

建立鷹架協助重度視障生發展面積與周長概念之探究： 以數學奠基活動「占地圍王」為例

謝佳叡¹ 林福來² 張千惠^{3,*}

¹國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

²國立臺灣師範大學 數學系

³國立臺灣師範大學 特殊教育學系

摘要

本研究旨在探究重度視障生於數學奠基活動歷程中，學習面積與周長概念上的不利點及該不利點是否被彌補，進而分析視障生學習面積與周長概念之可能性。本研究為探索性研究，以無障礙方式設計的數學奠基活動為鷹架，引導他們進行幾何學習並觀察其效果。研究採個案研究及參與觀察法，以七名小學重度視障生為研究對象，進行周長與面積單元之數學奠基模組「占地圍王」教學；並以錄音、攝影、觀察日誌、回饋問卷記錄教學過程及採用內容分析法進行分析。研究發現數學奠基模組經適度調整後能施用、適用於重度視障生，歷程中也發現以觸覺方式認識幾何圖形所產生學習上的不利。研究也發現數學奠基活動能搭建鷹架提供視障生學習的機會，如讓視障生更明確的發現或說出概念及其發想能被保留在遊戲中並適時引動；而數學奠基活動亦能幫助他們彌補部分的視覺不利所造成的迷思，如周長的界定包含內部的線段及圖形大小為外圍輪廓大小。最後，本研究證實使用聽覺與觸覺可以幫助重度視障生度過van Hiele幾何思考模式的視覺期，助其進入分析期以學會周長與面積概念。所以建議教學者應提供視障生持續操作的機會，讓他們藉由觸覺探索與認知的方式，正確理解周長與面積的構成要素及要素彼此之間的關係。

關鍵詞：van Hiele幾何思考模式、周長與面積、重度視障生、數學奠基活動

壹、緒論

許多重度視障生(以下簡稱「視障生」)並沒有放棄知識的探究，如著名的數學家尤拉(Leonhard Euler, 1707 ~ 1783年)，其一生的數學研究，有一半是在他失明後完成的(Jackson, 2002)。以最需要視覺輔助的幾何學

來說，全盲數學家Bernard Morin (1931 ~ 2018年)在無法運用視覺的限制下，發展了球面翻面的幾何理論(Jackson)。仰望這些前人的成就，研究者相信視障生也有能力學好數學，即使是大量仰賴視覺的幾何，必定有視障生可以深入學習的路徑。

研究者希望能夠為視障生找出這條學

*通訊作者：張千惠，sofchang@gapps.ntnu.edu.tw

(投稿日期：民國110年10月20日，修訂日期：民國110年12月14日，接受日期：民國110年12月14日)

習幾何的幽深之路，因此接觸了「幾何概念發展」的理論，以荷蘭數學教育家van Hiele (1986)所提出的幾何思考模式(以下本文簡稱「van Hiele理論」)而言，學生對幾何概念始於圖形整體的「視覺期」(visualization)。以三角形為例，孩童先認識三角形整體後，才能進一步辨識三角形的組成元件，如邊、角、頂點、周長及面積等。然而視障生無法使用視覺綜覽圖形全貌，因此當他們試圖以觸覺感知一個三角形時，最先感受到的卻是邊、角、周長等幾何元件，以van Hiele的術語來說，視障生似乎在一開始就進入了第二階段「分析期」(analysis)。以本研究團隊對視障生幾何學習的實際觀察，也發現他們能完成第二層次「分析」之任務，如此是否意味著van Hiele所提出的「視覺化」有其他替代模式，或是van Hiele所提出的理論有擴充的可能性？參照van Hiele理論而得的觀察，成為探索視障生學習幾何的線索之一。

除了探究視障生本身學習幾何的歷程與特性，教學端的「教材」與「教法」也是一個幫助他們學習幾何的切入點。由於他們視覺的限制，若與明眼生在同一課堂中、使用同樣的教材學習，會遭遇許多知覺與認知上的困難(Gulley, Smith, Price, Prickett, & Ragland, 2017; Klingenberg, Holkesvik, & Augestad, 2019; Spinczyk, Maćkowski, Kempa, & Rojewska, 2019)，研究也顯示臺灣的視障生數學學習表現低落(鄭靜瑩，2007)。進一步地，由於知覺與認知上的困難，他們跟不上教學進度，對於數學學習便產生了負面情意(Spinczyk et al.)，對於學習的動機便被削減，如此即形成惡性循環。為了克服視障生這樣的困難，研究者想到了「數學遊戲」此一媒介，其在實徵上能夠促進學生認知與情意等面向之參與程度(廖畚柔、黃國禎、賴秋琳、吳書豪，2020；Chang, Kuo, Hou, &

Koe, 2022; Hou & Keng, 2021; Ninaus, Moeller, McMullen, & Kiili, 2017)。特別地，研究者聚焦於在實際教學前奠定數學概念基礎的數學遊戲：「數學奠基模組」。由於將「奠定數感的任務」與「有趣的遊戲」結合，數學奠基模組能讓學生從中進行具體且有感的學習，同時達到認知與情意面向之學習成效(林福來、謝豐瑞，2014；Lin, Wang, & Yang, 2018)。在視障生學習幾何之路，研究者認為此為一強力的鷹架。

在探究視障生學習幾何之過程中，研究者綜合過去文獻以及教學的觀察，發現了他們在van Hiele理論中有其獨特的認知模式。藉由分析他們在教學現場會遇到的困難，發現了「數學奠基活動」(Mathematics-Grounding Activities, MGA)作為視障生學習幾何的鷹架之可能性。MGA的理念是讓學生在學習前，經由活潑有趣的活動激發學生對數學的學習動機與動力，同時也讓學生瞭解相關的關鍵概念或概念初胚(林福來、謝豐瑞，2014)。MGA的實施方式就是進行數學奠基模組教學，因此研究者將現有的幾何數學奠基模組加以改良，設計成具有可及性(accessibility)的版本，並實施於視障生的數學教學中。一方面，研究者希望藉由幾何數學奠基模組的實施，探索視障生於van Hiele理論中的認知機轉，以及其學習幾何的模式；另一方面，研究者亦希望探究在數學奠基模組的實施中，視障生會顯現何種類型的困難，這些困難又是如何藉由數學奠基模組的鷹架輔助而被視障生克服。

幾何的領域寬廣精深，為了聚焦，研究者首先挑選了探討「平面圖形周長與面積關係」的數學奠基模組「占地圍王」作為研究之教材。「占地圍王」藉由提供視障生實際操弄數學物件的方式，偵測並破解「周長」與「面積」相關的迷思。近年的實徵研究指出，視障

生與明眼生一樣，在判斷封閉平面圖形「周長」時皆會受到「面積」的大小干擾，且干擾的程度兩者並無差異(Babai & Lahav, 2020)。由此可知，視障生與明眼生一樣，均以為面積較大的圖形，其周長也會比較大。所以，「占地圍王」所要建立的幾何概念基礎，對視障生來說具有同等的重要性。「周長」與「面積」為幾何學中基礎的概念，因此從視障生學習幾何之路的起始單元開始探究，研究者希望能夠幫助視障生在學習的起點便能獲得鷹架之協助，得到學習信心。

基於上述動機，本研究目的包含以下三點：

- 一、透過觀察視障生在MGA中學習面積與周長概念的歷程，探討另類的知覺方式所建立幾何學習模式。
- 二、透過MGA的學習歷程和挑戰診斷視障生在面積和周長概念學習上的困難，並檢視遊戲搭建的鷹架是否能彌補視覺不利情況。
- 三、探討在無法經歷視覺化階段的條件下，反思van Hiele理論如何擴充到視障生的幾何學習。

以下我們針對相關研究成果與理論基礎進行文獻考察。

貳、文獻探討

一、視障生之數學學習

以先天能力的觀點來看，視障生之智力與一般生相仿，藉由良好的協助亦能達到如同明眼人一般的數學成就(Amalric, Denghien, & Dehaene, 2018; Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003; Healy & Fernandes, 2014; Jackson, 2002)。甚至有研究指出，視障生於訓練後，其工作記憶容量會優於一

般生(Withagen, Kappers, Vervloed, Knoors, & Verhoeven, 2013)，此為視障生學習的優勢。

在學科的學習上，視障生依賴觸覺與聽覺作為分辨細微事物的媒介，其中觸覺是視障生用來彌補視覺功能缺陷的主要知覺方式(Healy & Fernandes, 2014)。以數學學習來說，視障生需要花費大量的精力先學會數學符號的點字表達法，方能利用點字版的數學課本進行學習(Gulley et al., 2017; Healy & Fernandes)。在數學方面，視障生可以透過教材教具的使用，手眼並用步驟化的學習(鄭靜瑩, 2006)。另有研究顯示出觸覺學習對於視障生的重要性(Rosenblum & Herzberg, 2015)，可見觸覺對視障生是重要的學習媒介。

然而現今的數學教材編排多以視覺化的方式解說數學概念，視障生難以透過觸摸理解視覺化的解釋方式(Gulley et al., 2017; Klingenberg et al., 2019)；同時，以結構化的方式逐步引導學生的紙本數學教材也十分稀少(Mačkowski, Brzoza, Żabka, & Spinczyk, 2018)，加上熟悉數學式的點字表示法之教師並不多(Jitngernmadan, Stöger, Petz, & Miesenberger, 2017)。因此視障生若在課堂上遇到了數學問題，往往要回家詢問父母，或是等待巡迴的視障教育老師方能解決(Gulley et al.)。同時，Spinczyk等(2019)的研究指出，視障生對於複雜的數學式子，難以拆解其結構以獲得訊息，且視障生在數學課堂上由於必須跟隨教師的口語引導，思考上難以獨立運作。這些都顯示他們若要學習數學，在閱讀教材上會遇到較多困難。

除了認知面向，在學習的情意面向上，視障生由於視覺不利較跟不上課堂整體的學習進度，也讓他們更為挫折(Spinczyk et al., 2019)。儘管如此，仍有學者主張，教師正向的鼓勵與肯定能幫助視障生更精進學習並

提高學習動機(Smith, 2017)。實徵研究也支持當數學教學中若增加了針對提升數學學習動機的工具或活動，將能改變視障生對於數學的挫折感與恐懼(Maćkowski, Rojewska, Dzieciatko, & Spinczyk, 2019)。

總的來說，視障生的數學學習在認知或情意面向上都比一般生更為不利，但經教師適當引導與妥善教具輔助，應有補足此視覺不利的機會。

二、MGA：數學遊戲作為一種數學表徵

遊戲式學習(Game-Based Learning, GBL)作為一種教育方法已廣泛被研究人員與教學人員認可，且不受年齡的限制(Hamari et al., 2016)。遊戲融入教學能促進學生的認知發展，且遊戲本身的樂趣與數學知識的建立能增進學習動機，學生亦能從中實現自我超越與訂立更深遠的學習目標(Jabbar & Felicia, 2015; Moon & Ke, 2020)。若將數學遊戲視為學習的「鷹架」，遊戲的具體操作道具有助於學習者透過實體物輔助進行抽象思考(Vygotsky, 1976)。從另一個角度看，同儕在小組遊戲歷程中也扮演著社會支持者角色，因此不只是遊戲本身，一起參與遊戲的同伴在互動中都扮演著鷹架的角色。簡單的說，透過遊戲進行教學就是一個搭建鷹架以協助學習的方式(Chang et al., 2022)。

2019年正式開始實施的十二年國民基本教育強調學生自主行動、社會參與與溝通互動的核心素養(教育部國民及學前教育署, n.d.)，而本研究所使用之數學遊戲教學符合以上之核心素養。在認知上，數學遊戲可以讓學生學習系統思考與解決問題，透過思考與動手操作學習數學概念。在情意態度上，遊戲教學可以引起學生的學習動機與興趣，培養正向的學習態度。除此之外，在遊戲的

過程中學生需要與同儕與老師溝通表達，產生人際關係與團隊合作，以順利完成遊戲任務，本研究所使用之數學遊戲亦可促進視障生與其明眼同儕的溝通互動。

數學教學的重要目的之一是希望學生在學習活動後，能將數學概念與想法保留下來，MGA也不例外。MGA的理念是讓學生體驗有趣的數學遊戲，倘若MGA後無法將概念或想法保留，則學習活動將無法對未來的數學學習產生成效。我們必須思考，透過MGA能為學生奠的「基」是什麼？從結構主義的角度，本研究將這個「基」視為是人們認識事物最基本的認知結構。若根據Bruner (1966)的發現學習論，學童從周遭的事物中經知覺將外在事物轉換為內在事物的過程稱為認知表徵(cognitive representation) (張春興, 1996)。Bruner將兒童的表徵發展分為動作(enactive)表徵、形像(iconic)表徵與符號(symbolic)表徵三個時期，兒童從動作表徵到形像表徵的主要特徵之一，是從透過實際操作瞭解周遭事物，到經由圖片在感官中留下印象獲得學習，這正是MGA在這個階段想要達到的效果。Vinner (1983)將這種在跟概念相關聯的認知結構稱為概念心像(concept image)，亦即概念心像的角度看，數學遊戲的操作過程對學生而言是產生概念心像。當再次遇到某個概念時，這個被保留的心像概念會再次被喚起。換言之，結合數學概念的遊戲是讓學生從實際的操作經驗中形成數學概念心像，待未來遇到相關概念時再，從記憶中提取這個概念心像。

MGA即為一個注重「建立數學知識基礎」的數學遊戲。國內學者參考Piaget (1962)之「同化」與「調適」以發展數學知識的精神，加上結構主義學者Dienes (1973)提出的「數學學習歷程六階段」遊戲理論，以此發展出藉由遊戲來「奠基」數學知識的活動(林

福來、謝豐瑞，2014)。在經過大規模的模組開發與教學實作之後，國內陸續已發表的實徵研究提供了數學奠基模組教學成效的支持，MGA能夠有效提高各種程度學生於數學課堂的認知與情意投入(梁仲容、韓弘偉、黃建中，2014；許鳳紋，2020；Lin et al., 2018)，這些都顯示MGA以遊戲形式作為一種數學表徵有其意義。

從上述的研究中，我們可以看出：MGA有助於提升一般生的數學學習成效及數學學習動機，但對於視障生是否也有同樣效果的研究則付之闕如。因此，本研究試圖探究：MGA是否亦能提升視障生的數學學習成效？並進一步分析數學奠基模組影響視障生數學學習的歷程。

三、幾何思考模式理論與面積周長的相關迷思

van Hiele (1986)提出有系統的理論，該理論將學生的幾何思考分為五個層次：視覺期、分析期、非形式演繹期(informal deduction)、形式演繹期(formal deduction)、嚴密性(rigor)，並提出每個層次的發生是有階段性且循序漸進的。本研究關注van Hiele理論前二層次：「視覺期」與「分析期」，其中視覺期的學童主要依賴視覺認識幾何形體，可以分辨、稱呼、比較與操弄常見的幾何形體。進入分析期階段，學童已能利用形體的構成要素，以及要素之間的關係來分析幾何圖形，並能透過具體操作發現形體間共有的性質並進行分類(van Hiele)。臺灣地區的國小學童，通常處於五個層次中的視覺期至分析期兩個階段(李源順，2020)。當國小學童僅使用視覺、直觀、生活經驗來辨識抽象的幾何圖形時，便會產生幾何概念的迷思，無法過渡到分析期(吳德邦，1997；van Hiele)。

以面積與周長的學習來說，學生常見的

迷思有1.平面圖形內的線段亦為周長的一部分；2.「周長越大，則面積一定越大」及其逆命題；3.「面積相等的圖形，則周長也會相等」及其逆命題(徐偉民，2004；鄧玉芬，2015；Babai & Lahav, 2020; Winarti, Amin, Lukito, & Gallen, 2012)。後兩者迷思概念也可以視作直觀推論“more A-more B”與“same A-same B”的一種(Tirosh & Stavvy, 1999)，處於視覺期的學童，由於僅使用視覺接觸少數類型的平面圖形，更容易出現此類直觀推論的迷思。在克服這些直觀錯誤上，Hourigan與Leavy (2020)認為讓學生進行實體教具的操作、相互分享及遊戲挑戰，有助於學生理解面積與周長兩者的性質與關係，減少直觀錯誤的發生。

如前所述，一般生學習面積與周長時，會因為直觀推論及單純以視覺辨認幾何圖形的例子而產生迷思，這些迷思與「視覺期」過渡到「分析期」的歷程相關。研究者也因此好奇：對於視障生而言，他們會遇到的迷思是否與一般生有相同之處？視障生是如何經歷「視覺期」與「分析期」的？更進一步，教學者可以如何協助視障生突破這些迷思？前述對於一般生的研究文獻，成為研究者參酌的資料之一。

參、研究方法

一、研究設計

根據本研究目的，設計一個自然且符合視障生學習場域的教學活動是必要的。本研究採用個案研究法及參與觀察法的質性研究設計，聚焦於學生對主題學習歷程、運用策略與學習困難等議題(issues)探究研究參與者之獨特性。資料收集來自MGA進行之參與觀察、錄影資料，以及前、後測資料。而前、後測資料主要針對學生先備知識確認、學習

成效或迷思概念(見「研究工具」一節)，並以學習回饋單來瞭解視障生參與本次活動後的感受。

二、研究參與者

本研究之教學講師為擁有20年以上教學經驗的國小數學輔導團員，具有MGA師資資格，並進行奠基模組教學五年以上經驗，同時協助本研究數學奠基模組改編，對於「占地圍王」模組的內涵十分熟悉。參與研究之七名視障生採立意取樣，皆曾參與本研究團隊活動。其中第一場之三名學生均就讀普通班；第二場之四名學生中有三名就讀於普通班，第四位來自特殊學校。七位學生平均年齡10歲。女性有四位，男性有三位。除了視覺障礙之外，皆無其他感官或肢體上之障礙。這七個學生之中，有六位是以點字為閱讀媒材，另外一位可以閱讀40號的Word中文標楷字體。這七位均口說表達流暢。

三、奠基模組「占地圍王」之設計

(一)「占地圍王」奠基模組原始設計與轉化

本研究教學使用之數學奠基模組「占地圍王」改編至同名的模組，改編主要考量視障生操作與記錄之便利性，除了將所有文字轉為點字、邊界以棉條強調之外，亦設計魔鬼氈板用以定位、計分板用以記分數(也能觀察面積與周長之關係)、塑膠盒用以集中管理

教具等，其餘規則都不更動。此外，為求活動進行之流暢性，所有參與學生皆配置一名助教從旁協助教具之收納。教具請參見圖1。

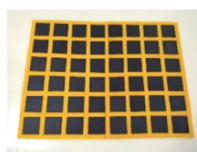
(二)遊戲規則

- 1.先擲骰子決定先後順序。
- 2.輪到之學生擲骰子一顆，根據骰子點數取出相同數量的冰棒棍後在底板進行圍地，完成封閉圖形才算是占地成功，所圍面積數也是「所得分數」。
- 3.已放置好的冰棒棍在遊戲過程中不可以更動位置。
- 4.每回合共會有六輪擲骰子機會，六輪結束後，結算分數。
- 5.若每一輪在完成圍地後有圍出新的封閉圖形，則必須對新圖形的周長與所圍面積加以記錄。
- 6.遊戲另包含三種功能卡(第二回合用)，分別是拿掉對手棋盤上任意三根冰棒棍、再丟一次骰子、對手暫停擲骰子一次。每張功能牌只可使用一次，可以在每輪自己擲骰子時發動。

(三)教學流程

兩個研究場域均歷時兩小時，每場次可再分五個節次。節次主題與具體進行內容如表1。

本課程教學目標在使視障生理解面積、



(a)底板



(b)冰棒棍



(c)計分板



(d)數字卡



(e)塑膠盒



(f)骰子

圖1：教具一覽

周長與形狀概念發展與彼此關聯。在節次2中教學主題是藉由實體教具操作，引導學生強化概念理解並釐清「面積、周長、形狀」三者間的關係，教學講解概念主要包含：1.等面積不一定等周長、2.等周長不一定等面積、3.等周長不一定形狀相同(等周異形)、4.等面積不一定形狀相同(等積異形)、5.等周長等面積不一定形狀相同、6.等周長時，形狀越方正，面積越大，以及7.周長與面積的關係，其結構可參考圖2。

在圖2中，箭頭首尾代表由性質等同到性質為異，因為「同形狀不同周長／面積」之內容屬於相似形的相關內容，本研究不予討論。

四、研究工具

(一)課程觀察資料

為避免記錄上的疏漏，採用錄音筆、攝影機、現場觀察日誌記錄教師兩場次的教學。錄音筆記錄教學過程中師生之對話，並轉為逐字稿之用；攝影機除記錄整體教學過程，每位學生也有獨立的攝影機記錄個別學生教具操作情形；現場觀察日誌由助教及研究人員即時記錄教學現場之各種情況，作為課程後續討論與反思之用。

(二)前、後測問卷

前、後測問卷各一份，分別以四個開放

性問題與操作確認學生先備經驗與探測學習成果。前測問題為：1.請用四根冰棒棍排成一個圖形。2.請用八根冰棒棍排成一個長方形。3.這個圖有幾根冰棒棍呢？圍出了幾個正方形？(圖3(a)) 4.如果一格代表一個單位長，下圖的周長為何？面積為何？(圖3(b))。題目皆有實體教具輔助，前兩題主要檢測學生操作的能力，採實作方式施測。後兩題探測學生對於周長與面積基本認識，採口頭問答並由助教記錄之。

後測四道問答題的題目為：1.面積相同的圖形周長一定相同嗎？為什麼？2.周長相

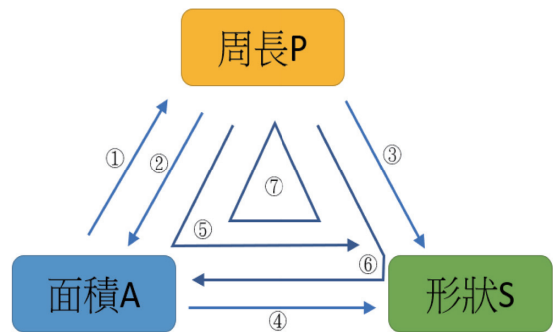


圖2：遊戲融入教學內容架構



(a)前測的第3題題項 (b)前測的第4題題項

圖3：前測問題圖形

表1：占地圍王活動流程節次

節次	主題	具體進行內容	附註
1	教學引入	講解教具操作規則	含學生自我介紹
2	面積與周長概念	概念講解與教具操作	
3	遊戲第一回合	進行遊戲，引導學生發表心得	
4	遊戲第二回合	進行遊戲，引導學生發表心得	納入功能牌
5	課程總結	教師總結	

同的圖形面積一定相同嗎？為什麼？3.周長越大的圖形面積一定越大嗎？為什麼？4.相同面積的圖形可以有很多形狀嗎？為什麼？四題皆採口頭問答的方式進行施測，用以分析學生之學習成效。

五、資料分析

本研究主要採用內容分析的資料處理方式，對前、後測試題與教學錄影資料文字檔進行分析。前、後測試題為檢視學生答題的正確性。教學錄影資料則先轉錄成文字檔，再劃分與界定「分析單位」。在內容分析法中，分析單位的劃分通常依據主題、人物、項目、時間與空間、段、句等(歐用生，1993)。實際作法上，本研究依據教學形式、教學內容、教學策略與目標、講述對象等四

項進行分析單位的劃分，為方便描述本研究將分析單位稱為「區塊」(Block)。區塊界定之原則如表2。

以第二場區塊8~9為例，從表3可以看出原區塊8是在講解遊戲中面積的意義，到了區塊9時教師之教學目標改變了，改為以形成性評量檢測學生能否將圖形的周界用冰棒棍正確圍起。根據「原則3：教學的策略或目標改變」，在這裡研究者劃分出下一個區塊。

整堂課程之逐字稿依照上述規則劃分區塊後，首先對於該區塊的教學活動內容主要是由教師(T)教學帶出或學生(L)操作時自己發現或運用(含形成性評量學生作答)兩類進行註記，再對不同之「數學概念」進行編碼。數學概念一共分為10個類別，前六類由兩碼組成中間短槓分開，其中第一碼取「相等之幾

表2：區塊劃分原則

項次	切割原則	區塊間劃分原則之內容說明
1	形式	教學形式上的改變，如：教師講解、學生發表、學生操作、形成性評量
2	內容	教學內容的改變，如：四根冰棒棍圍成一個面積改變為六根冰棒棍圍成兩個面積
3	策略	教學的策略或目標改變，如：引入講解、練習、評量
4	對象	教學對象的改變，如：全體改變為個人；生A改變為生B

表3：逐字稿區塊示例(區塊8~9)

區塊項次	切塊原則	逐字稿	場次	編碼
8	形式：講解規則	生A：「底板是什麼？」 生B：「就是那個有正方形的東西。」 師：「一大塊毛毛的土地。」 生A：「這個好像磁磚喔。」 師：「你可以先摸，但先不要動它喔。」 生A：「卡片要不要拿掉？」 師：「那個計分的卡片不動喔。」	二	二8-T, OMT
9	策略：形成性評量	師：「我現在幫你放了一塊土地，(全體開始摸你摸摸看然後請你把它周界用冰棒棍圍起來。(全體開始動作)中間的不算周界，周界是圖形的外面。(生C拿完冰棒棍開始圍)」 師(對著生C)：「周界是只有外面喔，所以如果你圍得那一條左右都有凸出來的紙板表示那個不是。」	二	二9-T, RPA

何特徵」，第二碼是「不等之特徵」，例：「P-A表示等周長不等面積概念」；後四類另以面積與周長的關係(RPA)、獲勝策略(WS)、其他有意義教學(OMT)、與認知無關對話(OT)分別表示。編碼規則如表4所示。

依此編碼規則，逐字稿的每一句話皆以三組數字或英文字來進行編碼，第一碼表示區塊所在場次與區塊序，第二碼為教學活動主體，最後一碼表示數學概念。舉例來說：「二9-T, P-S」表示第二場第9個區塊，活動主體是教師教學，內容為「等周異形」。

六、研究信實度

為確保本研究信實度，由本研究團員親自將教學影片內容聽寫為逐字稿。之後並與現場觀察日誌交互檢核。逐字稿內容與其編碼由研究團隊成員初步完成後，再交由兩位數學教育的教授及一位特殊教育的教授共同

檢核與相互質詢。最後再請兩位研究同儕共同參與最後的編碼檢核與釐清本論文內容。

肆、結果與討論

依據本研究結果，以下分三大層面論述：以非視覺遊戲作為鷹架學習幾何歷程之機會與圍界；視障生因視覺不利產生的周長與面積學習困難與教師提供遊戲鷹架之其補足歷程，以及van Hiele理論視覺階段能否以其他感官取代。

一、以非視覺遊戲作為鷹架學習幾何歷程之機會與圍界

如文獻中其他研究所言，視障生因視覺不利產生諸多幾何學習困難，本研究以另類知覺遊戲提供關鍵策略試圖補足視覺缺陷，雖有其局限但確實有諸多成效。以下分別就遊戲提供的機會與圍界報導。

表4：概念編碼規則表

編碼	概念	內容說明
A-P	等面積不等周長	(T)講述或引導學生瞭解該概念
P-A	等周長不等面積	(L)學生透過操作發現或說出(含形成性評量)
P-S	等周長不等形狀(等周異形)	
A-S	等面積不等形狀(等積異形)	
PA-S	等周長、等面積不等形狀	
P-SA	等周長的情況下，形狀越接近正方形面積越大	(T)講述或引導學生瞭解該概念 (L)學生操作／形成性評量：用最少的冰棒棍，排出最大的面積
RPA	1.周長、面積的意義 2.周長可以形成面積 3.周長與面積的關係	(T)講述或引導學生瞭解該概念；定義周界、周長、面積概念 (L)學生自行發現規則或透過操作圍出最大周長的圖形的發現
WS	獲勝策略	(T)引導學生發現遊戲策略 (L)學生歸納出獲勝策略、方法、功能牌使用原因
OMT	其他有意義教學	主體相互自我介紹、講解遊戲規則、如何記錄、計算總分、整理場地、課程總結(T、L以主要發生者編碼)
OT	與認知無關活動或對話	閒聊

註：A：面積(Area)；P：周長(Perimeter)；S：形狀(Shape)；T：教師教學帶出；L：學生透過操作發現或運用(含形成性評量)；RPA：Relationship/Perimeter/Area；WS：Winning Strategy；OMT：Other Meaningful Teaching；OT：Off Task。

(一)遊戲搭建鷹架提供視障生學習的機會

相較於一般生，視障生在學習幾何雖處弱勢，但在本研究提供可觸摸的周界、面積、記錄板等另類知覺教具後，證實提供他們合宜之學習工具、教材，亦能帶給他們有效學習，甚至能自行摸索出背後的幾何規律。以下是幾個實徵發現。

1.透過遊戲可以讓視障生更明確的發現或說出概念

一般教學的重點多是透過教師講解或例子來說明，而視覺不利者當下僅靠聽覺，但若此重點能出自學生之口，達到「其言若出自於吾口，其意若出之於吾心」的功能，學生會更有印象。研究者發現透過遊戲，視障生確實有更多的機會能透過教具操作自行發現規律。以生C為例，在老師讓學生進行當圖形增加一格土地時邊長的變化，生C從操作中自行發現面積每增加一格時，所需的冰棒棍則會增加兩根(如圖4)。這個發現對於一般生並不困難，他們透過觀察數據、圖形可以歸納出此規則，但當提供適合的活動，視障生亦能透過正確觸摸與感受歸納出其中規則，表示觸覺確實有相同功能。

以下為另一個由學生自行發現的觀察證據，說明視障生透過本遊戲的發現。對話如下：

師(以八根冰棒棍排出兩種不同的圖形)：「好，來摸一下你面前現在的這塊地周長是多少。」

全體：「八。」

師：「確定？」

全體：「確定。」



圖4：面積每加1，周長多2之規律

師：「面積是多少？」

全體：「三、四。」

師：「怎麼好像不一樣？好像有人三，有人四。好，暫停，我們左右交換摸摸看，檢查看看它的圖形跟你的圖形有沒有不一樣。(全體交換板子)那你先檢查它的周長是不是八，你檢查它的周長有沒有貼錯。」

生A：「這個是三耶，我的是四。」

師：「哎呀，發生什麼事了。」

生C：「周長一樣的，面積不一定會一樣。」

師：「為什麼會不一樣？」

生A：「因為形狀不一樣。」(二13-L, P-A)

2.學生的發想能被保留在遊戲體驗中並適時引動

在一般的數學課堂，許多的發現並非一蹴可及，需要經過一段時間的醞釀而得。而由於視障生需記憶大量資訊，加上認知負荷的限制，以致他們難以趨入，需長時發想才能體悟的內容。但因有遊戲教具當鷹架，使得一些發想能被保留下來，甚至會有非預期的產出。

如第二場(二17-T, P-S、二18-T, P-S)，教師讓每位學生用八根冰棒棍圍成一個封閉圖形，接著彼此交換看對方的圖形與自己是否一樣，並複製一個別人有但自己沒有的圖形，教師藉此隱含等周長不同形狀的想法，但並未特意講述等周異形的結論，並隨後讓學生繼續操作其他等周長不等面積或周長與面積的關係之任務，而在課程一段時間後，學生自己理解到相同周長形狀不一定相同(二25-L, PAS)，甚至可以自己發現：當周長一

樣，形狀越接近正方形，所圍的面積越大(二22-L, RPA)。這些都並非教師直接給的命題，而是學生在遊戲中累積想法最後得到。

此外，學生從操作中的發現，不一定是教學者設定的教學目標。如以下實例(二11-L, RPA)，教師讓學生用四根冰棒棍圍出一格，接著讓他們增加冰棒棍來圍出兩格、三格並加以記錄，本意是讓透過學生操作冰棒棍所圍出之圖形來熟悉周長的界定，生C卻在操作中自行發現面積與周長之相關規則，這都是因為操作遊戲才有的效果。如生C：「我發現了一個事情耶！它的面積1、2、3，然後周長都是兩倍多二，所以面積1的時候周長是4，面積2的時候周長是6，面積3的時候周長是8，周長會比原來(前一個)多2，面積多1周長會多2！」(二11-L, RPA)。

3. 運用數學作為遊戲獲勝的策略(圖形越方正，面積越大)

活動進行中，每位學生會有六輪丟骰子的機會，剛開始大家並無策略，有多少圍多少，但發現在既有的圖形上再往外擴充，這樣的策略會使得圖形中間有不必要的分隔，降低土地獲得效率。如生E在輸一場後觀察別人的策略發現：「我知道了，因為(生G)這裡沒有隔起來，所以比較多塊。」並且示範把中間的冰棒棍拿掉。師：「所以中間的分隔線不要圍，只要用外面的就好，這樣就會比較多格」(一59-L, WS)。

學生開始會大膽地擴張土地，捨棄中間不必要的分隔，將所有的冰棒棍單純用於圍出一個大圖形。不過由於冰棒棍是逐次獲得且有運氣成分，可能連一個圖形都來不及圍出而前功盡棄，使得學生面臨太早收就圍不出大面積、太晚收又可能功虧一簣的兩難。因此評估取得周長數量(骰子數)不足之風險所制訂的對策也很重要。

教學者在過程中發現，學生自己會避免因之後所擲出的骰子點數過少，無法得到足夠的冰棒棍圍城圖形而提前開始圍地的情形。在幾次的遊戲體會，學生彼此分享獲勝的策略，學生的策略就是應用「在相同的冰棒棍數下，圍的形狀越方正，面積越大」之概念。生C圍出了該輪最高分數，教師引導學生觀察並發現其中的獲勝策略：

師：「所以大家都擺完了嗎？OK，G你總共占了幾塊地？」

生G：「四塊。」

師：「雖然你的冰棒棍很多，但好可惜最後有些沒有圍起來。」

生G(微笑)：「因為太早圍起來地就會很小。」

師：「C，說說看你是怎麼讓面積變大的？」

生C：「我就想辦法讓周長拼得比較遠。」

師：「那你花了幾次完成那個好大的周長？」

生C：「我花了四次。最後如果沒有圍起來就沒有嘛。」

師：「那你到什麼時候決定不要一直往外放，要開始圍起來？」

生C：「第三次的時候開始。」(二66-L, WS)

該生先將前三次擲骰子所得的冰棒棍全部用於向外擴張地盤，為避免圈地過大而最終來不及圍攏的情況，學生選擇在第四次得到冰棒棍後將地盤圍攏。但學生擴充的方式並非單邊往外擴充，而是先將前兩次所得的冰棒棍平均放置先圍出正方形的兩邊，之後幾次所得冰棒棍再以正方形先圍攏，以確保

先獲得一個較大的地，這是一個體現視障生在GBL中運用所學的例子。

4. 功能卡的功能：圍出多塊面積以避免被拔除周長之風險

在遊戲第二階段引入新的功能卡：「抽走對方三根冰棒棍」，這個新狀況使得學生必須有新的因應策略。在遊戲後的討論中，教學者詢問學生「被抽走三根冰棒棍」之可能後果，並讓學生提出因應對策。

師：「問你喔，如果一個圖形被人家拿掉三根冰棒棍會發生什麼事？」

生C：「圍不起來。」

師：「就不是圖形了，對不對？」

生C：「恩。」(二67-T, RPA)

師：「所以我如果擔心對手對我使出這一張，那怎麼辦？」

生D：「不要一次拼那麼大，就是小小的這樣。」(二68-T, WS)

觀察遊戲結果可發現，大多學生為避免被功能卡牌攻擊，皆將所圍土地分為兩塊。相同的，要如何運用這個功能卡使對手無法圍出封閉式圖形(面積)？教師觀察視障生們在功能卡上的操作後，發現學生無法讓「拔除三根冰棒棍」的使用方式發揮最大效益。

生E(笑著說)：「結果被狠狠的拔走了三根。」

師：「如果是我就比你更狠，才不會拔那三根，我會拔別的。」

生G(驚訝)：「喔。」

師：「要想想，甚至可以在你發動攻擊時，把人家的土地拔光光。」(一78-T, WS)

我們發現視障生較無法很好地發揮該卡

片的最大效益，甚至拔除了對手九根冰棒棍數後，仍給予對手圍出八塊土地的機會。他們一開始使用此功能卡時，想到的都是從最大塊面積中移走連續三根，而不是分散使用以達到最大效益。在防守上，也只避免拼成一個大塊。此情況與一般生玩這個遊戲的表現確實不同，研究者認為可能因視障生受限於視覺而無法觀察組員之條件。

(二)視障生在非視覺遊戲教學策略下之視覺學習圍界

遊戲作為鷹架雖能彌補視覺不利，但仍有其限制。表5是根據教學紀錄的內容分析結果一覽表。包含被編碼的概念首次出現、最末出現的區塊位置、總出現區塊數、總出現時間(秒)。根據表5，本研究發現即便在遊戲的環境下，視障生仍有以下必須面對的幾何學習困難。

1. 視障生之GBL脫離不開教師的大量解說

從表5中教學教師在兩場教學的時間分配可以看出，在第一場中，由教師擔任教學主體解說或引導(T)的時間比例高達80%，第二場也高達66%，感受上高於一般的MGA許多。進一步細究其因，發現即便是學生為主的操作任務，也因為學生無法以視覺輔助遊戲進行需要教學者時時介入或引導，甚至於需要教師指示方能自我驗證。相較於一般生可以輕易地在遊戲過程中以視覺檢驗對手操作的正確性，視障生光是正確地操作已十分費力，更無暇去檢驗對手操作，因此操作的驗證只能依賴教師，需要學生彼此互動時反而變成教師為主體的講解。以下列對話為例：

師：「你能不能試試看，你可以用幾根冰棒棍當作柵欄圍好兩塊土地。好了嗎？G，你圍了兩塊土地用了幾根冰棒棍？」

表5：兩場教學之內容分析出現區塊位置、區塊數、時間(秒)與百分比一覽表

主要對象		教學內容		第一場(2020/3/15)						第二場(2020/6/6)						兩場合計	
				首現區塊	未現區塊	區塊數	(%)	秒數	(%)	首現區塊	未現區塊	區塊數	(%)	秒數	(%)	秒數	(%)
T	OMT	1	81	45	52.33	3,238	56.30	1	108	35	32.41	1,760	29.28	4,998	42.49		
L	OMT	42	78	12	13.95	822	14.29	79	85	5	4.63	158	2.63	980	8.33		
T	RPA	3	31	2	2.33	109	1.90	3	102	11	10.19	796	13.24	905	7.69		
L	RPA	12	25	4	4.65	164	2.85	11	91	32	29.63	1,351	22.48	1,515	12.88		
T	P-A	8	84	5	5.81	502	8.73	12	20	4	3.70	401	6.67	903	7.68		
L	P-A	14	14	1	1.16	30	0.52	13	13	1	0.93	72	1.20	102	0.87		
T	PA-S	7	86	2	2.33	161	2.80	24	24	1	0.93	80	1.33	241	2.05		
L	PA-S							25	25	1	0.93	7	0.12	7	0.06		
T	WS	5	64	10	11.63	517	8.99	30	101	4	3.70	546	9.08	1,063	9.04		
L	WS	59	80	2	2.33	147	2.56	65	96	4	3.70	234	3.89	381	3.24		
T	P-S							17	18	2	1.85	86	1.43	86	0.73		
L	P-S							105	105	1	0.93	11	0.18	11	0.09		
T	P-SA	36	36	1	1.16	30	0.52	19	26	2	1.85	247	4.11	277	2.36		
L	P-SA							21	21	1	0.93	34	0.57	34	0.29		
T	A-P	85	85	1	1.16	19	0.33	94	94	1	0.93	93	1.55	112	0.95		
L	A-P							95	107	3	2.78	135	2.25	135	1.15		
T	A-S	83	83	1	1.16	12	0.21							12	0.10		
L	A-S																
合計		86				100.00	5,751	100.00	108				100.00	6,011	100.00	11,762	100.00

註：1.粗體為百分比高於10%的項目。
2.主要對象、教學內容編號說明請參考表4。

生G：「七。」

師：「七根，OK。好，所以這兩塊地是連在一起的還是分開的？」

生G：「連在一起的。」(研究者註：此處學生誤解「連在一起」意思)

師：「那F，你圍了幾塊土地？」

生F：「兩塊。」

師：「你用了幾根冰棒棍？」

生F：「六根。」

師：「六根！那G用了七根你用了六根，怎麼會這樣呢？你覺得你的跟他的哪裡不一樣？」(一75-T, OMT)

這個對話可看出，原情境中教師希望讓學生彼此觀察自行發現差異，在一般教學情境下教師只需要讓鄰近的學生彼此觀察一下，但對視障生來說，在雙方都看不見對方作法且不方便彼此互相檢驗下，教師為了要讓所有學生都明白，經常變成教師接手解說，使得學生活動轉成教師解說之比例偏高。

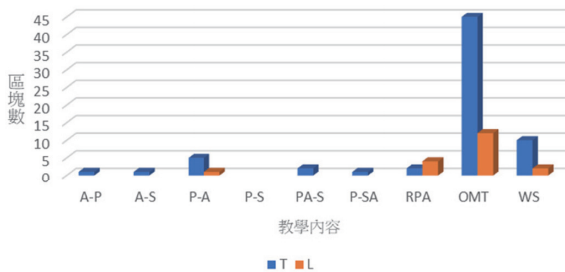
編碼中也可以看出教師活動主要集中在OMT這一個編碼上，第一場師生甚至高達70%的時間，這當中很多是關於遊戲規則的解說與交流，由此我們也可以再次驗證，遊

戲融入教學時需要有很多時間在非教學主題上，使得許多老師質疑其效能，尤其視障生無法看到示範費時更甚。教學者也留意此事需改善，因此在第二場時，教師將許多遊戲的講解結合教學內容，如透過冰棒棍來解說周界、周長，製作厚紙板方塊來講解面積概念，讓遊戲進行更有教學效能。

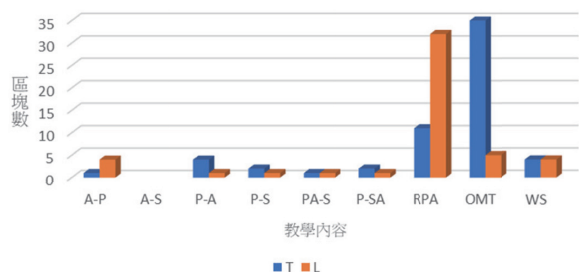
2.若無老師帶出重要數學內容視障生較難以從遊戲中自得

圖5分別是兩場教學中教師與學生主體所展現的各類教學內容，可以看出即使透過遊戲，教師沒有帶出的數學內容，學生較不容易從自己操作中自我發現或展現(如第一場P-S或第二場A-S)。也可以看出，就算教師有帶出的數學內容，學生也不一定會在自我探索時展現出來(如：第一場A-P、A-S、PA-S、P-SA)。

雖然沒有老師帶領，學生很難自行從遊戲中發現或運用數學內容，但從第一場與第二場RPA、第二場A-P也可以看出，一旦教師帶出了內容，學生自我展現的時間與次數甚至比老師講解的多。綜合來說，老師講述的引入只是學生自我發現或展現的「必要條件」，非充分條件，說明對於視障生，探索活動中教師的講解仍不可或缺。



(a)第一場



(b)第二場

圖5：(a)第一場與(b)第二場教師與學生展現各類教學內容區塊數

註：圖中編號說明請參考表4。

3.遊戲應如何搭配教材？從周長入手或是從面積入手受到實際遊戲限制

有關周長與面積單元，在國小教材是屬於四年級「能理解正方形和長方形的面積與周長公式」，特別要求邊長須皆為整數，期能帶領學生探討長方形等積異形或等周異形，也能瞭解等積不一定等周長或等周長不一定等積，有些版本也會在此處藉由公式計算結果探討周長相同的長方形越接近正方形面積越大。由於本遊戲所涉及的是複合圖形的面積與周長關係，在現行的三個版本(N、H、K版)教科書單元都放在面積與周長公式之後，但教學略有差異。大致說明如表6。

可以發現這些版本探討周長和面積關係時，並非限定要先從周長或面積著手。本研究之遊戲顧及視障生操作方便與遊戲本身的特性(擲骰得周長以圍地)，因此無論是第一場或第二場，老師或學生主體都是從周長出發探討周長相同面積可能不同(P-A)，再進一步探討周長相同形狀可能不同(PA-S、P-S)；相對的，從面積相同出發的A-P、A-S則在課程的最後，並未有學生活動，甚至第二場因時間未及探討等面積不等周長(A-P)。分析原因，本研究的活動與K版本稍為相像，先透過遊戲擲骰子得到冰棒棍(周長)圍出土地(面積)，加以記錄後觀察結果，使得周長相同的討論會先於面積，加上視障生討論費時，時間因素使得數學內容有所偏重，這也是遊戲

本身帶來的限制。未來將遊戲稍加改良，如以骰子得到面積，再圍以周界(情境設計圍籬笆或安排衛兵)，或可使數學內容得以平衡。

二、視障生在面積和周長概念學習上的困難與教師提供遊戲鷹架之補足情況

前一節中我們從遊戲本身描述視障生的學習機會與限制，本節將進一步帶入數學內容，探討視障生在學習面積與周長概念會產生學習困難，以及遊戲如何擔任鷹架來彌補這些不利。這些困難有的與一般生類似，有的則不同。

(一)視障生認知中的形狀與面積

本研究觀察七位視障生在前測題「請用八根冰棒棍排成一個長方形」的作答情形，發現僅一位學生能使用八根冰棒棍排出一個長三根、寬一根冰棒棍的長方形，其餘六位學生均無法完成任務，頗令我們訝異，因為長方形是最常見的幾何圖形，若對於長方形的掌握不好，對於其他圖形就更困難了。這些學生的錯誤情形包含排出非長方形圖(如圖6)、未使用所求根數(如圖7)、或是非圍出封閉圖形(如圖8)。可以發現這些非常見的圖形或許都有部分與長方形相同的特質，如封閉、直角、甚至像圖8那樣具有長方形外觀，可見在這些視障生腦海中長方形包含更多面貌。

表6：各版本在本單元的內容安排

版本	內容安排簡介
N版	藉由面積 8×2 和 4×4 的長方形與正方形讓學生感受「面積一樣周長不一定一樣」，再透過 7×1 、 6×2 、 5×3 、 4×4 的圖形說明「周長一樣面積不一定一樣」，同時可以說明周長一樣的長方形中，越接近正方形面積越大。
H版	以兩題 56×24 、 40×40 說明周長一樣，但形狀可能不同；用 4×3 和 6×2 說明面積一樣，形狀可能不同。
K版	藉由文字題解題活動，讓學生先在方格紙上畫出18單位長的所有可能圍法，讓學生透過周長與面積計算，發現周長一樣面積不一定一樣。

幾何重視「形」，而對於形的認識最好的途徑仍是透過視覺，因此當視障生僅能透過觸覺感受圖形外形、靠聽覺理解其幾何性質，對於幾何圖形的形是難以整體感受。除了對圖形的認知，在周長計算時，因為視障生靠觸摸點計周長數，而手指逐一點計常漏計或重複計算，例如：在前測的題目計算周長時(如圖9)，有兩位學生都得到九個單位長，這些都是視覺不利所造成的學習困難。本研究所設計的遊戲將周長形式化為實體，透過骰子控制所得冰棒數拼湊圖形，因此學生對於多少單位的周長特別有感受，也讓視障生對於周長的計算更能掌握。

再以「面積」概念為例，前測時我們發現有一位學生無法瞭解什麼是面積，當老師對其解釋面積是圖形所圍出範圍的大小時，該名學生並無法理解圍出範圍大小。經事後分析時意識到當明眼人「看到」一個長方形圖形(如圖10)，視覺上同時看到邊框及內部，因此一般生對於長方形包含或不包含內部之間相互切換相對容易，因此當需要定義長方形或計算長方形周長時，可以將視角放在邊

框；而在計算長方形面積時，同時能將視角看到內部。但對於視障生而言，他們無法同時感受邊框與內部，當實體或平面圖只有邊框，藉由觸覺感受不到內部大小，因此無法瞭解一個長方形框其所稱的面積所代表的意義；如果是實體平面則反過來感受不到邊與頂點。因此在第一場教學後，教師在第二場教學前特別製作一平方單位的厚紙板，讓視障生在計算所圍面積時改以這些正方形厚紙板裝填並計算個數，將計算格子與面積結合起來，讓視障生能同時感受邊(冰棒棍、周界)與內部(厚紙板、面積)，便改善了只摸到平面圖形的缺失。

經過本課程後，本研究對所有學生進行後測，發現七位學生中有四位得到滿分分數，四位皆能理解等面積不一定等周長、等周長不一定等面積、周長越大的圖形，面積不一定越大，以及等面積圖形可以有很多形狀。僅一位學生仍有「面積相同，周長一定相同」的錯誤，三位學生有「周長越大，面積一定越大」的錯誤，經過再次講解配合學生操作後，皆已建立正確概念。

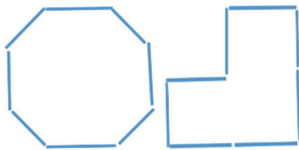


圖6：前測的錯誤類型：
非長方形圖



圖7：視障生未能完全使用
所求根數排列成長方形



圖8：前測的錯誤類型：
非圍出封閉圖形

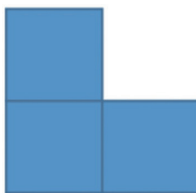


圖9：視障生由於視覺不利
造成周長計算錯誤



圖10：前測的錯誤類型：
學生無法理解面積為四個邊長所圍成的範圍

(二)周長的界定包含內部的線段

周長是指圖形邊界的長度，一般生對於圖形「外圍」容易理解，但是對於視障生而言，靠著觸覺觸摸圖形的組成線段，並不容易區別線段的角色，如邊、高、對角線。例如：以下對話可以知道，視障生會將「圖形內部的冰棒棍」納入周長的統計，不一定能很自然的分辨擔任周長的線段。

師：「現在請你用冰棒棍把這兩個格子周圍圍起來，記錄面積與周長。」

生B：「周長6面積2。」

生D：「我這裡是2跟8。」

師：「兩個格子中間那條是不算的喔，我只要兩個格子合起來的周圍，這樣子要怎麼記錄？」(一5-T, P-A)

本活動是在既有的圖形上再建立新的連通圖形並個別記錄經過，特別能針對此迷思加以修正，幾次遊戲後學生從活動中感受周長圍出土地的意義，自然的理解周長不能包含內部的線段，有效的刪除迷思概念。

(三)圖形大小可能指的是外圍輪廓大小

對於一般生來說，當意指某個圖形比較大時，表達的意思是「面積比較大」的圖形，但對於視障生來說，他們使用觸覺感受一個圖形(或其大小)時，往往是從觸摸「物體的輪廓」開始，因此當他們說某個圖形較大時，所表達的含意可能有「面積比較大」或「周長比較大」的圖形，如果教師沒有進一步探知將難以分辨，如圖11，在相同面積都是6的情況下，視障生透過觸摸容易認為左圖是「比較大」。

從實際的教學紀錄上，發現以下的對話：

生A：「我發現面積比較大的，圖形會比較大。」

師：「面積比較大，圖形會比較大是一件事，對不對？所以你要跟我說的應該是面積怎麼樣的時候，對周長有什麼影響？」

生B：「面積比較大，周長就比較多。」(二22-L, RPA)

根據當時的教學脈絡，當學生說「我發現面積比較大的，圖形會比較大」，想表達的內容應為「面積比較大的圖形，周長會比較大」。仔細分析對話，若學生認為圖形大代表面積大，則學生不用「發現」一詞。可見學生將圖形大和周長較長視做同義詞。教學者當下可能沒有留意到這一點，因此誤認為學生說了一個同義詞，實際上學生可能認知的圖形大小不一定是面積，因此這個回答有其意義。進一步分析，視障生容易將圖形「周長比較大」視為「面積比較大」，可能的原因是這些視障生絕大多數就讀普通學校，和一般生的學習環境是相同的，因此難以理解明眼人口中所謂「比較大的圖形」之涵意，此發現與van Hiele (1986)所述之視覺期較不同，因為視障生缺乏利用視覺直觀感受幾何形體性質的機會，也容易有語意上的誤解。

由於本活動是以面積作為計分勝負的判

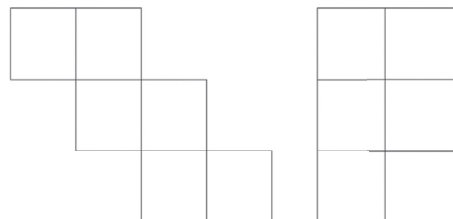


圖11：前測的錯誤類型：
視障生摸出範圍較大的圖形會認為面積較大

準，因此自然地讓學生感受圖形大小是所圍面積的大小，也自然地知道當圍不出圖形時再多的邊長都沒有用，也可能因為所用的邊未經過適當的安排(越接近正方形)，而圍出的面積不大，有效的補足圖形比較大意指「面積」比較大的概念。

三、van Hiele理論之視覺期能否以其他感官取代

van Hiele理論認為「視覺期」階段的學童主要依賴視覺直觀來認識幾何形體，若學生無法從視覺期順利過渡到分析期，往往會有迷思概念的產生。然而，本研究對象的視障生沒有使用視覺直觀來認識幾何形體的機會與經驗，他們以觸覺感知複合圖形的邊、角、周界等幾何元件，透過這些幾何元件去推想或理解整個圖形，並認識更抽象的周長、面積、形狀的概念。依據van Hiele理論，本單元所學的面積、周長、形狀的關係屬於形體內性質和性質之間的關係，為van Hiele理論分析期的能力，須對周長、面積、形狀等概念有一定掌握才能體會。

從後測中，研究者發現學生經過學習後大都已能建立正確概念，此結果讓我們確定大多數研究對象皆已達到「分析期」。而且在學生前測的反應中，或許對於幾何概念的認知稍落後同儕一兩年，但其所產生的迷思概念並不比一般生多，這不禁讓我們思考，他們是如何跨過視覺期？視覺期是真的可以被取代或跳過？

從本研究實徵過程看，我們整理分析教學逐字稿時，對話中經常感受不到這些學生是視障生，過程中無論是表達或溝通時，都明顯感受這些學生擁有所教幾何圖形與性質的心像，即便在前測中，多數學生無法用冰棒棍排出長方形，但此缺失應是反映學生

在建構實際圖形的困難，而非擁有心像的困難。從研究中也發現，只要能描述清楚，提供適合教具讓視障生接觸，確實在基本幾何認知上視障生以觸覺與聽覺取代一部分的視覺功能，建立心像。但本研究主張，只憑藉觸覺與聽覺所取得的部分心像，尚不足以讓他們完全取代視覺期而進入分析期，能成功進入分析期是因為兩者的交互作用。其中一個證據是，當我們問視障生：「如何區別長方形與平行四邊形」時，幾乎所有學生都說：「平行四邊形會有尖尖的」，如此對於形體的分類顯然必須透過組合要素，這樣的認知已經是分析期的能力。由於視障生對於幾何的接觸來自於邊、角、周界等幾何元件，所以他們在認識圖形時，對於分析期所要求的「以形體的構成要素和要素之間的關係來分析幾何圖形」比一般生有更多經驗且敏銳，因此即便在視覺期中他們對於圖形整體的認知不足，但憑藉他們提前對於幾何元件的熟悉，過渡到分析期是有機會的。換言之，視障生在視覺期與分析期的界線更為模糊。

儘管如此，視障生所仰賴的觸覺與聽覺，與一般生所仰賴的視覺與聽覺仍有很多的不同。在感官運作上，前者的溝通透過手指觸摸與移動探索會有動作順序，因此觸覺與聽覺在資訊吸收會有時間差；而後者透過眼睛快速捕捉訊息，因此視覺與聽覺的資訊吸收幾乎可同步運作，兩者在教學上仍會造成不同效果。舉例來說：當老師拿起一個大的長方形紙板告訴學生「長方形有四個直角」語音的同時，學生同步也看到四個直角；但對於視障生，同樣一句話學生卻無法同步觸摸到四個直角。

在圖形感知上，視障生透過手指觸摸圖形只能點狀或局部感知，運作須由左而右、由外而內，有動作順序；而一般生透過眼睛

可感知圖形的全貌。舉例來說：在講解規則時，讓學生計算冰棒棍所圍出的格子數視作面積時，教師發現視障生對於數出所圍格子數並不困難，他們可以輕易透過觸覺完成，但要說明圍出的形狀是什麼時，對於只靠觸摸周界的視障生要在腦中建構完整圖形是困難的，尤其是複合圖形上。在溝通上更不容易，如生B在描述所拼圖形時，說出：「這個圖形我不知道怎麼說。像樓梯形狀嗎？」(二794-L, RPA)；生D：「我拼了一個7的形狀」(二801-L, RPA)；生A：「我有梯形」(二790-L, RPA)。實際上生A和生D指的是相同的「L」形，而B是「凸」形。

表7為我們在這個研究中觀察到兩者的不同。這些因素或許不至於太大影響學生到達分析期，但對於非形式演繹期與形式演繹期是否有影響，就必須進一步探究，尤其需要精細或複雜圖形輔助時，對視障生來說挑戰更大。

伍、結論與建議

一、結論

本研究目的在反思van Hiele理論如何擴充到無法經歷視覺化階段之視障生幾何學習。本研究發現，輔助視覺不利的鷹架在MGA「占地圍王」中隨局可得，透過大量教具的操作，有助於視障生從等周長不等面積

(P-A)、等面積不等周長(A-P)、等周異形(P-S)等初步概念，逐漸過渡到等周長等面積不等形狀(PA-S)、等周長的情況下，形狀越接近正方形面積越大(P-SA)、周長與面積的關係之概念。教具的操作需要較多時間，這反映視障生在幾何單元的學習上較為不易，也提醒我們未來在視障生的數學教學上除了需要多耐心之外，也需要搭配適當的無障礙教具幫助視障生建構概念。此外，視障生會有周界定義不清楚的迷思，容易將圖形中間的線條誤認為周長的一部分，此發現與鄧玉芬(2015)的發現相同，且對於面積的意義「圖形內部的空間大小」易有誤解。另外，視障生在表達上，容易將圖形「周長比較大」形容成「面積比較大」，幸好這些皆能從本教學活動中獲得修正。

儘管沒有經歷van Hiele理論中的視覺期，本研究證實視障生可以依賴聽覺與觸覺以取代視覺來進行面積與周長概念之學習，因此可以進入下一層次的分析期。但研究者認為，只憑藉觸覺與聽覺所取得的部分心像，尚不足以完全取代視覺期，能成功進入分析期是因為兩者的交互作用。所以建議教學者應提供視障生持續操作的機會，讓他們藉由觸覺的方式，正確理解幾何形體的構成要素與要素之間的關係。

表7：視障生與一般生學習幾何的差異

項目	視障生	一般生
主要溝通方式	觸覺、聽覺	視覺、聽覺
感官運作	手指運作有時間序、動作序；觸覺與聽覺資訊吸收有時間差	眼睛捕捉快速、無時間差；聽覺視覺資訊吸收可同步運作
圖形感知	只能點狀或局部感知，運作須由左而右、由外而內	可感知圖形的全貌
師生互動	教師可能和學生認知差異大，只能透過口頭描述或動作帶領	教師較能瞭解學生想法，可透過板書、展示教具表達
資訊溝通	透過點字及觸覺教具、表達只能口說	可圖形文字並行，表達多樣性

二、對未來研究的建議

本研究著重國小視障生於周長與面積單元的學習，以MGA「占地圍王」進行授課，但數學領域並不只有此一單元，建議將來的研究者亦能開發與設計更多「數與量」、「空間與形狀」、「關係」、「資料與不確定性」之遊戲輔助視障生學習。國小的數學課程是重要且每個人應具備的數學素養，若能有更多的相關研究產生，並歸結出更多視障生在數學學習上的困難之處與解決方法，相信對於臺灣的視障生教育能夠有更正向的幫助。另一方面，臺灣的視障生數相較於一般生屬於少數，建議往後的研究者可以邀請更多的視障生個案作為研究對象，以收集並分析更多視障生的學習情形，作為更多教學現場之參考。在幾何認知層次上，對於視障生是否能順利進入非形式演繹或形式演繹，也需要進一步探究。

視障生在數學概念的建立有賴於觸覺與

聽覺的管道，因此有諸多困難，所以引導他們學什麼、怎麼學是一門重要的學問。因為眼睛看不見，所以內心往往更纖細，由淺入深的操作、點字及無障礙觸覺教具的輔助作為鷹架、更多的鼓勵、給予合宜的加分機會，都能夠建立他們正向的自信心。臺灣地區國中小學，視障生所占的比例並不高，因此一般學校給與的資源是有限的，如何在數學教育領域上讓視障生能達到更好的學習成效，需要現場教師的投入方能達成。根據過往教學經驗，我們知道視障生的智力和一般人無異，提供可及性高(無障礙)的教具、搭配良好的教學鷹架和引導亦能夠讓他們達到更高的數學學習成就，這些皆需要教學工作者共同的努力。

誌謝

本研究蒙行政院科技部補助專題研究計畫經費(107-2511-H-003-006-MY2)，在此特致謝忱。

參考文獻

1. 李源順(2020)。幾何教材的教與學。收錄於林碧珍(編著)，*國小數學教材教法*(頁175-200)。臺北市：五南。
[Lee, Y.-S. (2020). Jihe jiaocai de jiao yu xue. In P.-J. Lin (Ed.), *Guoxiao shuxue jiaocai jiaofa* (pp. 175-200). Taipei, Taiwan: Wu-Nan.]
2. 吳德邦(1997)。臺灣中部地區國小學童van Hiele幾何思考層次之研究(NSC86-2511-S-142-001)。臺北市：行政院國家科學委員會。
[Wu, D.-B. (1997). *Taiwan zhongbu diqu guoxiao xuetong van Hiele jihe sikao cengci zhi yanjiu* (Report No. NSC86-2511-S-142-001). Taipei, Taiwan: National Science Council, Executive Yuan.]
3. 林福來、謝豐瑞(2014)。數學奠基活動結案報告。臺北市：國立臺灣師範大學數學教育中心。
[Lin, F.-L., & Hsieh, F.-J. (2014). *Shuxue dianji huodong jieshan baogao*. Taipei, Taiwan: Shi-Da Institute for Mathematics Education, National Taiwan Normal University.]
4. 徐偉民(2004)。另類數學教學：以故事為媒介。*屏師科學教育*，19，37-45。

- [Hsu, W.-M. (2004). Linglei shuxue jiaoxue: Yi gushi wei meijie. *Science Education of National Pingtung University of Education*, 19, 37-45.]
5. 教育部國民及學前教育署(n.d.)。課程綱要：108課綱重點。查詢日期：2021年9月14日，檢自<https://12basic.edu.tw/12about-3-1.php>。
 - [K-12 Education Administration, Ministry of Education. (n.d.). *kecheng gangyao: 108 kegang zhongdian*. Retrieved September 14, 2021, from <https://12basic.edu.tw/12about-3-1.php>]
 6. 梁仲容、韓弘偉、黃建中(2014，11月)。小數奠基活動模組的補救教學之行動研究。發表於2014提升中小學補救教學成效之理論與實務研討論壇。臺南市：國立臺南大學。
 - [Liang, C.-J., Han, H.-W., Huang, C.-C. (2014, November). *An action research on the math remedial instruction of decimal groundbreaking activity module used in elementary school*. Paper presented at 2014 Tisheng zhongxiaoxue bujiu jiaoxue chengxiao zhi lilun yu shiwu yantao luntan. Tainan, Taiwan.]
 7. 張春興(1996)。教育心理學——三化取向的理論與實踐(修訂版)。臺北市：東華書局。
 - [Chang, C.-H. (1996). *Jiaoyu xinlixue—Sanhua quxiang de lilun yu shijian* (Rev. ed.). Taipei, Taiwan: Tunghua.]
 8. 許鳳紋(2020)。數學奠基活動在課堂上的運用對國中生數學學習成效與動機之影響。未出版之碩士論文，國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系，臺北市。
 - [Hsu, F.-W. (2020). *The effectiveness of using mathematics grounding activities (MGAs) in class on mathematics learning achievement and motivation for junior high school students*. Unpublished master thesis, National Taipei University of Education, Taipei, Taiwan.]
 9. 廖畚柔、黃國禎、賴秋琳、吳書豪(2020)。導入表格式心智工具至數位遊戲學習模式的潛在負面效應——化學課程應用的反思。國立臺灣科技大學人文社會學報，16(2)，183-210。
 - [Liao, Y.-J., Hwang, G.-J., Lai, C.-L., Wu, S.-H. (2020). Potential negative effects of incorporating a grid-based mindtool into digital game-based learning-lessons learned from an application in a chemistry course. *Journal of Liberal Arts and Social Sciences*, 16(2), 183-210.]
 10. 歐用生(1993)。內容分析法。收錄於黃光雄、簡茂發(編著)，教育研究法(修訂一版，頁229-254)。臺北市：師大書苑。
 - [Ou, Y.-S. (1993). Neirong fenxifa. In K. H. Huang & M. F. Chien (Eds.), *Jiaoyu yanjiufa* (Rev. ed., pp. 229-254). Taipei, Taiwan: Shtabook.]
 11. 鄧玉芬(2015)。探討正方形、長方形的周長與邊長關係。收錄於鍾靜(編著)，國小數學探究教學之設計與實踐(頁125-130)。臺北市：國立臺北教育大學。
 - [Teng, Y.-F. (2015). Tantaof zhengfangxing changfangxing de zhouchang yu bianchang guanxi. In J. Chung (Ed.), *Guoxiao shuxue tanjiu jiaoxue zhi sheji yu shijian* (pp. 125-130). Taipei, Taiwan: National Taipei University of Education.]

12. 鄭靜瑩(2006)。國小視覺障礙學生數學能力及其相關因素之研究。未出版之博士論文，國立臺灣師範大學特殊教育學系，臺北市。
[Cheng, C.-Y. (2005). *Mathematical abilities of visual impaired students in elementary school and its relative elements*. Unpublished doctoral dissertation, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.]
13. 鄭靜瑩(2007)。國小視覺障礙學生數學學習表現及其學習表現欠佳題型之研究。《教育學刊》，28，33-62。doi:10.6450/ER.200706.0033
[Cheng, C.-Y. (2007). Mathematics performance and its non-satisfactory items of visually impaired students in elementary schools. *Educational Review*, 28, 33-62. doi:10.6450/ER.200706.0033]
14. Amalric, M., Denghien, I., & Dehaene, S. (2018). On the role of visual experience in mathematical development: Evidence from blind mathematicians. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 30, 314-323. doi:10.1016/j.dcn.2017.09.007
15. Babai, R., & Lahav, O. (2020). Interference in geometry among people who are blind. *Research in Developmental Disabilities*, 96. Retrieved September 14, 2021, from <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0891422219301842>
16. Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
17. Chang, C.-H. S., Kuo, C.-C., Hou, H.-T., & Koe, J. J.-Y. (2022). Design and evaluation of a multi-sensory scaffolding gamification science course with mobile technology for learners with total blindness. *Computers in Human Behavior*, 128. Retrieved September 14, 2021, from <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S07475632211004088>
18. Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20(3), 487-506. doi:10.1080/02643290244000239
19. Dienes, Z. P. (1973). *The six stages in the process of learning mathematics*. Slough, UK: NFER.
20. Gulley, A. P., Smith, L. A., Price, J. A., Prickett, L. C., & Ragland, M. F. (2017). Process-driven math: An auditory method of mathematics instruction and assessment for students who are blind or have low vision. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 111(5), 465-471. doi:10.1177/0145482X1711100507
21. Hamari, J., Shernoff, D. J., Rowe, E., Coller, B., Asbell-Clarke, J., & Edwards, T. (2016). Challenging games help students learn: An empirical study on engagement, flow and immersion in game-based learning. *Computers in Human Behavior*, 54, 170-179. doi:10.1016/j.chb.2015.07.045
22. Healy, L., & Fernandes, S. H. A. A. (2014). Blind students, special needs, and mathematics learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 61-63). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi:10.1007/978-94-007-4978-8

23. Hou, H.-T., & Keng, S.-H. (2021). A Dual-scaffolding framework integrating peer-scaffolding and cognitive-scaffolding for an augmented reality-based educational board game: An analysis of learners' collective flow state and collaborative learning behavioral patterns. *Journal of Educational Computing Research*, 59(3), 547-573. doi:10.1177/0735633120969409
24. Hourigan, M., & Leavy, A. M. (2020). Setting a design challenge: Promoting the discovery of the relationship between area and perimeter. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 25(3), 29-33.
25. Jabbar, A. I. A., & Felicia, P. (2015). Gameplay engagement and learning in game-based learning: A systematic review. *Review of Educational Research*, 85(4), 740-779. doi:10.3102/0034654315577210
26. Jackson, A. (2002). The world of blind mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, 49(10), 1246-1251.
27. Jitngernmadan, P., Stöger, B., Petz, A., & Miesenberger, K. (2017). IDMIIE: An interactive didactic math inclusion learning environment for blind students. *Technology and Disability*, 29(1-2), 47-61. doi:10.3233/TAD-170173
28. Klingenberg, O. G., Holkesvik, A. H., & Augestad, L. B. (2019). Research evidence for mathematics education for students with visual impairment: A systematic review. *Cogent Education*, 6(1). Retrieved January 26, 2022, from <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/2331186X.2019.1626322>
29. Lin, F.-L., Wang, T.-Y., & Yang, K.-L. (2018). Description and evaluation of a large-scale project to facilitate student engagement in learning mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 58, 178-186. doi:10.1016/j.stueduc.2018.03.001
30. Maćkowski, M., Brzoza, P., Żabka, M., & Spinczyk, D. (2018). Multimedia platform for mathematics' interactive learning accessible to blind people. *Multimedia Tools and Applications*, 77(5), 6191-6208. doi:10.1007/s11042-017-4526-z
31. Maćkowski, M., Rojewska, K., Dzieciatko, M., & Spinczyk, D. (2019). Initial motivation as a factor predicting the progress of learning mathematics for the blind. In E. Pietka, P. Badura, J. Kawa, & W. Wieclawek (Eds.), *Information technology in biomedicine* (pp. 349-357). Cham, Switzerland: Springer.
32. Moon, J., & Ke, F. (2020). In-game actions to promote game-based math learning engagement. *Journal of Educational Computing Research*, 58(4), 863-885. doi:10.1177/0735633119878611
33. Ninaus, M., Moeller, K., McMullen, J., & Kiili, K. (2017). Acceptance of game-based learning and intrinsic motivation as predictors for learning success and flow experience. *International Journal of Serious Games*, 4(3), 15-30. doi:10.17083/ijsg.v4i3.176
34. Piaget, J. (1962). *Play, dreams, and imitation in childhood*. New York, NY: Norton.
35. Rosenblum, L. P., & Herzberg, T. S. (2015). Braille and tactile graphics: Youths with visual im-

- pairments share their experiences. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 109(3), 173-184. doi:10.1177/0145482X1510900302
36. Smith, D. W. (2017). Mathematics. In M. C. Holbrook, C. Kamei-Hannan, & T. McCarthy (Eds.), *Foundations of education: Instructional strategies for teaching children and youths with visual impairments* (Vol. 2, pp. 479-509). Sewickley, PA: AFB Press.
37. Spinczyk, D., Maćkowski, M., Kempa, W., & Rojewska, K. (2019). Factors influencing the process of learning mathematics among visually impaired and blind people. *Computers in Biology and Medicine*, 104, 1-9. doi:10.1016/j.combiomed.2018.10.025
38. Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of mathematical knowledge: Learning and teaching with understanding* (pp. 51-66). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
39. van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. London, UK: Academic Press.
40. Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305. doi:10.1080/0020739830140305
41. Vygotsky, L. S. (1976). Play and its role in the mental development of the child. In J. S. Bruner, A. Jolly, & K. Sylva (Eds.), *Play: Its role in development and evolution* (pp. 537-554). New York, NY: Basic Books.
42. Winarti, D. W., Amin, S. M., Lukito, A., & Gallen, F. V. (2012). Learning the concept of area and perimeter by exploring their relation. *Journal on Mathematics Education*, 3(1), 41-54. doi:10.22342/jme.3.1.616.41-54
43. Withagen, A., Kappers, A. M. L., Vervloed, M. P. J., Knoors, H., & Verhoeven, L. (2013). Short term memory and working memory in blind versus sighted children. *Research in Developmental Disabilities*, 34(7), 2161-2172. doi:10.1016/j.ridd.2013.03.028

Scaffolding the Concept of Area and Perimeter for Students With Severe Visual Impairment

Chia-Jui Hsieh¹, Fou-Lai Lin² and Chien-Huey Sophie Chang^{3,*}

¹Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

²Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

³Department of Special Education, National Taiwan Normal University

Abstract

The purpose of this study is to investigate the impact of mathematics-grounding activities on the visual disadvantages of students with blindness when learning area and perimeter. A game-based learning activity was designed and used in this study as a way to compensate for the visual disadvantages of students with blindness when learning this aspect of mathematics. This study applied a case study approach and participant observation method by inviting seven students with severe visual impairments in Taiwan to participate in the mathematics-grounding activities entitled “Encircling Land as a King” that were designed for an area and perimeter unit. To record data, video recording, photography, field observation logs, and questionnaires of student learning feedback are used, along with content analysis to analyze the data. Results showed that mathematics-grounding activities can benefit students with visual impairment after adaptation. The adapted mathematics-grounding activities can help compensate for some of the impact caused by their visual disadvantages. The implications for teachers who work with students who are blind, as well as suggestions for future research, are also provided.

Key words: van Hiele Model of Geometric Thinking, Perimeter and Area, Students With Blindness, Mathematics-Grounding Activity

* Corresponding author: Chien-Huey Sophie Chang, sofchang@gapps.ntnu.edu.tw