背晤-2-12)，此顯示兩位教師均同意數學教學最重要的是「教學表徵知識」，因為「教師有必要運用學生

能理解的符號和語言解釋數學概念，這樣的數學課才有意義」(倫-1-背晤-2-18)。此結果呼應兩位教師在量表中的「數學表徵知識」面向表現最高分的現象，顯示他們對此面向的關注。

此外，兩位教師也認同「學科內容知識」的重要性，並自陳在進行數學教學時，經常留意此面向知識的正確性與關聯性：

我覺得數學概念的內涵也很重要。
因為，如果不知道數學概念教學的先後順序，那很可能會搞不清楚哪些東西已經教了，而哪些是還沒教的。(倫-1-背晤-2-22)

如果教學前沒有把要教的觀念想清楚，那我會覺得很不踏實，所以，我也覺得這很重要。(倫-1-背晤-2-27)

教學前備課的時候，我會把和這個單元有關的觀念，包含以前教過的、現在要教的和以後要教的先弄清楚，以便真正掌握教學單元的內容。(容-1-背晤-2-16)

由此看來，兩位教師在進行數學教學時，也重視「數學知識」的結構性、縱向連結及單元概念內涵，也象徵他們自覺這是數學教學中重要的面向。此結果也與他們在量表中「學科內容知識」面向表現高分的現象相呼應。

最後，兩位教師也認為「課堂中，使用好的教學策略引起學生的學習意願與動機，

也是很重要的事」(容-1-背唔-2-24)，此顯示他們對「教學策略知識」的重視。因為，「如果能用好的策略引導學生學習，我相信會讓學生體會數學課程的趣味性，喜歡數學」(倫-1-背唔-2-33)。可見，他們都自覺到數學教學時，應留意「教學策略知識」，才能讓學生更加喜愛、理解數學。此結果也與兩位教師自覺在量表中「教學策略知識」面向表現不錯的現象一致。

然而，「我以前不太重視或在課堂中立即評估學生的學習成效。但是，隨著教學經驗逐漸豐富，我大概能夠從課間巡視的過程，掌握學生的學習狀況。……所以，我個人覺得評估學生的學習狀態也是重要的部分」(倫-1-背唔-2-41~42)，此顯示阿倫相對於小容來說，還自覺到「學習成效評估知識」的重要性。可見，阿倫的「經驗」讓他在晤談中比小容多了「學習成效評估知識」面向的自覺。

但是，較可惜的是，兩位個案教師在晤談過程中都未論述到「課程與目標知識」面向的內容。研究者進一步透過晤談，詢問兩位個案教師未提及「課程與目標知識」面向相關內容的原因，阿倫說：「雖然我知道數學課本的內容會因不同時代的課程改革而有不同，但是，我幾乎不會在課堂中告訴學生這些事。因為，這對學生來說並不重要」(倫-1-背唔-2-59~60)。而小容則自認為：「說真的，我對於數學課程的改變，並沒有花很多時間去關注。因為，我目前還是新手老師，我會花比較多的時間去強化我的教學實務部分」(容-1-背唔-2-68)。由此看來，小容的反思隱約象徵教師會在「教學經驗」豐富之後，才會關注「課程與目標知識」的內容；而阿倫的反思則意味著他認同「課程目標知識」對教師的重要性，但似乎不需要在數學教學過程中著墨太多。

總的來說，將兩位個案教師在量表的表現及晤談結果進行比對，顯示他們對於數學教學過程中數學PCK各面向的重視具一致性。再者，將兩位個案教師進行比較後發現，阿倫相較於小容來說，他的教學經驗較為成熟，其在數學PCK各面向的自覺得分也都比較高。並且，透過晤談亦發現，阿倫對於數學教學的考量，也會思考評估學生學習成效的面向；並且，也知道數學課程改革過程中，教材內容的增刪以及目標的變化。但是，他不認為這有必要在數學教學中跟學生提起。此顯示對於數學教學的思維，「學習成效評估知識」與「課程目標知識」可能是專家教師比生手教師多具有的面向。

二、兩位個案教師在不同主題單元教學中呈現的數學PCK整合

接續，本研究從兩位個案教師的數學教學歷程，分析他們進行每個教學單元時，其數學PCK各面向的整合情形。圖3為兩位個案教師在每個主題單元中呈現的數學PCK各面向整合。

以下，茲針對兩位個案教師在不同主題單元教學所呈現的數學PCK整合進行比較，並提出研究發現。

(一)兩位個案教師的數學PCK整合具有主題個殊性

由圖3發現，雖然兩位個案教師所教的單元相同，但他們呈現的數學PCK map不盡相同(例如：圖3-1與圖3-2；圖3-3與圖3-4)。並且，他們在進行同一個主題單元教學時，所顯示的PCK各面向整合次數以及每個面向間的連結次數都不相同。此外，同一位教師在進行不同主題單元教學時，所顯示的數學PCK map也不一樣(例如：圖3-1與圖3-3；圖3-2與圖3-4)。可見，教師在進行數學教學時，會因

主題不同，而有不同的數學PCK map。換言之，即教師的數學PCK會因教學主題不同而在數學PCK各面向的整合產生差異。

然而，教師的數學PCK map似乎也跟他們個人偏好的主題領域而有差異。圖3-1與圖3-3顯示，阿倫在「幾何」主題的教學中，數學PCK各面向整合較為頻繁；而圖3-2與圖3-4顯示，小容在「數與量」主題的教學中，數學PCK各面向整合較為良好。

我覺得我對「幾何」好像比較有感覺吧！……原因喔，因為小學階段的「幾何」，很具體，我會從日常生活、網路、一些動手做的活動去連結我要教的單元，……我比較喜歡這種主題。(倫-2-後晤III-1-12, 15)

我個人比較偏好「數與量」的主題。……因為這些單元我比較熟悉。(容-2-後晤III-2-30, 36)

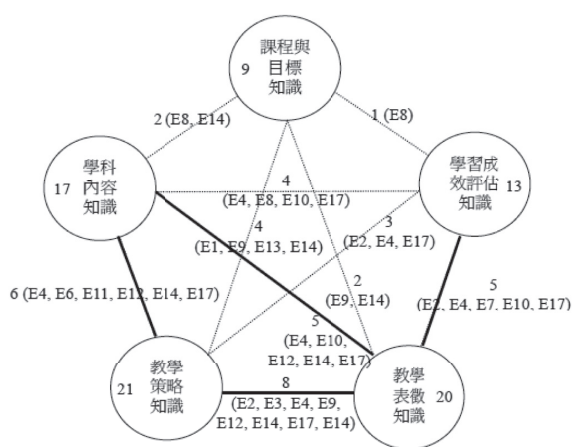


圖3-1：阿倫／最大公因數與最小公倍數

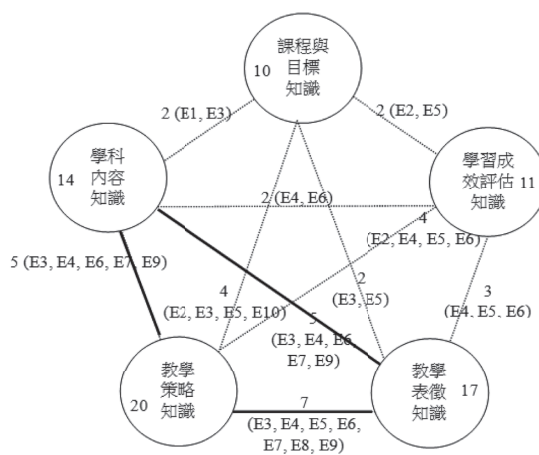


圖3-2：小容／最大公因數與最小公倍數

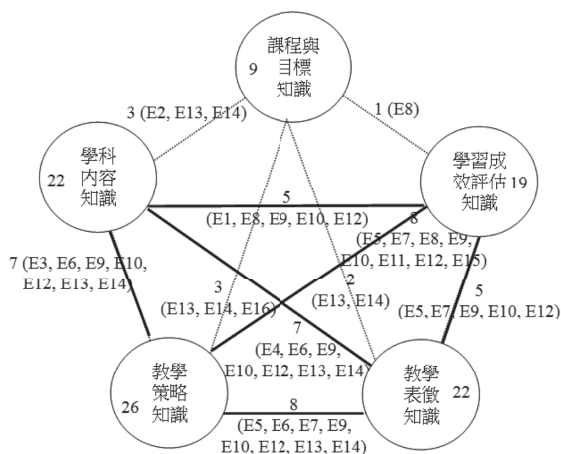


圖3-3：阿倫／圓

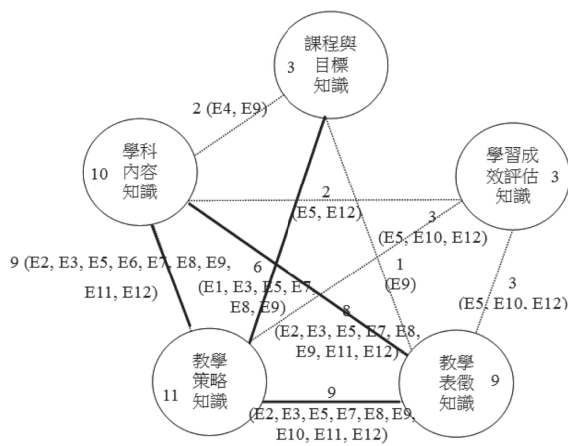


圖3-4：小容／圓

圖3：個案教師在單元教學過程中的數學PCK map

阿倫甚至認為，「在幾何主題下，它的概念比較簡單，知識比較單純。但數與量，牽涉的概念比較多，我比較不熟悉」(倫-2-後晤III-2-15)。此顯示，教師對於教學單元的偏好，會影響其在教學過程中數學PCK map的呈現。本研究關於「教師在教學過程中展現的數學PCK各面向整合，會因教學主題不同而有差異」的發現，與過去許多研究(Grossman, 1990; Park & Chen, 2012; Van Driel, Verloop, & De Vos, 1998)的看法一致。

(二)兩位個案教師數學PCK整合以「教學策略知識」、「教學表徵知識」、「學科內容知識」為主

由圖3發現，兩位個案教師在兩個主題教學過程中，其數學PCK各面向的整合有一個共同的趨勢：他們的數學PCK面向整合以「教學策略知識」、「教學表徵知識」、「學科內容知識」為主(詳見表7)。阿倫在「數與量」主題依序是21次(26.25%)、20次(25%)、17次(21.25%)，在「幾何」主題依序為26次(26.53%)、22次(22.45%)、22次(22.45%)；而小容在「數與量」主題依序是20(27.78%)次、17次(23.61%)、14次(19.44%)，在「幾何」主題依序為11次(30.56%)、9次(25%)、10次(27.78%)。雖然阿倫在兩個主題教學過程中所出現各面向的整合次數均高於小容，但是，兩位個案教師在數學PCK各面向整合所出現的比例卻是接近的(均介於20% ~ 30%)。再仔細觀察圖3的

四個數學PCK map，這四個數學PCK map的「教學策略知識」、「教學表徵知識」、「學科內容知識」這三面向知識彼此間的連結也較為頻繁(均達5次以上)，代表了兩位個案教師在這三個面向知識整合的流暢性。

此結果亦在兩位個案教師的晤談中發現：

我會這樣設計的原因，是因為我想讓學生從實際的生活例子中理解圓的特性，從實作去感覺直徑與圓周長的關係，再透過引導或者是同學分享，這樣會讓學生能更有感覺。(容-2-前晤II-1-04)

我在進行每一個教學步驟的時候，都會希望能兼顧一些功能。例如，讓學生從生活中找到數學的性質、提供不同的問題類型……等。(容-2-後晤III-2-06)

教學過程，不管是在備課或是教學，我大部分的重點都是考量……學生以前學過什麼？如何從他們的經驗切入主題？用甚麼方式？教哪些東西？這些東西都是很重要的。(倫-2-後晤III-2-09)

上述結果象徵兩種意義：1.阿倫因著豐富的教學經驗，數學PCK各面向整合出現的次數較多；2.如果從「要教學生什麼？這些知識與他們的哪些先備知識有關？過去學生在此部分學習有何困難？該如何呈現這些知

表7：教師在不同主題單元教學的數學PCK各面向整合

單元 \ PCK面向		課程與目標	學科內容	教學策略	教學表徵	學習成效	合計
最大公因數與 最小公倍數	阿倫	9	17	21	20	13	80
	小容	10	14	20	17	11	72
圓	阿倫	9	22	26	22	19	98
	小容	3	10	11	9	3	36

識？」這些考量點去思考數學教學，那麼，「教學策略知識」、「教學表徵知識」、「學科內容知識」這三面向知識主導兩位個案教師進行數學教學的思維，進而形塑數學PCK map，應該就不難理解。

(三)「課程與目標知識」、「學習成效評估知識」與其他數學PCK面向連結受限

相對地，「課程與目標知識」與「學習成效評估知識」等面向知識，在教學過程中出現整合的次數則較少。其中，又以「課程與目標知識」面向最少。以小容為例，她在「圓」這個主題教學中，她的數學PCK map呈現「學習成效評估知識」完全沒有與「課程目標知識」產生連結的結果。此現象顯示，小容在此堂課教學時，幾乎沒有「透過評量的方式評估學生是否達成學習的目標」，這意味此二面向知識的整合是小容較欠缺的部分。

為何「課程目標知識」較無法與其他數學PCK的面向產生連結？

教學的時候，很少在上課的時候想到教學的目標，……通常我只會在教學一開始的時候提到有關這方面的內容。……但是教學的過程中，我好像很少想到這個和其他的教學行為會有什麼關聯。(倫-1-後晤III-2-18, 22)

恩……我在教學的時候，真的很少想到我的教學內容是不是符合教學的目標，或是要去看學生真正的學習成效。……我大部分的時間都是在想，怎麼讓學生更理解這個單元的概念，所以，會去思考用什麼方式來解式概念。(容-1-後晤III-1-13, 15)

ㄟ！真的耶！我好像只有在編寫教案的時候，才會想起教學目標這件事，在上課中幾乎沒有想到這個單元的教學目標，……也很少去思考要隨時去觀察學生的學習狀況。
(容-2-後晤III-2-12, 20, 24)

此結果顯示，兩位個案教師進行教學時，大多只在教學計畫或開始時，才會思考到教學重點。此後，便鮮少在教學中有此面向的思考，其原因在於他們並未體會「課程目標知識」與其他面向知識存在關聯性。

至於「學習成效評估知識」，研究者發現，除了小容在「幾何」單元教學之外，其他如阿倫的兩個主題教學以及小容在「數與量」單元的教學，兩位個案教師都出現不少次數的「學習成效評估知識」(分別為13次、11次、19次)，但是，教師知道或看到學生的學習出現困難時，似乎很少直接影響其思考「我該如何用其他方式詮釋概念讓學生理解？」之「教學表徵知識」，換言之，即是「學習成效評估知識」與「教學表徵知識」的連結不多(連結次數分別為5次、5次、3次、3次)。

此外，阿倫在「學習成效評估知識」面向所出現的次數比小容多，「我覺得數學課的教學應該要從學生的角度去思考，隨時從學生的觀點去想，他們要學什麼？怎麼讓他們學？還有他們學到什麼？……這一類的問題」(倫-1-背晤-2-05)，這顯示阿倫較常檢視學生的學習成效，相較於小容，「我很少去思考如何檢視學生的學習狀態，因為，我認為那是小考或月考的事……」(容-1-後晤II-3-09)，顯示生手教師較不易覺察並落實課中隨時檢視學生學習的成效。上述結果象徵兩種意義：1.教學經驗豐富的阿倫，其連結強度(次數)仍高於小容；2.教師似乎在教學過程中

不易因發現學生的學習困難而思考改變教學表徵方式。這或許值得我們注意與省思。

(四)教師教學經驗與信念影響數學PCK面向整合

再由圖3觀察，研究者發現兩位個案教師雖然在兩個主題教學中，「教學策略知識」、「教學表徵知識」、「學科內容知識」三面向的知識達到較強的連結與整合(圖3四個分圖中三個面向的連結線較粗，象徵連結次數達5次以上)，但是，阿倫在兩個主題單元的教學中，除了上述三個面向的連結較強外，他的「學生學習成效評估知識」與「教學表徵知識」(圖3-1與圖3-3)、「學生學習成效評估知識」與「學科內容知識」、「教學策略知識」(圖3-3)等面向也有較強的連結，此現象又再次顯示教學實務經驗對於教師數學PCK整合有助益的意義。

此外，研究者透過與阿倫的晤談發現，除了教學經驗之外，似乎教師對於數學教學抱持的觀點與想法，也左右了他的教學決定：

我覺得過去參加輔導團，看到其他學校一些老師對於數學教學的想法，也接觸到比較多關於數學教育的新知，這些都會讓我在後來的教學中多去思考一些問題。……比如說，學生聽不懂我說的時候，我要怎麼用其他方式讓他瞭解；他們的先備知識哪裡不穩定，諸如此類的想法……(倫-2-後晤III-14-08, 12)

我的想法就是如何讓學生在數學學習中真正瞭解數學的概念。……這些是我以前很少想到的。(倫-2-前晤II-1-17)

Friedrichsen, Van Driel與Abell (2011)指出，教師的科學教學取向是指「教師對於科

學教學概念的想法」。而此科學教學取向深受教師「對科學教學目標的信念」、「對科學本質的信念」以及「對科學教學與學習的信念」的想法所影響。由此觀點審視阿倫的教學，他的經驗讓他重整對於數學教學相關信念的想法，進而讓他在教學過程中呈現更完整而具更多動態連結與整合的數學PCK map(圖3-3)。對此，我們也從阿倫的課室對話中看到PCK面向的整合：

師：剛剛我們從影片中看到，它將一個圓切成很多等分，包括4等分(圖4-1)、8等分、……、360等分，把這些切好的等分重新組裝，變成一個長方形(手指著圖3-2)，這裡是圓周長的一半(手指著圖4-2圖形上緣)，這裡是半徑長(手指著圖4-2圖形旁邊)，所以，圓的面積就等於長方形面積，而長方形面積=長×寬=圓周長的一半×半徑。這樣，瞭解嗎？

師：好，現在小組開始再重新討論一次。

師：小組可以拿桌上的教具(圖4-3)試著組合看看。(倫-2-教-006~008)

上述現象顯示，阿倫在教學過程中，會不斷地嘗試看到學生的學習困難，並使用各種表徵去解決現場中學生的學習問題，促進學生數學理解。這也顯示阿倫是一個以學生為中心的教學取向之教師。

三、兩位個案教師自覺數學PCK內涵與教學實踐中呈現的數學PCK map比較

最後，研究者再針對兩位個案教師自覺

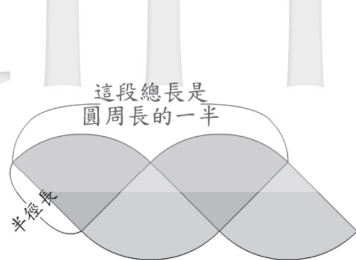


圖4-1：4等分圓

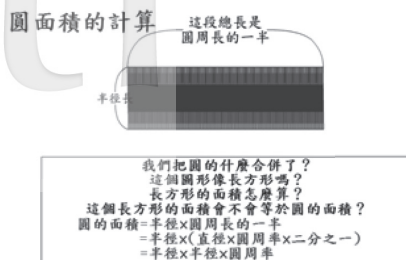


圖4-2：360等分圓

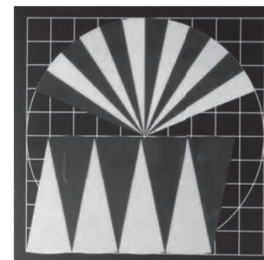


圖4-3：教具操作

圖 4：利用圖像、操作表徵圓面積

的數學PCK內涵與他們在教學實務中呈現的數學PCK map進行比較。就阿倫而言，將他在「數學教學知識知覺量表」的感知以及其在教學實踐中的表現相互對照，依他教學實踐所繪製的數學PCK map顯示，阿倫在「教學表徵知識」面向出現的次數最多，而他也自覺在此面向表現最好；此外，阿倫感知較為不佳的「課程與目標知識」面向，也在他的數學PCK map中顯示出現次數最少。此象徵阿倫對於數學PCK的自覺和他外顯的教學行為具一致性。

其次，就小容來說，依他教學實踐所繪製的數學PCK map顯示，他的「學科內容知識」、「教學策略知識」、「教學表徵知識」等面向的統整最為頻繁，而他也自覺在此些面向的表現最好；而小容感知較為不佳的「課程與目標知識」面向，也在他的數學PCK map中出現次數(10次、3次)最少。這顯示他對自身的數學PCK知覺和他實際教學行為所顯現的數學PCK整合是一致的。

整體來說，兩位教師在數學PCK的自我覺知情形與他們在教學實踐過程中呈現的數學PCK各面向整合情形大致呈現相互一致的趨勢。無論是量表的施測結果或是依教學觀察所繪製的數學PCK map，都顯示兩位教師在教學過程中，多以「學科內容知識」、「教學策略知識」、「教學表徵知識」等面

向為教學的核心；「課程與目標知識」面向與其它面向知識的連結最少，而量表資訊也顯示兩位教師在此面向的自我覺知分數最低。此結果象徵兩個意義：(一)本研究所使用的量表可看出教師整體具備的數學PCK樣態；(二)培養教師在教學過程中隨時檢視「課程與目標是否與教學相互呼應」的觀點是重要而待解決的議題。

伍、結論、討論與建議

一、結論與討論

本研究藉由陳彥廷(2014)所開發的「國小教師數學教學知識知覺量表」，審視兩位國小個案教師其對於自身具備的數學PCK覺知；並植基於此量表所架構的數學PCK之五個面向，透過兩個主題單元之課室非參與式觀察，分析兩位個案教師所呈現的數學PCK map；希望獲知兩位個案教師對數學PCK自覺的內涵與實際教學間所顯現的數學PCK整合是否一致？他們的PCK map的風貌為何？研究者認為，本研究拓展了教師的數學PCK是在教學過程中動態整合的觀點，並透過教師數學課室實踐的觀察歷程，分析教師數學PCK的樣貌，此為本研究之貢獻。以下，茲針對研究結果提出結論並進行討論。

(一)數學PCK具有主題個殊性

本研究從實證資料分析，主張教師進行不同主題單元教學時，所展現之數學PCK map不盡相同。換言之，即教師的數學PCK會因教學的單元主題不同，而有相異的整合情形。此結果呼應Grossman (1990)所述「PCK具有「特殊主題整合」(topic-specific integration)特色」的主張，也符合Van Driel等(1998)所指，PCK的價值取決於其與特殊主題的關係。再者，由於本研究乃參考Park與Chen (2012)所發展的「PCK成分整合歷程圖」進行分析，因此，呼應Park與Chen所述，探究PCK不再只是發現它與教學主題間的關連，而應更深一層探討究竟這些數學PCK的面向在教學過程中，彼此間如何互動與整合。此結果意味著數學PCK的各個面向在教師教學過程中，對於教師的教學實務具有不同質與量的貢獻。

(二)學科內容知識、教學策略知識與教學表徵知識為教師數學PCK的核心

Shulman (1986)指出，教師「對學生理解的知識」、「教學策略與表徵知識」是PCK重要的核心知識。多數學者也都同意此看法(Park & Oliver, 2008)。本研究站在陳彥廷(2014)所架構之數學PCK的五個面向：課程與目標知識、學科內容知識、教學策略知識、教學表徵知識、學習成效評估知識，其中，學科內容知識是指教師能理解教學單元的概念內涵與運算法則、學生學習此單元前的先備知識及他們在此單元可能產生的迷思等相關知識，也就是含括Shulman所說的「對學生理解的知識」。而本研究發現，學科內容知識、教學策略知識與教學表徵知識為教師數學PCK的核心，一則是因為兩位個案教師在進行數學教學時，這三個面向出現的次數最多；二則是這三個面向知識彼此的連結最

為頻繁。此結果呼應過去許多學者(Cochran, 1993; Hashweh, 2005; Loughran et al., 2006; Shulman, 1986, 1987)所述，PCK的核心是教師能將SMK表徵成學習者容易理解之內容的知識，也類似於Park與Chen (2012)的研究發現。這意味著過去研究(Clermont, Borko, & Krajcik, 1994)所主張的「未來師資培育者，若要發展教師的數學PCK，可以從學科內容知識、教學策略知識與教學表徵知識等三個面向著手進行」觀點值得重視。

(三)「課程與目標知識」、「學習成效評估知識」與其他數學PCK面向連結受限

本研究另外的發現是，兩位個案教師的數學PCK「課程與目標知識」與「學習成效評估知識」面向與其他面向的連結次數較少。其中，又以「課程與目標知識」面向最少。此結果與Park與Chen (2012)的研究發現一致，但與Arzi與White (2007)的結果不一致。對此，Park與Chen猜測，造成此結果的可能因素，是參與研究的教師其對於課程的視野太過窄化，他們可能都只是長期聚焦在要教授的單元主題下的課程目標，而未關注到課程縱向往上與往下的相關課程目標，因此不易在課程進行時考慮到這些課程目標的意涵。

同樣地，「學習成效評估知識」面向也與其他面向的連結次數較少。然而，一旦它開始在教師的數學PCK中運轉、整合，它多連結到「學科內容知識」、「教學策略知識」、「教學表徵知識」。這意味「評量」對於教師來說，已然成為「檢視學生學習成效：學生理解什麼」、「修正教學模式：改變教學策略、更換概念詮釋方式」的功能，這是促進有效教學的策略(National Research Council [NRC], 1996)。但是，本研究的兩位

個案教師在此面向的知識似乎尚嫌不足。此象徵未來師資培育可針對此部分加以強化。

(四)「國小教師數學教學知識知覺量表」 佐以數學PCK map能描繪出教師數學 PCK整體圖像

本研究使用陳彥廷(2014)所開發的「國小教師數學教學知識知覺量表」提供兩位個案教師檢視自身所擁有的數學PCK情形。結果發現，兩位個案教師所顯現的數學PCK，與研究者進班觀察他們的數學教學實務所繪製的PCK map，整體上大致相同。數學PCK五個面向中的核心面向都從不同的偵測管道中呈現。此意味「國小教師數學教學知識知覺量表」能提供探究教師數學PCK立即性的回饋。但是，研究者從文獻中分析認為，教師的數學PCK會隨著其教學的主題而產生動態性的整合。因此，雖然量表的施測有其時間快速的優點，但是若能佐以本研究所使用的數學PCK map 分析，相信可以更深入地描繪出教師心中存有的數學PCK整體圖像。

二、建議

根據上述結果與討論，茲提出未來教學與研究之建議如下。

(一)教學上的建議

本研究發現，兩位個案教師在進行數學教學時，涉及關於數學PCK的面向是彼此交錯的。換言之，即是教師進行數學教學所使用的數學PCK面向是多元且為變動、整合的狀態(Park & Chen, 2012)。而本研究結果顯示，教師進行數學教學時，會以學科內容知識、教學策略知識與教學表徵知識等三個面向的知識為主要核心，因此，建議未來進行師資教學實務經驗培育時，可提供師資生從實務的經驗中體悟這些面向知識整合的歷

程，進而促進數學PCK的發展。例如：師資培育者可在數學教材教法課程中，提供師資生觀看第一線教師的教學影片，或從現場教學觀摩的過程，引入教師如何發現學生在數學知識的學習困難(學習成效評估知識)？這些困難的知識起源為何(學科內容知識)？教師如何因應(教學表徵知識)？用什麼策略進行教學(教學策略知識)？這些一連串但卻常發生在數學課室的教學活動，都可以培育教師以更仔細的態度去檢視與學習。

(二)研究上的建議

本文係以立意取樣的方式邀請兩位國小教師參與本研究，在樣本的代表性上，是本研究的限制。因此，如果將樣本更換，或是增加參與研究的樣本數，是否研究結果還能符合本研究的發現？實值得後續再行探討。因此，建議未來研究能找到更多教師投入，一來可就「國小教師數學教學知識知覺量表」的施測結果進行更深層的量化統計，獲得更多關於影響教師數學PCK的因素探討，二來可讓本研究所使用的「PCK成分整合歷程圖」量化，達到「見林又見樹」的理想。再者，參與本研究的兩位個案教師，其在背景變項尚有諸多相異之處(例如：專業背景、主要領域專長、教學年資、專業參與經歷)，導致無法從而判斷究竟是哪一個變項影響教師的數學PCK發展。因此，建議未來在研究對象的擇取上可朝一組配對教師僅有一個變項差異的理想情境進行設計，期能讓未來師資培育能更有效。

此外，由於本研究是站在陳彥廷(2014)所建構的「國小教師數學教學知識知覺量表」的架構上，依循架構中的五個面向，針對兩位個案教師在兩個主題單元教學中的表現分析其數學PCK的整合。然而，此架構卻

沒有獨立出「對學習者認知的知識」面向，其原因乃在陳彥廷以探索性因素分析進行量表效化時，相關訊息將此「對學習者認知的知識」面向歸於「學科內容知識」的面向之中。研究者猜測，這可能是教師在詮釋數學內容的知識時，應已涵蓋利用合適的表徵方式進行教學，並能針對學生的迷思概念進行闡釋，因此，導致本研究並無「對學習者認知的知識」的面向。未來，建議後續研究能思考從相關文獻的觀點，將「對學習者認知

的知識」的面向獨立出來，或許能有不同的發現。

誌謝

本研究蒙科技部專題計畫補助，計畫編號NSC 100-2511-S-142-009，特致申謝；文中所提論點純屬作者個人意見，並不代表科技部之立場。作者衷心感謝二位審查委員及編輯委員會對本文所提供之寶貴建議，由於您的協助，方能使本文能夠修改得更加完善。

參考文獻

1. 李源順、呂玉琴(2006, 12月)。國小教師數學教學專業知能初探：學者的觀點。發表於優質數理師資培育國際學術研討會。屏東市：國立屏東教育大學。
2. 李源順、林福來(1998)。校內數學教師專業發展的互動模式。師大學報：科學教育類，43(2)，1-23。
3. 李源順、林福來、呂玉琴、陳美芳(2008)。小學教師數學教學發展標準之探究：學者的觀點。科學教育學刊，16(6)，627-650。
4. 李咏吟、趙曉美、李孟文、蔡曉楓、陳鏗任(2008)。資源班數學教師合作式省思專業成長團體研究。中等教育，59(1)，72-91。
5. 林碧珍、蔡文煥(2007)。數學領域實習輔導教師專業標準指標的發展與建立之初探。新竹教育大學教育學報，24(2)，61-91。
6. 邱美虹、江玉婷(1997)。初任與資深國中地球科學教師學科教學知識之比較。科學教育學刊，5(4)，419-459。
7. 姚如芬(2006)。成長團體之「成長」——小學教師數學教學專業之探究。科學教育學刊，14(3)，309-331。
8. 張宇樑(2010)。學習型組織與數學教師專業發展。教育研究，198，103-117。
9. 郭生玉(1997)。心理與教育研究法。臺北市：精華書局。
10. 陳品婷、李源順(2011)。三階段輔導模式下之國小實習輔導教師的數學教學成長研究。國教新知，58(3)，13-22。
11. 陳彥廷(2014)。國小教師數學教學知識(MPCK)知覺量表發展之探究。測驗學刊，61(1)，51-78。
12. 陳彥廷、康木村、柳賢(2010)。同儕對話促進兩位國中數學教師教學反思與專業成長。科學教育學刊，18(4)，331-359。

13. 曾崇賢、段曉林、靳知勤(2011)。探究教學的專業成長歷程——以十位國中科教師的觀點為例。《科學教育學刊》，19(2)，143-168。
14. 劉曼麗(2008，12月)。國小教師數學教學專業基準發展之研究。發表於中華民國第二十四屆科學教育研討會。彰化市：國立彰化師範大學。
15. 鍾靜、張淑怡、陳幸玫、陸昱任、戴坤邦(2012)。國小數學教師專業標準之建構。《科學教育學刊》，20(3)，217-239。
16. Abd Rahman, F., & Scaife, J. A. (2006). Assessing preservice teachers' pedagogical content knowledge using a "bricolage" approach. *The International Journal of Learning*, 12(10), 81-92.
17. Abell, S. K. (2008). Twenty years later: Does pedagogical content knowledge remain a useful idea? *International Journal of Science Education*, 30(10), 1405-1416.
18. Arzi, H., & White, R. (2007). Change in teachers' knowledge of subject matter: A 17-year longitudinal study. *Science Education*, 92(2), 221-251.
19. Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
20. Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning how to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 214-247.
21. Ball, D. L., & Rowan, B. (2004). Introduction: Measuring instruction. *The Elementary School Journal*, 105(1), 3-10.
22. Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
23. Baxter, J. A., & Lederman, N. G. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education*, vol. 6 (pp. 147-161). Boston, MA: Kluwer Academic.
24. Berliner, D. C. (2001). Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research*, 35(5), 463-482.
25. Cheang, W. K., Yeo, K. K. J., Chan, C. M. E., & Lim-Teo, S. K. (2007). Development of mathematics pedagogical content knowledge in student teachers. *The Mathematics Educator*, 10(2), 27-54.
26. Clermont, C. P., Borko, H., & Krajcik, J. S. (1994). Comparative study of the pedagogical content knowledge of experienced and novice chemical demonstrators. *Journal of Research in Science Teaching*, 31(4), 419-441.
27. Clermont, C. P., Krajcik, J. S., & Borko, H. (1993). The influence of an intensive in service workshop on pedagogical content knowledge growth among novice chemical demonstrators. *Journal of Research in Science Teaching*, 30(1), 21-43.

28. Cochran, K. F. (1993). Pedagogical content knowledge: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, 44(4), 263-272.
29. Cohen, R., & Yarden, A. (2009). Experienced junior-high-school teachers' PCK in light of a curriculum change: The cell is to be studied longitudinally. *Research in Science Education*, 39(1), 131-155.
30. Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 8-40.
31. Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. New York: Nichols.
32. Engeström, Y. (1994). Teachers as collaborative thinkers: Activity-theoretical study of an innovative teacher team. In I. Carlgren, G. Handal, & S. Vaage (Eds.), *Teachers' minds and actions: Research on teachers' thinking and practice* (pp. 43-61). London: Falmer Press.
33. Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York: MacMillan.
34. Friedrichsen, P. J., Abell, S. K., Pareja, E. M., Brown, P. L., Lankford, D. M., & Volkmann, M. J. (2009). Does teaching experience matter? Examining biology teachers' prior knowledge for teaching in an alternative certification program. *Journal of Research in Science Teaching*, 46(4), 357-383.
35. Friedrichsen, P., Van Driel, J. H., & Abell, S. K. (2011). Taking a closer look at science teaching orientations. *Science Education*, 95(2), 358-376.
36. Gibson, S., & Dembo, M. H. (1984). Teacher efficacy: A construct validation. *Journal of Educational Psychology*, 76(4), 569-582.
37. Grossman, P. L. (1990). *The making of a Teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.
38. Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: A reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 11(3), 273-292.
39. Kamen, M. (1996). A teacher's implementation of authentic assessment in an elementary science classroom. *Journal of Research in Science Teaching*, 33(8), 859-877.
40. Kind, V. (2009). Pedagogical content knowledge in science education: Potential and perspectives for progress. *Studies in Science Education*, 45(2), 169-204.
41. Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., et al. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*, 100(3), 716-725.
42. LeCompte, M. D., & Preissle, J. (1993). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academy Press.

43. Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
44. Loughran, J., Berry, A., & Mulhall, P. (2006). *Understanding and developing science teachers' pedagogical content knowledge*. Rotterdam, The Netherlands: Sense.
45. Magnusson, S., Krajcik, L., & Borko, H. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
46. Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11.
47. Matese, G. (2005, April). *Cognitive factors affecting teachers' formative assessment practices*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.
48. Matsumura, L. C., & Steinberg, J. R. (2002). *Collaborative, school-based professional development settings for teachers: Implementation and links to improving the quality of classroom practice and student learning* (CSE Technical Report 568). Los Angeles, CA: The Regents of the University of California.
49. Meijer, P. C., Verloop, N., & Beijaard, D. (1999). Exploring language teachers' practical knowledge about teaching reading comprehension. *Teaching and Teacher Education*, 15(1), 59-84.
50. National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.
51. National Research Council. (1996). *National Science Education Standards*. Washington, DC: National Academy Press.
52. Park, S., & Chen, Y. C. (2012). Mapping out the integration of the components of pedagogical content knowledge (PCK): Examples from high school biology classrooms. *Journal of Research in Science Teaching*, 49(7), 922-941.
53. Park, S., & Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38(3), 261-284.
54. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
55. Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
56. Strauss, A., & Corbin, J. M. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.

57. Thornton, S., & Morony, W. (2006). Standards for excellence in teaching mathematics in Australian school. *The Mathematics Educator*, 9(1), 12-28.
58. Van Driel, J. H., Verloop, N., & De Vos, W. (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 35(6), 673-695.
59. Veal, W. R., & Kubasko, D. S. (2003). Biology and geology teachers' domain-specific pedagogical content knowledge of evolution. *Journal of Curriculum and Supervision*, 18(4), 334-352.

Mapping Out the Integration of Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK) from Two Elementary School Teachers

Yen-Ting Chen

Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

Abstract

There is agreement that mathematics pedagogical content knowledge (MPCK) is the core of mathematics teaching. However, few scholars have focused on the integration of MPCK. This study explored the integration of five components of MPCK: 1. Knowledge of Mathematic Curriculum and Target, 2. Knowledge of Subject, 3. Knowledge of Instructional Strategies, 4. Knowledge of Representations, 5. Knowledge of Assessment of Mathematics Learning. The researcher investigated two teachers who were working in an elementary school. Data sources included classroom observations, semi-structured interviews, instructional materials, and a perception instrument of mathematics pedagogical content knowledge information written by the two teachers. Data analysis indicated three salient features of the integration of the MPCK components: 1. Knowledge of Subject, Knowledge of Instructional Strategies and Knowledge of Representations were central in the integration; 2. Knowledge of Mathematics Curriculum and Target and Knowledge of Assessment of Mathematics Learning had most limited connection with other components; 3. the results from classroom observations corresponding to the results from the perception instrument of mathematics pedagogical content knowledge information.

Key words: Elementary School Teacher, Mathematics Pedagogical Content Knowledge, Perception Instrument of Mathematics Pedagogical Content Knowledge for Elementary School Teachers