科學教育學刊
1998, 第六卷第二期， 191-218

EJ51-1998-191

數學臆測的思維模式

陳英娥[1]　林福來[2]
[1] 國立台灣師範大學 科學教育研究所博士班
[2] 國立台灣師範大學 數學系

（投稿日期：87年5月11日，接受日期：87年6月1日）

摘要：本研究從個體思維的角度考量數學臆測，目的在了解數學臆測的思維歷程和它的特徵，並透過數學家臆測的思維模式檢視學生臆測的模式。研究方法採面談法，研究對象包括五位大一升大二的學生、五位高二學生和兩位數學家。研究工具包括數學猜測測驗和數學家面談工具。研究結果發現：學生數學臆測的思維歷程可形成一個共通的模式圖，每位學生的臆測歷程圖都是此圖的一部分，而且學生與數學家的數學臆測思維模式是相容的。此臆測思維模式是一個有方向的思維循環，思維循環有兩層，包括內循環和外循環。內循環表徵猜想的精煉過程，外循環表徵原猜想被丟棄及重構的歷程。學生的臆測思維在猜測、檢驗、相信和反駁之間遞迴。從猜測問題的本質看，如果是猜測未知結果，思維起點和思維路徑比較複雜；如果是猜測命題的對錯，思維起點和思維路徑都比較簡單。本研究發展的數學臆測思維模式可用來表徵猜測問題的難度以及評量學生臆測思維的品質。

關鍵詞：反駁，臆測，數學探究，思維模式。

研究理念

一、猜測是探索數學過程中的必經之路

從數學文獻上，我們看到數學家探究數學的結果都是形式化的數學，而數學家探索式的思維歷程往往僅流通於數學社群內的同行之間，很少有文獻的記錄。我們如果因此而將“形式化數學”與“數學”視爲同義詞，由此導致把數學發現的模式簡單歸結爲演繹證明，這是有偏差的。其實，形式化數學是數學發展到一定階段後的產物，它是從非形式化數學發展而來的 (Lakatos, 1978) 。 Lakatos 認爲非形式化數學是擬經驗的，它是數學知識發展的早期階段，而形式化、公理化數學是在這種非形式化數學發展到一定時期之後，對先前的發展進行邏輯重組的結果。例如 Euclid 的“幾何原本”中的定理，在 Euclid 之前三百

年的希臘數學家早已陸續發現，“幾何原本”則將這些定理公理化。如果據此推論幾何學中的定理都是 Euclid 通過公理逐一演繹而得的，那是一種誤解。因此，關於數學定理發現的邏輯，可以到非形式數學中去檢視，這如同關於幾何定理發現的邏輯可以到 Euclid 之前的希臘幾何學家的工作中去尋找是一樣的 (Lakatos, 1978)。

如果我們對非形式數學發展的歷史做一番考察，就有機會提煉出一套豐富多彩的數學發現的邏輯。Lakatos 曾經考察了數學史上的兩個案例，即“關於多面體的頂點數 V、稜數 E 和面數 F 的 V − E + F = 2 的定理”的發現過程和“關於連續性原理”的發現過程。他提出：數學發現（非形式數學理論的成長）有一種簡單的模式，它是由下列七個階段組成的 (Lakatos, 1976)：

1. 提出原猜想；
2. 證明原猜想（一個粗糙的思想實驗或推論，把原猜想分解成一些子猜想或引理）；
3. 出現原猜想的反例；
4. 重新檢查證明，改進原猜想；
5. 檢查其它定理的證明，看看新找到的引理或新的證明所生成的概念是否出現在它們當中（這個概念也許處在不同證明的交叉路口，因而顯出它有根本意義）；
6. 檢查那些一開始被接受，現在已被反駁的猜想；
7. 反例轉化爲新理論的例子（開闢新的探究領域）。

前面四個階段和本研究探討的猜測的過程意義相近，後面三個階段重點是證明的分析與改進，這和本研究的重點不同，本研究著重在解析猜測和反駁的歷程。

數學家發現的過程，實際上是提出猜想，並且不斷地對猜想加以證明、反駁和修改的過程。數學定理的發現既不是從經驗事實抽象出定理的“往上”過程，也不是從公理演繹出定理的“往下”過程，而是走了一條彎彎曲曲的路：從提出原猜想到對前提的質疑，然後，又反過來改進原猜想，用定理取而代之。在此過程中，猜測與檢驗、證明與改進相互交織。

數學發現的邏輯與傳統觀點有兩個不同的論點。傳統的觀點認爲，數學發現是在原猜想被提出以後，被數學家用演繹方法證明後便完成，而 Lakatos (1976) 則認爲，這個過程是包含演繹證明和反例反駁不斷交替的遞迴過程。另外，傳統的觀點認爲，在數學發現過程中，原猜想從被提出到被證明爲定理爲止，它在內容上是一成不變的；而 Lakatos (1976) 則認爲，**在數學發現過程中，由於原猜想被不斷地改進，它在內容上會有變化，它在發現過程中經歷了一個“成長”的過程**。至於，“反駁”在數學發現過程中起什麼作用呢？反駁是啓動對原猜想改進的動因 (Lakatos, 1976)。一個發生在形式證明之前的反駁，可能會讓數學家拋棄原猜想。但是一個發生在形式證明之後的反駁，其作用並不在於導致數學家拋棄原猜想，而在於導致數學家改進原猜想。

二、數學臆測的思維歷程

Lakatos (1976) 的數學發現的探索式思維模式和 Mason, Burton 和 Stacey (1985) 的臆測循環過程圖都對數學臆測的歷程作過描述。到底學生數學臆測的思維歷程適不適合用 Lakatos (1976) 或 Mason 等人 (1985) 的模式來加以刻劃？本文在第四節再加以辯證，在此，先介紹這兩個模式。

在數學發現模式中，原猜想的提出是多證多駁過程的起點，那麼數學家是通過何種途徑提出原猜想的呢？Lakatos (1976) 認爲原猜想不是只靠歸納得到的，而是人們依一定的知識背景用試錯法經過多次猜測、多次反駁才得到的。如果誤以爲猜想靠的就是歸納，也許就要白費功夫在許多無謂的材料上。例如，在尤拉猜想之前，人們最初是猜測多面體的面數 F 隨其稜數 E 的增加而增加，但是這個猜想被

反駁了。跟著來了另外兩個猜想，一是 E 隨 F 增加，一是 E 隨 V 增加，但是都沒有成功。第四個猜想是 F + V 隨 E 增加而增加，這是一個成功的猜想，在此基礎上才形成了尤拉猜想。(Lakatos, 1978a)。

在審查證明的過程當中，數學家往往會使用探索的規則， Davis 和 Hersh (1995) 根據 Lakatos (1976) 的想法繪出一個圖解說明：（見圖 1 ）圖 1 中箭頭所指的方向表示探索式思維中的思路。最外圍的思路表示一個猜測經證明、反駁、重構 (reformulation) 之後，經全局反例加以檢驗，最後導致新的猜測。這是比較徹底解決問題的方法。中間一個層次的思路表示一個猜測經證明、反駁、重構之後，經局部反例加以檢驗，對原有證明進行修正，使之精確化。最裡面層次的思路是把猜測作初步試驗，然後直接加以反駁，進行重構和局部反例檢驗，最後再進行證明。這是取捷徑的辦法。無論是那種思路，證明與反駁的功能都在於改進猜測，使它更加準確，更接近於數學眞理。因此，數學證明與反駁是獲得數學發現的必經之路（徐利治和王前， 1989 ）。

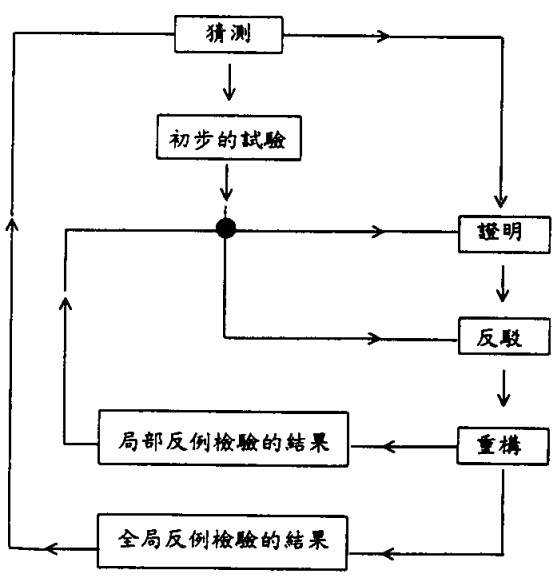


圖 1 ： Lakatos (1976) 數學發現的探索式思維模式

另一個和臆測的思維歷程有關的是 Mason *et al.* (1985) 關於“臆測在解決一個數學問題中的角色”的個案研究。 Mason 把解題過程分爲進入 (entry) 、進擊 (attack) 和回顧 (Review) 三個階段，他給出圖 2 問題解決的模式 (Mason, 1985) 。在圖 2 的解題模式中， Mason *et al.* (1985) 特別強調所有這三個階段對於特殊化與一般化這兩個基本過程的依賴性。他指出：首先，只有通過特殊化，才能很好地了解所面臨的問題，即什麼是已知的，什麼是所要求的；其次，也只有通過特殊化，才能認識導致一般化的模式，並通過所說的一般化獲得相應的猜想；最後，對所得到的猜想又必須借助進一步的特殊化去進行檢驗，而又只有借助新的一般化才能對已經獲得的結果加以推廣。同時，也只有從更一般的角度去考慮問題，才能更深刻地瞭解已經獲得的結果。因此， Mason *et al.* (1985) 把數學思維歸結爲：特殊化、一般化、臆測和確認。

觀察 Mason *et al.* (1985) 的問題解決模式，在這個解題過程中，他把臆測界定在進入和進擊兩個階段之間，他描述臆測的狀態是一個循環過程，而過程當中是作系統地特殊化和類比。

關於臆測的模式， Mason *et al.* (1985) 在臆測的循環過程有較詳細的描述：見圖 3 。他把臆測的過程分成四個階段，包括：使猜想清晰、檢查猜想、不要相信猜想和獲得一種感覺。 Mason 認爲猜想是一個解答的主幹，他從猜測“連續數的和”的個案分析，得到了圖 2 和圖 3 的結論。但是， Mason 的目標是數學式思維，他的分析架構用的是解題的三個階段，而臆測是解題過程中的一個環節。

整體說來，本研究的理念主要來自數學擬經驗論 (Lakatos, 1976) ，相信非形式數學不是經驗的，也不是演繹的，而是擬經驗的。但是， Lakatos 談的是數學哲學，他從歷史的角度出發，借用笛卡兒－尤拉猜想的歷史發展，寫出歷史的理性重建爲其理論作見證。他

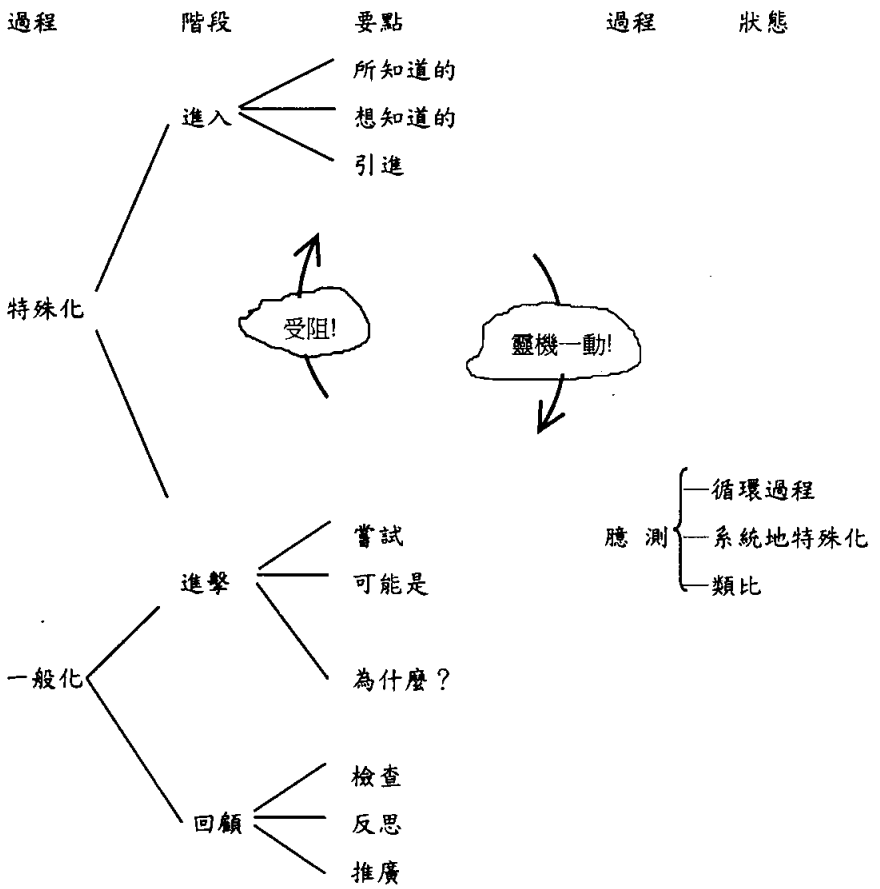


圖 2 ：問題解決的模式

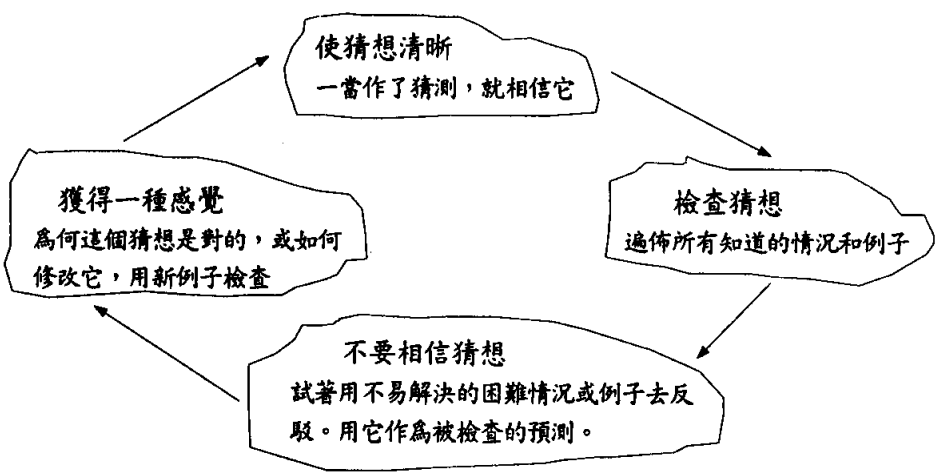


圖 3 ：臆測的循環過程

的理論偏向數學家的數學思維。另一方面，Lakatos 所討論的是“在提出猜想的階段過去以後”開始的，即素樸的猜想構成了數學發現的邏輯的實際出發點，這和本研究探討的重點是不同的，以時間順序來說，本研究探討的是學生在面對一個他不知道答案的數學問題時，他如何作猜測的過程。這時，除了在 Lakatos (1976) 的意義之下，對猜想作檢驗之外，在時間上還要再往前挪，探究學生如何提出猜想。至於，本研究的重點：探究數學臆測的思維歷程，則是分別從巨觀和微觀兩方面來看數學猜測思維。另一方面，若以 Mason *et al.* (1985) 的數學式思維爲背景來說， Mason 研究整個數學解題過程中的思維，臆測介於進入和進擊之間的過渡階段，它是 Mason 已經照顧到的，但不是他的研究重點。那麼，如何來刻劃學生臆測的思維歷程？這些思維歷程有什麼特徵？這是本文所要探討的問題。

研究目的與研究問題

一、研究目的

根據上一節的分析可知， Lakatos (1976) 還原歷史所作的巨觀分析和 Mason *et al.* (1985) 的臆測循環過程，這些理論都偏向數學家的經驗觀。從數學教育的觀點看，如果臆測是一個很重要的數學發現過程，那麼我們就值得去探究學生臆測的思維歷程，並且進一步研究中小學教室中進行數學猜測活動的可行性。本文著重在探究學生數學臆測的思維歷程，以作爲後續研究發展數學猜測活動的參考和依據。

二、研究問題

在提出研究問題之前，首先將本研究所採用的重要名詞—猜測、臆測和反駁加以界定。

所謂猜測 (conjecture) 是指當個體面對問題時，提出一個或數個可能爲眞的敘述，在提出之時所提出的敘述未確定是否爲眞，這個行動稱爲猜測 (Yerushalmy, 1993) ，而所提出的這個敘述，稱爲猜測或猜想。如果個體所面對的問題或所提出的猜測是在可數學化的範圍之內，則所提出的猜測稱之爲數學猜測。

所謂數學臆測 (Conjecturing) 是指個體面對數學物件的情境下，提出一個合理猜測的過程。在此意義下，強調猜測是如何提出，其背後的思維或知識是什麼？以及個體如何作檢驗？如何導致最後取信自己或取信別人的猜想，或者如何反駁原猜想的動態過程。

所謂反駁 (Refuting) 是指反對自己或別人所提出的猜想、證明或理論。本研究中，主要界定在對猜測作檢驗，並且加以批判的過程。

描述數學解題的認知過程，一般稱作數學思維。在本研究中，描述合理的數學猜測的認知過程，稱爲數學臆測思維。所謂數學臆測的思維歷程是指學生面對數學物件時，腦中進行猜測活動所作的智力運思的動態歷程 (processing) 。綜合研究目的以及以上的界定和說明，本研究所要探討的問題是：

1. 學生數學臆測的思維歷程是否存在一個共通的模式？
2. 學生數學臆測的思維歷程有什麼特徵？

研究方法

一、採用的方法

本研究主要採面談法，由訪談學生開始，蒐集學生面對一個他不知道答案的數學問題時，進行臆測的情形，希望由訪談探知學生的想法，以及在猜測活動的表現。另外，本研究也訪談兩位數學家，研究設計採面談法和回溯法，針對數學臆測和反駁眞實的思維歷程和最近做數學的經驗作深度訪談。

每一位學生的訪談，大約在 40-60 分鐘之間，事後確認大約 10-20 分鐘。研究者與

數學家 M_1 談過兩次，共約三個半小時，與數學家 M_2 特別就面談工具的內容談過一次約三小時，想法的確認約一小時。除此之外，研究者花了一學期的時間記錄數學家 M_2 的（出聲）思考，包括 M_2 與研究生的討論以及 M_2 對高中資優生的演講。這一部分的一些想法在事後曾作過確認。

二、研究過程

1. 由理論、文獻分析和教室觀察，評估學生進行數學猜測可能的表現。
2. 與有經驗的數學教師討論，評估適合學生進行數學猜測的材料。
3. 編製研究工具，包括數學猜測測驗和數學家面談工具。
4. 進行面談，試探學生在數學猜測測驗的表現和數學家臆測的思維歷程，並且請數學家談談對於猜測活動在中學數學教學之地位的看法。

三、研究對象

研究對象的選擇採立意取樣，以樣本的取得難易、配合度的高低爲主要考量，包括五位大一升大二的大學生、五位高二學生以及兩位數學家。

五位大學生是數學系的學生，五位高中生是郊區一所普通高中的學生，兩者都是從班級中任意選取。本研究中的兩位數學家，一位是分析專長 (M_1)，一位是離散數學專長 (M_2)。M_1 曾寫過數學教育的專書，近幾年也熱心參與數學教育。M_2 是應用數學家，近幾年研究方向非常多元，經常和數學以外的其他科學家合作研究。兩位在數學界都相當活躍。

四、研究工具

㈠數學猜測測驗

數學猜測測驗包括：圓台體積、畢氏定理的推廣、海龍公式的推廣和圓與點四個問題（見附錄一）。測驗的內容取材有四個原則：(1) 相對於學生，他不知道答案；(2) 數學本身的內容對臆測的成功與否，影響能降到最小；(3) 題目淺顯易懂，使年級的限制降到最低；(4) 題目本身必須要有豐富的數學思維過程。

圓台體積和畢氏定理的推廣這兩道問題來自前置研究工具；海龍公式的推廣和圓與點主要在搭配上述兩道問題。圓台體積和海龍公式的推廣主要在試探學生猜測未知結果的思維歷程；畢氏定理的推廣和圓與點主要在試探學生猜測命題對錯的思維歷程。數學猜測測驗編製完成之後，經過一次班級（高二）預試，以及兩位高二學生、兩位大二學生的個別訪談，確認學生一看到問題是不知道答案的。但是，他們可以了解題意，不論會不會做，都可以有一些想法。之後，研究者再與兩位現任高中數學教師討論，作最後確認。

㈡數學家面談工具

屬半結構面談工具，主要包括三個問題：

1. 請您談談您在數學裡面進行猜測的經驗。譬如說：「……」，您做猜測的時候，您是怎麼想的？
2. 您有沒有在猜測形成之後，經過一段時間自己又把它反駁掉的經驗？請舉例說明。
3. 您認爲數學猜測在不同階段的教育（例如：中小學、大學、研究所、或者數學家）的地位如何？

五、資料分析

資料分析和整理的步驟如下：

㈠依據前置研究所建立的分析架構，分析每一位研究對象的思維歷程

例如：分析 S_0 猜測圓台體積的思維歷程。

1. 將 S_0 的口語資料轉譯成文字。
2. 在原案資料的旁邊記錄 S_0 的思維，並加以詮釋。

3.列出 S_0 的整個思維流程如下：

S_0 猜測（透過直觀、和表面形式的類比進行猜測，形成猜想一）→ 檢驗（猜想一）→ 反駁（透過直觀發現矛盾，反駁猜想一）→ 猜測（利用表面形式的類比、次方提出猜想二）→ 檢驗（利用特殊化，檢驗猜想二）→ 相信（猜想二）→ 檢驗（利用對稱性，檢驗猜想二）→ 反駁（發現矛盾，修改猜想二）→ 猜測（利用對稱、次方提出猜想三）→ 檢驗（利用特殊化，檢驗猜想三）→ 相信（猜想三）。

㈡將所有的思維歷程分析比對完之後，與前置研究結果再作比對，確認不同對象的思維流程都有定點站，包括猜測、檢驗、反駁、相信這些定點或其中的某些定點。

㈢把猜測、反駁、相信列爲定點站，把檢驗當作執行站，描繪學生的思維流程，用箭頭表示思維流動的方向，各邊的權代表該段思維的次數，描繪各個研究對象的思維模式。

㈣ 歸納所有研究對象之臆測歷程的共同輪廓和模式的特徵。

六、三角校正

所有訪談皆利用迷你型錄音機錄音。訪談結束之後，研究者將錄音內容謄寫出來，並將錄音與謄本交給一位研究以外的人員，請他協助查驗謄本內容的正確性，並在必要時加以修正。

本研究資料驗證的方式，在數學家的部分，一位是收集受訪談者的著作，另一位是觀察一個學期的時間，每週約四小時，觀察數學家與研究生或其它研究人員談論做數學的想法。除此之外，也收集數學家公開演講的資料作爲比對的依據，若有疑問的地方，再當面向數學家確認。在學生的部分，是將學生的訪談資料與其任課教師或其它的後續訪談資料、以及背景訪談所收集的資料加以比對；換言之，在本研究訪談與分析的整個過程中，與受訪者口述資料相符或不符的證據，都加以找出，並進行確認。

研究結果

本研究分析個別學生作數學猜測的思維過程，發現學生數學臆測的歷程圖可依猜測對象分成兩類，這兩類各自可形成一個共通的模式。經由分析與整合這兩個分類模式及其特徵，發現這兩個模式又可形成一個共通的模式，即學生數學臆測的思維模式。本研究同時分析數學家臆測的思維模式，並且將學生的模式與數學家的模式作比較，發現學生臆測的思維模式與數學家的模式是相容的，兩者雖然在品質上有差異，但是相對於猜測的主體，這兩個模式具有相同的功能。綜合數學家臆測的思維模式與學生的模式，本研究提出一個數學臆測的思維模式，此模式比 Mason *et al.* (1985) 的臆測循環圖具有更好的解釋功能；而且也補充了 Lakatos 在問題提出到產生猜測這一段研究上的空白。本研究的結果除了在學理上具有重要的意義之外，本研究提出的數學臆測的思維模式在教學上也具有評量與診斷的功能。

一、學生數學臆測的思維歷程圖

本研究分析學生數學猜測的過程，畫出學生猜測的思維歷程圖如表 1 、表 2 、表 3 和表 4 所示。其中， G 代表大一升大二的學生， H 代表高二學生。

表 1 ～表 4 中，每一個思維歷程圖代表一個學生猜測某一問題的思維流程。以表 1 中的圖爲例，最上面的箭頭下來有兩個黑點，表示一開始提出兩個猜測：

表 1 ：學生猜測“圓台體積”的思維歷程圖

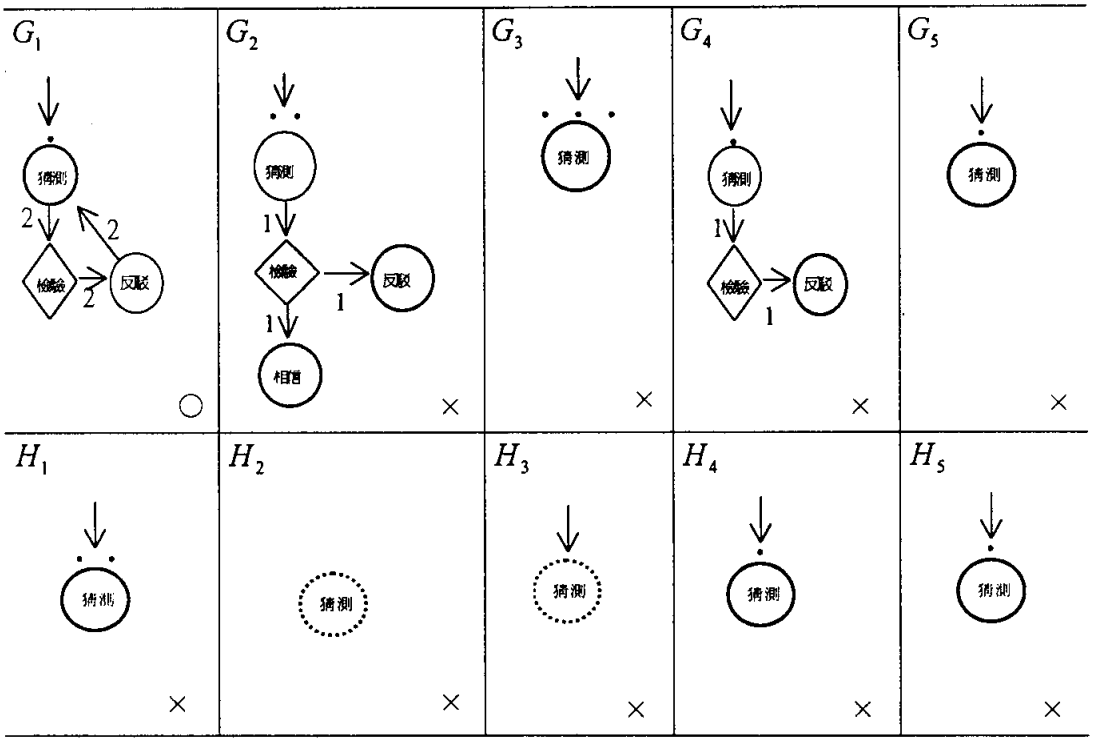


表 2 ：學生猜測“畢氏定理的推廣”的思維歷程圖

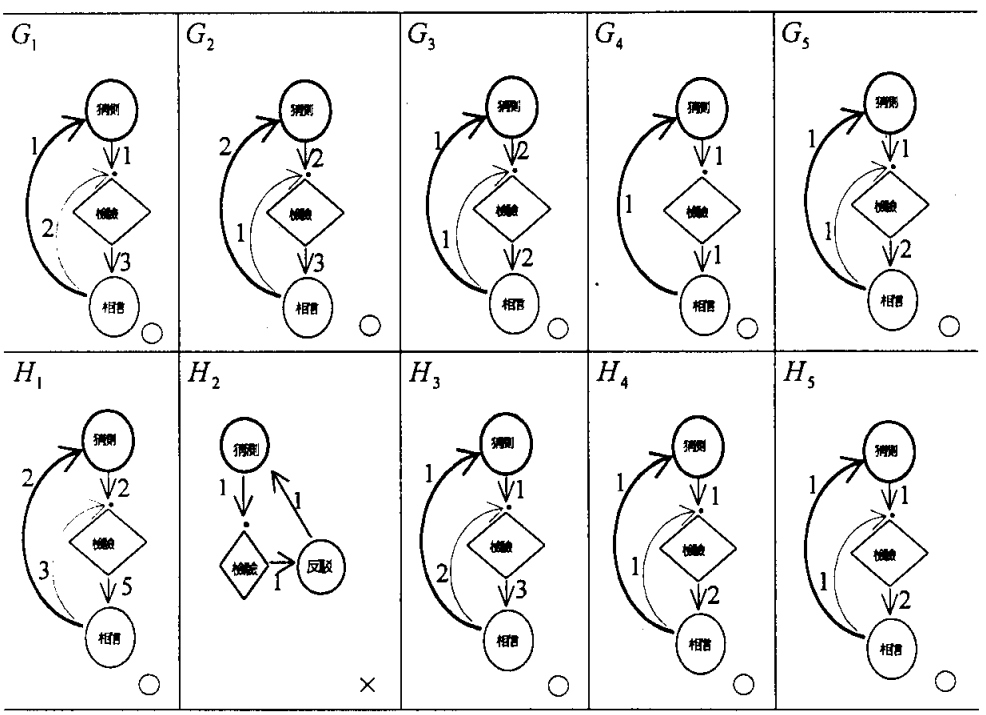


表 3 ：學生猜測“海龍公式的推廣”的思維歷程圖

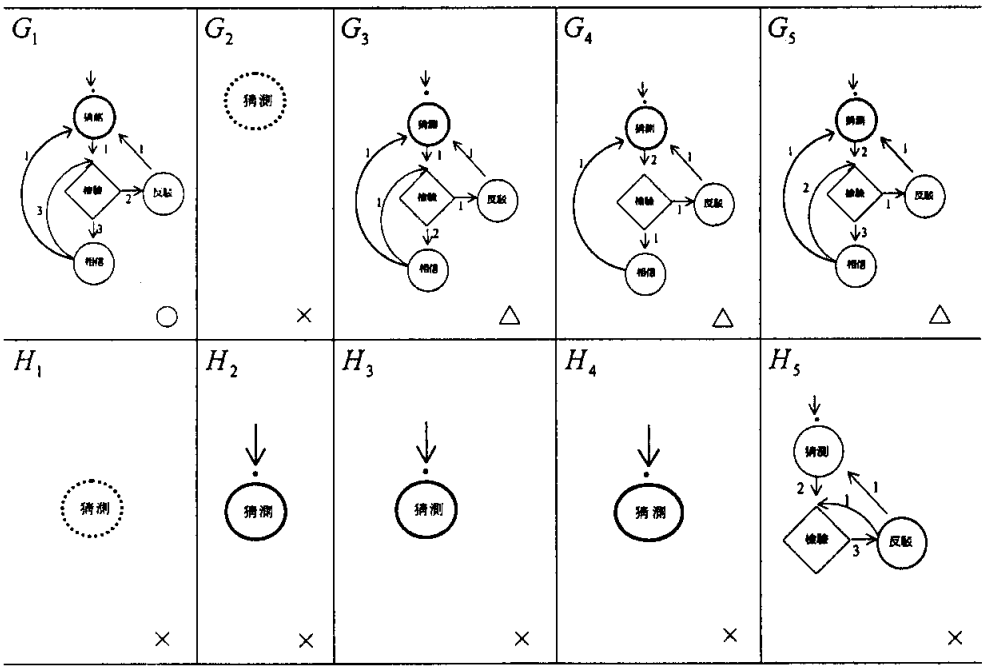
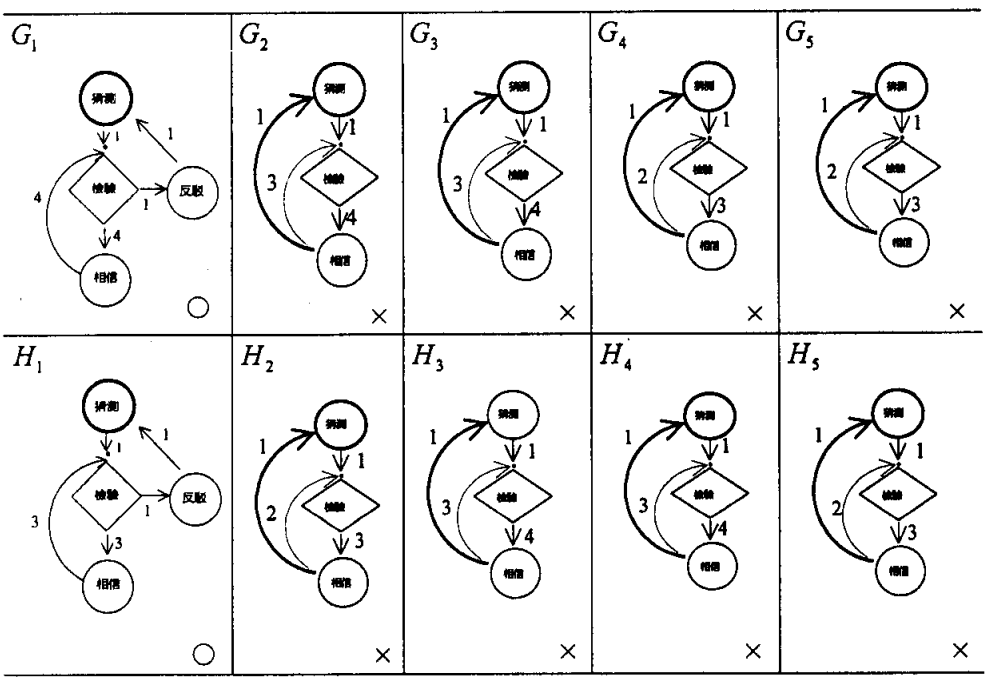


表 4 ：學生猜測“圓與點”的思維歷程圖



圖中的黑點“·”表示思維的起點，加粗的圈圈表示思維結束的位置，箭頭指示思維流動的方向，各邊的權代表該段思維的次數。圖的右下方有三種記號，○代表猜測結果是對的，△代表猜測結果對一半，×代表猜測結果是錯的。

"我猜$(\frac{r+R}{2})^2 \cdot \pi \cdot h$，我覺得很像中間那個圓的面積乘以高，因爲它很均勻，中間那個圓的半徑應該是$\frac{r+R}{2}$，體積應該是$\pi \cdot (\frac{r+R}{2})^2 \cdot h$。我覺得也可能是，梯形面積 $= (\frac{r+R}{2}) \cdot h$，所以圓柱體積可能是$(\frac{r+R}{2}) \cdot h \cdot 2\pi \cdot r$，但是這樣看起來，又跟剛剛猜的$(\frac{r+R}{2})^2 \cdot \pi \cdot h$不一樣！…"

猜測下來是通向檢驗的路徑， 說：

"我覺得$(\frac{r+R}{2})^2 \cdot \pi \cdot h$比較合理，因爲它很均勻，長得又像圓柱，我已經知道圓柱體積是底面積×高，所以，半徑取中間的那個圓的半徑，是$\frac{r+R}{2}$，再利用圓柱的算法，$\pi \cdot (\frac{r+R}{2})^2 \cdot h$就是它的體積了。"

在檢驗之後， G_2 作了選擇，她相信 $(\frac{r+R}{2})^2 \cdot \pi \cdot h$ 比較合理，而反駁了另一個猜測。另一個猜測爲什麼不合理呢？ G_2 在事後訪談中說：

"因爲這個切面是梯形，繞一圈不知道是多少。這兩個想法不一樣，第一個想法可以檢查出來，第二個想法和第一個不一樣，我想應該第一個比較合理。"

G_2 的思維到這裡停止，她沒有對這個問題再作後續的思考與解釋。她開始講她看到下一個問題，想到的是什麼。

從上面 40 個思維歷程圖可以看到：這些圖有完整的，有不完整的；從各邊權的總和也可以看到有些思維的流程較長，有些較短。其中，有些圖是循環的，有些是不循環的。是不是思維的路徑比較長，就等同於臆測是成功的？當然不是。但是，上面的案例中，所有成功的臆測（打○的）者的思維流程都是完整，思維沿著四個定點站流動，從猜測開始到猜測結束期間，站與站之間沒有中斷的邊。另外，表 2 和表 4 的思維歷程圖相當一致，思維路徑單純，這表示不論猜測的結果如何，這類問題是比較容易去想的。

二、學生數學臆測的思維模式

學生數學臆測的思維歷程可分成兩大類。一類是猜測未知結果，另一類是猜測命題對錯。這兩類思維歷程可各自歸納出一個共通模式，這兩個分類模式可統整成一個學生數學臆測的思維模式。

㈠分類模式

*1.*學生猜測未知結果的數學思維模式

圖 4 是 10 位學生猜測"圓台體積"和"海龍公式的推廣"這兩道問題的思維模式，每位學生的思維歷程都是此圖的一部分。圖 4 主要是由六種思維路徑組成的，其中有四種路徑是循環的。這四種思維路徑當中，猜測－檢驗－反駁－檢驗－反駁－猜測－檢驗－反駁 (H_5) 出現一次，此思維路徑包括一個內循環（檢驗－反駁）和一個外循環（猜測－檢驗－反駁－猜測）；而猜測－檢驗－反駁－猜測－檢驗－相信－猜測這一個思維路徑出現了兩次 (G_3 ， G_4)。此思維路徑包括兩個外循環，沒有內循環。第三種循環的思維路徑和第二種類似，只是在檢驗和相信之間多了一個內循環 (G_1 ， G_5)。第四種循環的思維路徑是猜測－檢驗－反駁－猜測－檢驗－反駁－猜測，這一思維路徑出現一次 (G_1)，此思維路徑包括兩個外循環。比較特殊的一種思維路徑是 (G_2) 同時提出兩個猜測，在對兩個猜測作比對並且檢驗其中一個之後，支持其中一個猜測，而反

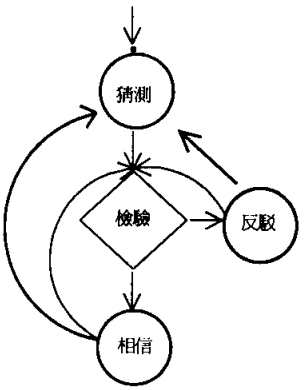
臆測的模式：猜測未知結果	此模式的特徵
	1.從猜測出發，包括猜測一個未知的結果，或者透過操作，觀察特例，從猜測可能的規則開始。 2.是一個有方向的思維循環。 3.思維循環有兩層，包括內循環和外循環。 4.思維路徑複雜而且落差很大。

圖 4 ：學生猜測未知結果的數學思維模式

駁另一個猜測，其思維路徑是猜測－檢驗－反駁（相信），並沒有循環。另外一種沒有循環的思維路徑出現一次，是猜測－檢驗－反駁 (G_4) 。除此之外，有四位學生各有一題提不出猜測；其餘的都是提出猜測之後沒有加以檢驗（含 8 人次），思維就此停住。

關於內循環與外循環的區分是以所提出的猜測來界定的。當學生提出第一個猜測之後，如果經過一個外循環，表示第二個猜測已經產生；第二個猜測可能是第一個猜測重新又一次被提出來，或者是丟棄第一個猜測之後，修改或重新提出來的另一個猜測。而提出一個猜測之後，如果經過一個內循環，表示思維仍在原猜測之下運作。如此區分也展示了內、外循環具有不同的功能：外循環的功能在於支持原猜想，或者丟棄原猜想、重新提出新猜想；內循環的功能在於精煉原猜想，對原猜想再作重覆的檢驗。

*2.*學生猜測命題對錯的思維模式

圖 5 是 10 位學生猜測“畢氏定理的推廣”和“圓與點”這兩道問題的思維模式，每位學生的思維歷程都是此圖的一部分。圖 5 主要是由三種思維路徑組成的，這三種路徑當中，檢驗－反駁－猜測這一思維路徑出現一次 (H_2) ；檢驗－相信－猜測出現一次 (G_4) ；這兩條路徑可視爲一種，都是猜測－檢驗完就結束的。另外，檢驗－相信－檢驗－相信…－相信－檢驗－反駁－猜測出現兩次 (G_1 ， H_1) ；其餘 16 條思維路徑都是檢驗－相信－檢驗－相信－…－相信－猜測。後面這兩種思維路徑各自包含檢驗－相信－檢驗－相信…這一個內循環的思維路徑，但是，沒有出現外循環。這一點是圖 4 和圖 5 的一個重要區別。

從學生的思維路徑分析可以看到，猜測未知結果的問題對學生而言是比較難的，這從學生猜測“圓台體積”和“海龍公式的推廣”時，思維路徑中斷的情形可以得到印證；另外，學生在檢驗時有偏向找正例的傾向，在全部 40 條思維路徑當中，反駁出現 8 次，而這 8 次當中，有兩位高中生 (H_1 ， H_5) 各出現一次，兩位大學生 (G_3 ， G_5) 各出現一次，另外兩位大學生 (G_1 ， G_4) 各出現兩次。不論是從學生的思維路徑分析或是直接觀察圖 4 和圖 5 這兩個分類模式，猜測命題對錯的思維路徑都是比較簡單、比較一致的。

綜合言之，圖 4 和圖 5 顯示：數學臆測

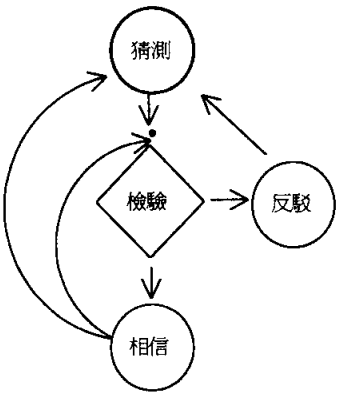
臆測的模式：猜測命題對錯	此模式的特徵
	1. 從檢驗出發，不斷地用特例檢驗已知命題的正確性。 2. 是一個有方向的思維路徑。 3. 思維路徑中包含內循環，但是，沒有出現外循環。 4. 思維路徑簡單而且一致。

圖 5 ：學生猜測命題對錯的數學思維模式

的問題本身思維的需求不同，學生臆測的思維歷程有不同的起點，而且思維路徑的複雜度不同。臆測的對象如果是一個未知的結果，學生從猜測一個結果或猜測規則出發，思維路徑較複雜而且落差很大。猜測的對象如果是一個命題的對錯，學生從檢驗特例出發，思維路徑較簡單而且一致。從上述的思維路徑分析，也顯示出學生臆測的思維在猜測、檢驗、相信和反駁之間遞迴。

㈡整合模式

如果忽略猜測的起點，直接從思維流程的角度來看，圖 4 是一個有方向的思維循環。猜測未知結果的思維循環有兩層，包括內循環和外循環，而圖 5 只有內循環，沒有外循環。這是圖 4 和圖 5 除了思維起點以外的另一個重要的區別。但是，儘管這兩個分類模式在細部有這些區別，若是從內部抽離出來，從思維流動的路徑加以仔細觀察，不難發現：圖 4 和圖 5 這兩個思維模式，具有一個共同的輪廓，如圖 6 所示。因此，經由整合圖 4 和圖 5 這兩個分類模式及其特徵，可以得到下面的結論：**學生數學臆測的思維歷程可形成一個共通的模式圖，如圖 6 所示。每位學生的臆測歷程都是此圖的一部分。**

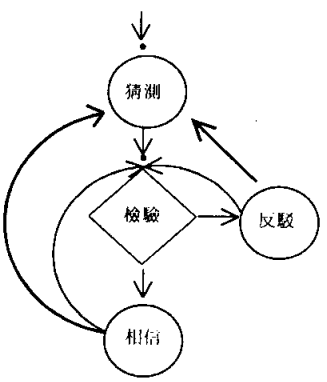
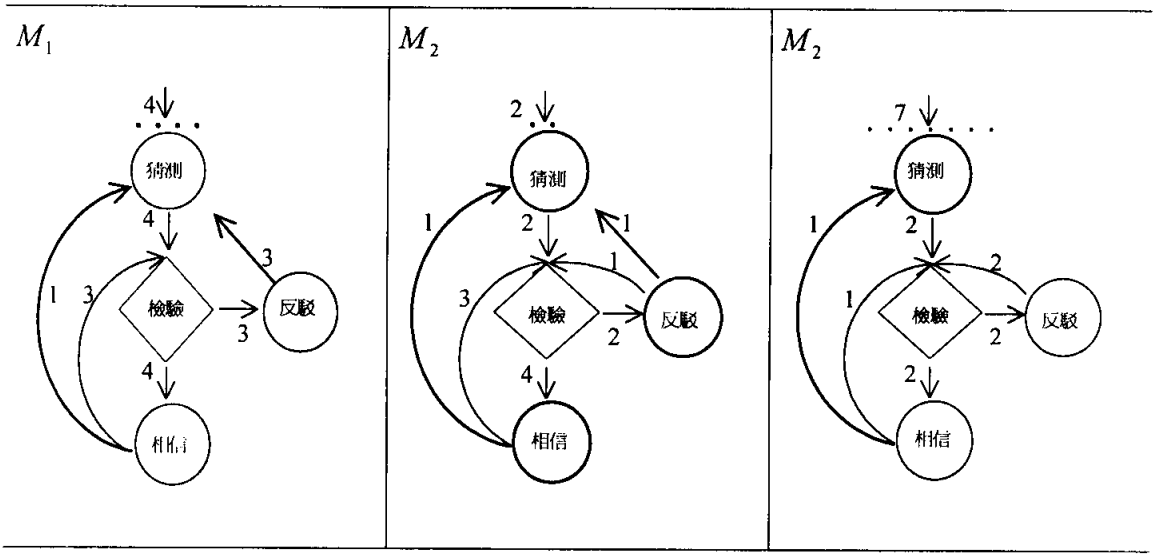


圖 6 ：學生數學臆測的思維模式

此模式是一個有方向的思維循環，思維循環有兩層，包括內循環和外循環。內循環表徵猜想的精煉過程，外循環表徵原猜想被丟棄及重構的歷程。學生的臆測思維在猜測、檢驗、相信和反駁之間遞迴。從猜測問題的本質看，如果是猜測未知結果，思維起點和思維路徑比較複雜；如果是猜測命題對錯，思維起點和思維路徑都比較簡單。

表 5 ：數學家猜測未知結果的思維歷程圖



三、數學家臆測的思維模式

本研究分析兩位數學家作數學猜測的思維過程，得到表 5 這三個思維歷程圖。

表 5 是數學家 M_1 猜測“平方的開方”和數學家 M_2 猜測“連續數的和”與“角的度數”這兩道問題的思維模式。與圖 4 、圖 5 和圖 6 不同的是：這三個圖都是 10 位學生臆測思維歷程的共同輪廓，而表 5 中的每一個圖則是數學家個別的臆測思維模式。兩位數學家除了猜測的問題不同時，猜測的起點數目不同之外，其餘的思維路徑是很類似的。

表 5 中的三個思維歷程，可統整成一個共通的模式，如圖 7 。

但是，數學家猜測的思維路徑不容易像學生的思維路徑那樣一條一條理出來，原因是數學家從猜測開始就是多頭猜測，然後檢驗，檢驗之後又是多頭出去，可能同時反駁掉兩個猜測，也同時相信另外兩個猜測。因此，思維路徑是沿著猜測－檢驗－相信和猜測－檢驗－反駁一路分叉的。和學生臆測的思維模式比較起來，數學家臆測模式的重要特徵是猜測的起點可能不只一個，而且檢驗可以同時進行，例如：

> “另外一個（想法）是說，它是一個二次量，但二次量可能是一個平方的結果，所以它是一次或二次量，所以從一次量看，剛剛有特例，讓你知道 a 趨近 b+c ，會是怎樣？ b 趨近於 0 ， c 趨近於 0 會是怎樣？從這裡來看，這地方猜 a 違上的量，應該是合理的。現在總共一次量有多少？只有高、中線、角平分線，目前是這樣，先檢查這些，就從幾何角度來看，三個一次量，一個一個檢查，當你要列舉的時候，你先做一個，然後做 refutation ，…… (data 860717-1) ”
>
> “這是一個四角形，請問∠ X 幾度？∠ Y 幾度？這個題目要把你有的鑰匙找出來，一個一個試。把所有你知道的情況列出來……。鑰匙有各種不同的鑰匙，有平的，有圓的，有卡片的，……。

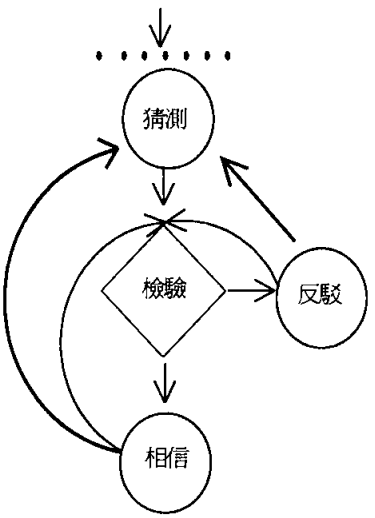
臆測的模式：猜測未知結果	此模式的特徵
	1. 從猜測出發，但出發點可能不只一個（在本案例中，M1最多同時提出四個猜測，M2最多同時提出七個猜測）。在某一猜測經確認後，有時列舉類似的可能情況，再一一確認或反駁。在某一部分經多次確認後，可能作局部證明，再作一般化。 2.是一個有方向的思維循環。 3.思維循環有兩層，包括內循環和外循環。 4.思維路徑可能因爲數個猜測的起點或檢驗可以同時運作而縮短；但是，卻更爲複雜。

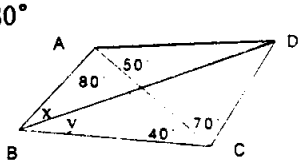
圖 7 ：數學家臆測的思維模式

(1)∠A+∠B+∠C=180°

(2)內心

(3)傍心

(4)正弦



$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}$$

(5)餘弦

(6)面積

(7)角平分線上的點到邊等距離

把你會的東西，稍爲整理一下，如果你的鑰匙孔是圓的，你會用卡片的鑰匙開門嗎？不會。所以這個只有一條角平分線，你會用內心嗎，不會。…… (data 861006-1) ″

也因爲不同的猜測—檢驗可以平行處理，相對的，數學家處理問題時，思維路徑可能因而縮短，卻更複雜。

四、學生與數學家臆測思維的比較

回頭檢視分析數學家臆測思維模式的主要目的，在於對照學生數學臆測的思維模式是否合理。綜合前面兩節的分析，本研究將學生與數學家臆測思維作一個比較，整理成表 6 。

從表 6 的分析可知，如果數學問題本身的知識需求可以降到最低，則學生數學臆測的思維模式和數學家的模式，從巨觀來看是相似的。兩者有共同的外形（都是有方向的思維循環）、有共同的起點站（由猜測或檢驗開始）、定點站（猜測、相信、反駁）、和執行站（檢驗），而且思維在站與站之間遞迴流動，非線性進行。

在相似的模式之下，若以微觀來看，兩者的思維品質是有差異的。學生的猜測幾乎都是一個一個來，數學家的猜測可以從出發點就有好幾個；學生的猜測很難照顧到水平方向的關

聯，而數學家的猜測幾乎都在水平或垂直方向上環環相扣。因此，在檢驗的環節，學生的檢驗大多數一個一個來，而數學家的檢驗可以同時關照水平或垂直方向的其它猜測。從檢驗和相信之間以及檢驗和反駁之間這兩條內循環的思維路徑和方向，可以看到數學家和學生之間對於精確程度的追求是有區別的，數學家對於所提出的猜測要求較高的精確性。至於反駁，本研究把它界定在對猜測加以檢驗，並對所得論點作批判的過程。學生的表現主要集中在自己所提出的猜測的結果是對還是錯，無法關照到猜測的方式、檢驗的方式或者過程本身是否合理。而數學家在這一部分有非常明顯的區別。數學家對所提出的猜測，除了檢驗之外，可能作一個局部證明之後再作推廣。在反駁與檢驗之間，學生在反駁之後很快丟棄猜測，而數學家則說：「有些時候鑰匙插不進去怎麼辦？要先觀察看看，是鑰匙不對，還是你亂弄，只要稍爲調一調就可以插進去。很多地方，你認爲不對的時候，不要把答案扔掉，扔掉之前，先想一想爲什麼不對。」因此，數學家在反駁之後再作檢驗的這一段歷程是學生比較少有的（案例中學生只出現過一次）。

綜合上述的分析可以發現，從巨觀來看，學生臆測的思維模式和數學家臆測的模式在外型上是相似的，兩者具有類似的特徵。但是，若從微觀來看，兩者在品質上是有差異的。這種差異就如同小型計算器與高等統計用的計算器之間的區別。若以較嚴格的標準或是高度的精確要求來看，其品質當然是不同的。

但是，如果我們把學生從特定例子的充分操作，到獲得一般化的感覺；然後累積一般化的感覺，作爲一系列猜測的根據，一直到他們做出合理猜測的這一連串操作—觀察—記錄—歸納—修改記錄—……這一系列的運作，跟成人在腦筋裡面抽象思考的智力運思看成平行的話，那麼決定這兩組智力運思的那兩組智力功能應視爲是相同的。在功能上，兩者都可因思維主體與思維對象之需求不同而滿足各自的需求。因此，學生數學臆測的思維模式和數學家的模式可以視爲是相容的，學生數學臆測的思維模式可以視爲數學家模式的一個簡化的模型。

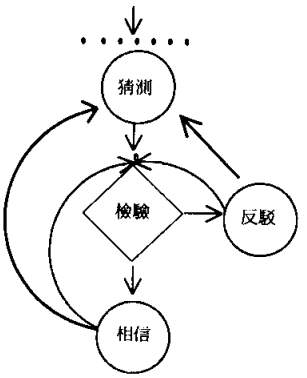


圖 8　數學臆測的思維模式

五、數學臆測的思維模式

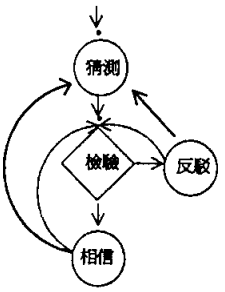
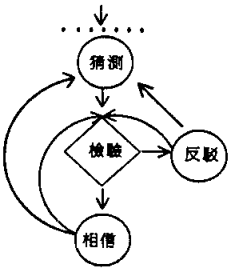
探究數學臆測的思維歷程，當然不能忽視認識對象與認識主體之間雙重的差異性。本研究以數學家臆測的思維模式爲基礎來檢視學生的模式，必須考慮猜測的問題本身的思維需求不同以及猜測的主體－學生和數學家的思維需求不同，而臆測的模式相對於猜測主體的智力運思，只要在功能上相同的，本研究就視爲相同。在分析與比較圖 6 和圖 7 這兩個模式圖和它們的特徵之後，本研究發現學生數學臆測的思維模式和數學家臆測的思維模式是相容的。兩者有一個共通的模式圖，如圖 8 所示。每位學生臆測的思維歷程都是此圖的一部分，而數學家個別的思維模式則和它完全相同或是幾乎相同。

圖 8 數學臆測的思維模式圖不僅具有圖 5 學生臆測模式的特徵，也同時反映數學家多頭猜測、多重檢驗的特徵。

六、研究結果在學理上的論辯

觀察 Lakatos (1976) 的模式和 Mason

表 6 ：學生與數學家臆測思維的比較

		學　生	數 學 家	比較結果
巨觀方面	思維模式			1. 外形相似。
	模式特徵	1. 它是一個有方向的思維循環，思維循環有兩層，包括內循環和外循環。內循環表徵猜測的精煉過程，外循環表徵原猜想被丟棄及重構的歷程。 2. 思維在猜測、檢驗、相信和反駁之間遞迴。 3. 如果是猜測未知結果，思維起點和思維路徑比較複雜；如果是猜測命題對錯，思維起點和思維路徑都比較簡單。	1. 從猜測出發，但出發點可能不只一個（在本案例中，M_1 最多同時提出四個猜測，M_2 最多同時提出七個猜測）。在某一猜測經確認後，有時列舉類似的可能情況，再一一確認或反駁。在某一部分經多次確認後，可能作局部證明，再作一般化。 2. 是一個有方向的思維循環。 3. 思維循環有兩層，包括內循環和外循環。 4. 思維路徑可能因爲數個猜測的起點或檢驗可以同時運作而縮短；但是，卻更爲複雜。	2. 兩個模式的特徵相似 (1) 都是有方向的思維循環，包括內循環和外循環。 (2) 有共同的四個思維定點站，包括猜測、反駁、檢驗和相信。 (3) 思維在四個定點站之間遞迴。
微觀方面	思維運作	1. 猜測的起點通常是一個。如果有多個，大部分是不相關連的。 2. 大多數一個一個獨立檢驗。 3. 反駁之後，很快丟棄猜測。 4. 檢驗與反駁之間的內循環很少出現。 5. 沒有照顧思維過程本身的合理性。	1. 多頭猜測，並且能夠照顧到水平方向與垂直方向的關連。 2. 檢驗可同步進行。 3. 反駁之後，再作檢驗。 4. 反駁思維強，善用列舉－檢驗－反駁的機制。 5. 隨時照顧思維過程本身的合 理性。 6. 檢驗、相信之後作局部證明，再利用一般化進行猜測。	1. 猜測的起點數目不同。 2. 站與站之間的連結強度不同。 3. 思維循環與另一思維循環之間環節關連的強度不同。 4. 反駁思維的能力不同。 5. 對猜測過程的監控，品質不同。

et al. (1985) 的模式，它們若不是由理論建構出來的，要不然就是對於構造的方法或臆測思維歷程的描述過於簡化，兩者還有一個共通點就是他們的理論都是偏向數學家觀點的。因此，若要在此基礎上談論數學臆測的教育意義，還需要一些實證資料作爲過渡。

相對於 Lakatos (1976)，本研究提出的臆測模式補充了“證明與反駁”之前的臆測思

維。另一方面，本研究的模式與 Lakatos (1976) 的模式相呼應，正是個體發展與歷史發展之間的交互參照。

相對於 Mason *et al.* (1985)，本研究結構出來的臆測的思維模式不論在思維路徑的描述、思維模式的特徵，以及思維歷程的動態刻劃，都比 Mason *et al.* (1985) 的理論更精緻，更能完整地凸顯出學生數學臆測的思維歷程。

㈠對 Mason 的臆測循環過程的批判

第二節中我們曾經談過 Mason *et al.* (1985) 將臆測圖示成一個循環過程。現在我們來還原他的想法，見表 7 。

在表 7 的分析當中，可以看到 Mason *et al.* (1985) 的第一個環節是猜測，使自己的猜想清晰，第二個環節和第三個環節是回到已有的經驗中去檢驗，搜尋正例和反例去檢驗猜測，第四個環節，“獲得一種感覺，爲何這個猜想是對的”，這是在正例檢驗之後，如果都是對的，就增加對猜想的信心，本研究稱之爲相信。“獲得一種感覺如何去修改它（原猜想）”，包含兩種意義，第一，如果找到反例，則反駁原猜想，第二，反駁原猜想之後繼續修改原猜想，提出新猜想。〝用新例子檢查〞是在新猜想提出之後，用新例子檢查新猜想。

因此，Mason *et al.* (1985) 的臆測循環過程裡面，每一個環節包含單一個或四個定點站，環節二是回到經驗中搜尋例子去檢驗，環節三是舉反例檢驗，這兩個環節都在執行對猜想加以檢驗這項工作。至於要對正反例作區分的話，由檢驗結果是相信或反駁即可分辨。第四個環節其實包括相信、反駁、猜測和檢驗四件事，Mason 把它們放在同一個環節去描述，讓整個循環過程顯得太過複雜。

若將本研究對象的眞實思維資料放進

表 7 ：Mason *et al.* (1985) 的臆測循環過程分解和詮釋

	Mason的想法	本研究的詮釋
環節一	使猜想清晰 —當作了猜測，就相信它。	猜測 提出猜想。
環節二	檢查猜想 過佈所有知道的情況和例子。	檢驗 回到自己有的經驗中去檢驗。
環節三	不要相信猜想 試著用不易解決的困難情況或例子去反駁。 用它作爲被檢查的預測。	檢驗 用反例檢驗。
環節四	獲得一種感覺 爲何這個猜想是對的，或如何修改它，用新例子檢查。	相信 正例檢驗的結果如果是對的，增加對猜想 的信心。 反駁 如果找到反例，反駁原猜想。 猜測 繼續修改原猜想，提出新猜想。 檢驗 用新例子檢驗新猜想。

表 8 ：G_5 猜測“海龍公式的推廣”

G_5的口語資料	利用Mason的架構詮釋G_5的思維	本研究的詮釋
R: 四邊形四邊長 a,b,c,d，半周長 $s=\frac{a+b+c+d}{2}$，你猜四邊形面積公式A應是什麼？		
G_5: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$	環節一	猜測
R: 爲什麼呢？	使猜想清晰	提出猜想
G_5: 跟海龍公式長得很像。	一當作了猜測，就相信它	
R: 有沒有理由？		
G_5: 不曉得，先猜再證明。…	環節二	檢驗
G_5: 邊的四次方，剛好開根號是邊的平方，所以它應該是面積公式。	檢查猜想 遍佈所有知道的情況和例子	回到已有的經驗中去檢驗，面積應該是二次的。
G_5: 這是邊的五次方，可能就不是了。	環節三 不要相信猜想 試著用不易解決的困難情況或例子去反駁。用它作爲被檢查的預測。	反駁 五次方開根號，不是二次，所以不是面積。
		提出新猜想 $A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
G_5: 眞的有問題的話，我會選擇去掉S。	環節二	檢驗
G_5: 因爲這是很有規則的，每一個邊都會用到，它們是互相影響，只是我不知道爲什麼會互相影響？…邊的平方×邊的平方，開根號是二次，有可能是。	檢查猜想 遍佈所有知道的情況和例子	檢查A是不是二次式。 相信 檢查結果A是二次式，有可能是面積公式。
G_5: 這時候，我會驗證正方形，譬如說，邊長1，s=2, 2−1=1，所以正方形對！那我會驗證長方形，譬如說，寬2，長4，s=6，$(6-2)^2=16$，$(6-4)^2=4$，$\sqrt{16\times4}=8=2\times4$，長方形對！		檢驗 舉實例檢驗。 相信 正方形面積可以用A表示。 檢驗 舉例檢驗。 相信 長方形面積可以用A表示。
G_5: 現在，我檢驗的正方形、長方形都對，那麼，任意的四邊形都會對的，像平行四邊形，沒關係呀！我們也是多退少補。任何四角形，還是多退少補，都可以補成，慢慢分割…這一段補這一段，補成長方形。	環節四 獲得一種感覺 爲何這個猜想是對的，或如何修改它，用新例子檢查	歸納、利用圖形演繹推理（不在本文範圍）
R: 所以你說任意的四邊形都可以了。		猜測
G_5: 可以。		支持第二個猜測是對的。

Mason *et al.* (1985) 的架構加以分析，有些部分是無法詮釋的。例如：G_5 猜測“海龍公式的推廣”，如表 8 。

從表 8 的分析可以發現把 G_5 的思維資料放入 Mason *et al.* (1985) 的架構，看不到各個定點站之間的區別和轉折。因此，G_5 的臆測思維無法在此架構上適當地呈現。另外，在 Mason *et al.* (1985) 的解題模式當中，他把數學思維歸結爲特殊化、一般化、臆測和確認，這也是太過簡略的。第一，他把思維方法（特殊化、一般化）和思維過程（臆測、確認）混爲一談；第二，他對思維方法和思維過程的描述也過於簡化。雖然 Mason *et al.* (1985) 在“數學式思維”第四章曾經提到：猜想是由兩個主要活動產生的，即特殊化和類比，但是他主要強調的還是特殊化和一般化。但本研究的實證資料顯示，在臆測過程當中，除了要讓猜想清晰、檢驗和修改猜想之外，反駁佔有非常重要的地位，它的意義值得突顯出來。在 G_5 的案例中，如果他沒有因爲“次方”不合而提出反駁，他的猜測過程可能很早就中斷了。但是，Mason 並沒有揭示反駁在臆測過程的重要性。第三，Mason *et al.* (1985) 的臆測循環過程圖是單向循環的，但是本研究的實證資料顯示事實並非如此。以 G_5 爲例，他的思維在猜測、檢驗、反駁和相信之間遞迴，並非單向或線性流動。

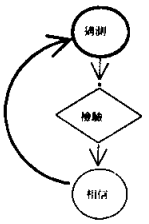
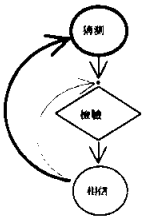
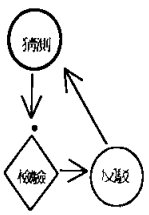
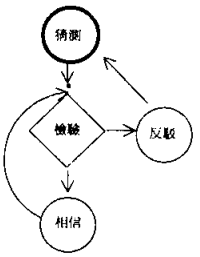
綜合言之，Mason *et al.* (1985) 的模式，除了偏向數學家觀點之外，對於臆測環節的描述也太過含糊，他沒有揭示反駁在猜測過程的重要性以及思維方向的分叉。因此，雖然 Mason *et al.* (1985) 的圖對本研究的思考有所啓發，但是若拿來作爲本研究的分析架構，則很多樣本資料無法在此架構上恰當的呈現。

㈡對 Lakatos 探索式思維模式的補充

另外一個和本研究之臆測的思維模式有關的是 Lakatos (1976) 的探索式思維模式，見圖 1 。在圖 1 的三條思路當中，最裡面的一條思路是：“把猜測作初步的試驗，然後直接加以反駁、進行重構和局部反例的檢驗，最後再進行證明”。如果把它放入本研究的分析架構中，則分析出來的思維路徑是：猜測－檢驗－反駁－猜測－檢驗－（證明），只要扣除證明階段（因爲證明階段不在本研究的範圍內），是可以用本研究的臆測模式加以詮釋的。但是，有一點非常重要，必須要澄清的是：圖 1 和本研究中圖 6 的目的、描述的對象、描述的內涵和描述的方法都是不同的。Lakatos (1976) 的目的在還原歷史，本研究的目的在還原學生認識的根源；Lakatos (1976) 描述的是數學家的思維歷程，素材是數學史，方法是思想實驗；本研究描述的是學生的思維歷程，用的是學生眞實的思維資料，方法是訪談；Lakatos (1976) 的材料中數學問題是數學家提出來的，本研究中數學問題是研究設計下由研究者提出來的；Lakatos (1976) 談的臆測是在提出猜測之後，證明與反駁的過程對於猜測的批判作用；本研究中，臆測是指問題提出後，合理的猜測未知結果或命題對錯的過程（在時間上是比 Lakatos 說的階段要早一些的）。Lakatos (1976) 的核心意義在於數學發現的探索式思維模式，以結構其數學擬經驗的數學哲學理論；本研究的核心意義在於數學臆測的思維模式，以結構擬經驗取向：數學臆測與反駁的學習理論。因此，本研究在思維模式和教學上的深度關心是 Lakatos (1976) 不考慮的。但是 Lakatos (1976) 的研究在數學方法論—探索式思維，以及對形式主義的挑戰給予本研究很多的啓示。

Lakatos 在“證明與反駁”中利用假想的對話體論述，他編織假想的師生對話的故事，意在寫出某種按理性重建或蒸餾過的歷史 (Lakatos, 1976) 。本研究對學生思維歷程的研究，也志在寫出學生眞實思維發展的歷史。但是由於本研究是基礎性的研究，因此，選擇研究設計下的臆測思維歷程作爲探究的起點，伺對此有初步的瞭解之後再進入現實的教室情境中進行學生臆測思維的研究。

表 9 ：學生猜測“命題對錯”的思維類型

單檢驗		多檢驗	
大學生1人次	高中生1人次	大學生9人次	高中生9人次
	2人次 (G_4，H_2)		16人次
	G_4		
	H_2		2人次(G_1，H_1)
1分		2分	

綜合言之，本研究和 Lakatos (1976) 的研究理念相同，方向不同。 Lakatos (1976) 的研究意在還原數學知識成長的歷史，本研究意在描述學生數學臆測思維發展的歷史；Lakatos (1976) 強調猜測和反駁在數學發展的作用，而本研究強調猜測和反駁在學生數學知識成長的作用。本研究提出的臆測思維模式補充了從問題到提出猜測期間的思維歷程，而這一段思維是 Lakatos (1976) 沒有處理的。另一方面，歷史的重建不能解決任何生物所面對的實體的本質和生物體內組織的原理的問題。組織的形態學和發展的比較研究是最重要的，因爲這些經驗規則性的發生可爲「在達爾文之前，理性的形態學家所建立的生物學是一個系統的、有序的領域」這件事情提供證據 (Goodwin, 1983) 。本研究的模式與 Lakatos 的模式 (Davis & Hersh, 1995) 相呼應，正是個體認識發展與歷史認識發展之間的一種對照，這在教學上有重要的意義。

七、數學臆測思維模式的應用

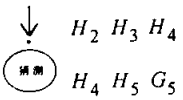
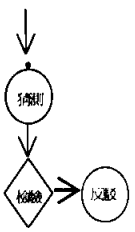
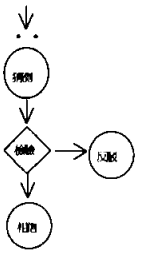
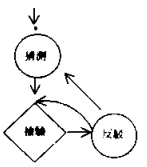
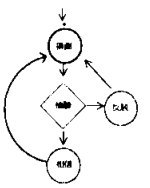
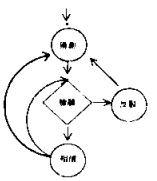
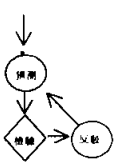
㈠猜測對象難度的評量

從表 1 － 表 4 中學生臆測的思維歷程圖，可以很明顯地看到對於大學生或高中生而言，猜測未知結果是比猜測命題對錯難的。在猜測命題對錯的這兩道問題當中，五位大學生的思維歷程圖和五位高中生的圖可以說沒有什麼差別。這些思維歷程圖可以分成單檢驗和多檢驗兩類，如表 9 。

但是，在猜測未知結果的問題上大學生和高中生的表現就有明顯的區別。這些思維歷程圖可以分成五類，如表 10 。從表 10 可以看到猜測未知結果對高中生來講是比較難。 10 個思維歷程圖中，只有一個思維歷程圖 (H_5) 是完整的。

綜合表 9 和表 10 ，可以看到就問題本身

表 10 ：學生猜測未知結果的思維類型

無法提出可檢驗的猜測		可猜測沒有檢驗		單猜測單檢驗		雙猜測單檢驗		多(單)猜測多檢驗	
大學生 1人次	高中生 3人次	大學生 2人次	高中生 6人次	大學生 1人次	高中生 0人次	大學生 1人次	高中生 0人次	大學生 5人次	高中生 1人次
4人次		8人次		1人次		1人次		6人次	
 H_1 H_2 H_3 G_2		 H_2 H_3 H_4 H_4 H_5 G_5  H_1  G_3		 G_4		 G_2		 H_5  G_3 G_4  G_1 G_5  G_1	
0分		1/2/3分		4分		5分		6分	

而言，猜測未知結果的問題比猜測命題對錯難。高中生和大學生在這兩道問題的表現與猜測對象本身的特性相當一致。

㈡學生臆測思維品質的評量

觀察表 9 學生在猜測命題對錯的表現，可將學生思維的品質區分爲兩級，包括可以作單檢驗和多檢驗的，而後者優於前者。觀察表 10 學生在猜測未知結果的表現，可將學生思維的品質區分爲五級，包括： (1) 無法提出可檢驗的猜測； (2) 可猜測沒有檢驗； (3) 單猜

表 11 ：學生臆測思維質的等級

等級	類 型	學生代碼
Ⅰ	單猜不驗（不猜、可單驗或多驗）	H_2、H_3、H_4
Ⅱ	多猜不驗（不猜、可多驗）	H_1
Ⅲ	多(單)猜單驗（不猜、可多驗）	G_2
Ⅳ	多(單)猜多驗（有時不驗）	G_3、G_5、H_5
Ⅴ	多(單)猜多驗（單猜單驗）	G_4
Ⅵ	多(單)猜多驗	G_1

表 12 ：學生臆測思維量的等級

等級	分類得分 A	分類得分 B	總 分	學生代碼
Ⅰ	1	4	5	H_2、H_3
	2	4	6	H_1、H_4
Ⅱ	5	4	9	G_2
Ⅲ	7	4	11	G_5
	7	4	11	H_5
Ⅳ	9	4	13	G_3
	10	3	13	G_4
Ⅴ	12	4	16	G_1

（A表示猜測未知結果，B表示猜測命題對錯）

測單檢驗；(4) 雙猜測單檢驗；(5) 多（單）猜測多檢驗。表 10 中，愈往右邊思維的歷程圖愈完整，思維的品質也愈好。

本研究把臆測的思維模式拿來作爲評量學生臆測思維品質的架構，將學生臆測的思維品質分成六個等級，見表 11 。表 11 是整合表 9 和表 10 的分類得來的。

另一方面，從表 9 和表 10 中的分類建立給分標準，以表 10 爲基準，得分如表下方的數據所示。至於表 9 的給分，依照表 10 的標準，多檢驗比單檢驗多一分。這個部分得分偏低採計是因爲 10 位研究對象在這一類型的得分並沒有什麼區別，所以，採淡化處理以凸顯另一類得分的差異。依照此標準量化之後，發現學生臆測思維依量化分類可分成五個等級：見表 12 。

對照表 11 和表 12 ，可以發現：除了 G_3 以外，其他人在等級中的位置是確定的。本研究再針對 G_3 的表現進行分析，並和 G_4 、 G_5 作比對，從表 1 和表 3 可以看到， G_3 的表現和 G_5 是比較接近的，所以歸爲一類，而 G_4 的表現是優於 G_3 、 G_5 的。經由整合表 11 質的等級和表 12 量的等級，本研究得到數學臆測思維品質的評量等級，如表 13 所示。

除此之外，本研究在評量學生臆測思維品質的同時，也獲得一項重要訊息，即猜測未知結果的問題較能反映出學生臆測思維的品質，但是，猜測命題對錯的問題具有診斷臆測思維的功能。因此，兩者配套使用，各自扮演重要的角色。

㈢診斷教學與教學處方的基礎

進行診斷教學的首要工作就是教師必須了解學生的認知狀態與思維過程，這是教師設計教學活動的基礎，也是教師在教室中臨場診斷與開出教學處方的重要依據。本研究中利用臆測的思維模式診斷學生思維的品質，可作爲教師診斷教學和開出教學處方的基礎。 例如， G_3 和 G_4 在量化之後得分相同，很難辨識其思維中斷的點，因此，不容易區別這兩位學生的認知狀態。若是觀察表 1 中 G_3 和 G_4 的思維歷程圖，則可以立刻分辨出 G_3 是因爲多頭猜測、摸不著頭緒，又沒有檢驗猜測，而導致臆測失敗。而 G_4 卻是因爲提出猜測，經過檢驗之後，丟掉原猜想，卻沒有提出新猜想或繼續對原猜想作檢驗，而導致思維中斷。因此，教師針對這兩位學生所開出的教學處方應該是不同的。 G_3 的需求是如何形成可檢驗的猜測，以及養成猜測之後馬上檢驗的習慣；而 G_4 的需求是對於一個被反駁掉的猜想應當如何處理，以及從單檢驗轉向多檢驗。

至於，診斷五位高中生的思維，那就更明顯了。從表 1 和表 3 可以看到，如何形成可

表 13 ：數學臆測思維品質的等級

等級	類　　型	總分	學生代碼
I	單猜不驗（不猜）	5	H_2、H_3
	多猜不驗（不猜、可單驗或多驗）	6	H_1、H_4
II	多(單)猜單驗（不猜、可多驗)	9	G_2
III	多（單）猜多驗（單猜不驗）	11	H_5、G_3、G_5
IV	多（單）猜多驗（單猜單驗）	13	G_4
V	多（單）猜多驗	16	G_1

檢驗的猜測是他們共同的困難，而猜測之後沒有作檢驗也是他們臆測失敗的一個重要關鍵。因此， H_5 和其他四位學生的教學處方應該是不同的。

本研究探討學生數學臆測的思維歷程，最主要的目的在瞭解學生面對一個他不知道答案的數學問題時，提出一個合理猜測的思維過程，以作爲設計數學猜測活動的依據。從本節的分析中，可以發現本研究所建立的數學臆測的思維模式，對於猜測對象難度的評量、學生臆測思維品質的評量和教室活動中進行診斷教學與開出教學處方都有重要的啓示。

結論與對未來研究方向的建議

一、主要結論

本研究旨在探究學生數學臆測的思維歷程，並描述此思維歷程的特徵。研究結果整理如下：

㈠學生數學臆測的思維模式和特徵

學生數學臆測的思維歷程可形成一個共通的思維模式圖，每位學生的臆測歷程都是此圖的一部分。此臆測思維模式是一個有方向的思維循環，思維循環有兩層，包括內循環和外循環。內循環表徵猜想的精煉過程，外循環表徵原猜想被丟棄及重構的歷程。學生的臆測思維在猜測、檢驗、相信和反駁之間遞迴。

㈡學生數學臆測的思維模式與數學家的模式是相容的

本研究將學生臆測的思維模式與數學家的模式作對照，發現學生的臆測如果是成功的，則可以用數學家的系統來加以詮釋的。雖然學生的臆測思維和數學家的思維在品質上有差異，但是，如果考慮猜測問題相對於猜測主體的需求，將學生一連串的操作、觀察、記錄、歸納和修改記錄這一系列的運作，與數學家在腦中的智力運思看成平行的話，則學生臆測的思維模式與數學家臆測的思維模式可以視爲是相容的。相對於猜測的主體，兩者具有相同的功能。學生數學臆測的思維模式可以視爲數學家臆測模式的簡化的模型。

二、研究結果在學理上與教學上的啓示

㈠學理上的補充

本研究站在 Lakatos (1976) 的探索式思維模式和 Mason *et al.* (1985) 的臆測循環圖的基礎上，探究數學臆測的思維歷程。研究結果建構出一個數學臆測的思維模式，此模式的內涵和特徵以及在教學評量與診斷的應用，都是 Mason 沒有的。依據 Mason *et al.* (1985)

的架構，本研究很多研究對象的資料無法恰當的呈現。與 Mason *et al.* (1985) 的臆測循環過程圖比較起來，本研究所建立的數學臆測的思維模式能夠更完整地凸顯學生數學臆測的思維歷程。

另一方面，本研究擴展了 Lakatos (1976) 理論的範圍。Lakatos 的研究是從提出猜想以後的階段開始的，他處理的是猜測被提出以後，利用證明與反駁改進猜想的過程。本研究的模式正好補充了從問題到合理的猜想被提出來這個階段的思維歷程。除此之外，Lakatos 研究的素材是數學史，本研究的素材是學生眞實的思維資料，兩個模式的相對照，正是歷史認識發展史與個體認識發展史之交互參照。

㈡教學上的啓示

學生個人數學臆測的思維模式可以呈現出其思維路徑和認知狀態。對於教師而言，它具有表徵問題的難度、評量學生思維的品質以及診斷教學和開出教學處方的功能。這些對於教學實務有非常重要的意義。

三、對未來研究方向的建議

根據研究過程的心得和研究結果，以下將提出三點對未來研究方向的建議：

㈠猜測的問題與猜測的主體之間的關係

本研究中將猜測的問題分爲兩類，難易程度也因此變成二分，這樣的分類相當簡化。猜測的問題從數學上到底可以怎麼分？這是一個有待進一步探討的問題。另外，探究數學臆測思維的研究之中，就某一類猜測的問題本身在知識方面的需求應該可以再精緻化，而且依照猜測問題的分類，問題本身的難度可再加以分析。除此之外，猜測的問題與猜測的主體是兩個變數，在研究上如何去做歸因也是一個值得深思的問題。

㈡數學臆測的思維模式與數學觀的關係

數學到底是怎樣產生的？是經驗的？還是先驗的？數學產生以後是如何發展的？是依靠實踐的推動？還是依靠邏輯的力量？數學是客觀的？還是主觀的？數學是一門經驗的科學，還是一門先驗的科學？數學是歸納的？還是演繹的？對上述這些問題的討論經常表現爲對數學本質的討論，這些討論在歷史上各個時期的主要傾向也都不一樣。

十八世紀以前，畢達哥拉斯學派和柏拉圖學派對於數學知識的本質持先驗論的觀點，但是，一直到十八世紀，經驗論的觀點在數學中仍然是主要的觀點。從十九世紀初到本世紀初的一百年裡，演繹法成爲發展的主流，數學發展表現爲一系列的邏輯推理，數學的成果如果沒有嚴密的邏輯論證，是得不到數學界的承認的。本世紀初期數學基礎的研究中，三大學派之間存在激烈的爭論。這些爭論在 1931 年受到重大的衝擊。Godel 用數學定理的形式證明了邏輯主義和 Hilbert 利用形式改造數學的方案無法實現，而作爲數學理論基礎的集合論，它的相容性也只是一個經驗事實。數學中由來已久而且具有廣泛影響力的先驗論再度受到挑戰。於是，便興起了以反對先驗論爲特徵的現代經驗論的思潮。現代經驗論接受傳統經驗論的某些觀點，卻又反對數學知識是經由經驗歸納而來的看法。它對於數學知識的看法偏向經驗論的觀點，但是對於數學知識形成的看法是介於理性和經驗之間的。數學知識的成長不是靠消極的地等待知識的累積，而是數學家主動地提出問題，進行“問題－猜測－反駁－問題”的過程。數學知識的成長和數學的進步的主要機制是批判，“批判是智力發展的主要動力” (Popper, 1963; Lakatos, 1976)。猜想並不是靠經驗歸納得來的，而是人們依一定的知識背景，再用試錯法經過多次猜測、多次反駁才得到的（周述岐， 1993 ）。

綜合上述，我們可以看到：只要數學一直發展，個人或當代社會的數學觀點呈現分歧似乎是必然存在的。而數學家對於數學的觀點和數學的發展有非常密切的關係。本研究在訪談

的過程中發現，有三位學生出現過像這樣的回

R：答：
你能不經過計算，就猜出這個圓台的
S_4：體積嗎？
R：不能。
S_4：爲什麼？
R：因爲沒有學過，不能算。
S_4：你試著猜看看嘛！
不能，我只有學過正方形和長方形，
R：這個我沒學過就不能算。
你只要試著猜看看，我並沒有要你算出來，你能再試著猜看看嗎？
S_4：或者你只要告訴我一些想法…？
我可不可以放棄？…

關於數學知識的性質，絕對觀和可錯觀是兩種截然不同的觀點。數學知識的絕對觀是由數學的確定性和不可挑戰的眞理構成，在此觀點之下，數學知識是絕對的眞理，數學是代表正確知識的唯一領域 (Ernest, 1991)。在數學知識是可錯的觀點中，尋找數學絕對正確性的基礎是被拒絕的。數學知識被認爲是可錯的、可更正的而且不需要確定的基礎 (Lakatos, 1978)。在上面的案例中 S_4 對於沒學過的問題就不敢去嘗試，顯然是缺乏數學是可錯的觀念。也因爲沒有建立數學是可錯的的觀點，而阻礙了後續的思考。本研究中有一些學生在猜測未知結果的問題時，對於沒學過或不確定是否正確的問題就不敢去試。除了認知的因素之外，數學觀可能是一個重要的因素。學生臆測的思維模式是否是其數學觀的具體表現？或者，學生的表現是否和教師的數學觀有密切的關係？如果是，那麼在數學教育上應該如何因應？這些都是值得進一步探討的問題。

㈢數學猜測活動與探究教學

從學生臆測的思維路徑可以看到臆測本身是一個完整的思維歷程。當學生面對一個他不知道結果的數學問題時，第一步進入的階段可能是最困難的。在進入和進擊的過渡階段，如果猜測之後沒有加以檢驗，整個思維可能就此結束。另外，從學生猜測命題對錯與猜測未知結果的表現來看，可以知道猜測未知結果的問題對學生而言是比較困難的。因此，設計猜測活動從猜測命題對錯開始，是比較恰當的。除此之外，如何維持學生整個思維流程運作的流暢、如何加強個人思維的外在監控系統以及如何界定教師角色也是數學猜測活動設計的重點。

在教室中進行數學猜測活動，是一種探究教學。探究教學與發現教學不同，探究法鼓勵學生獨立思考，討論自己的想法和發現。探究教學在英國是相當普遍的。在台灣，要從事探究教學的研究或實務，教學現場或教學材料都相當缺乏。Jaworski (1996) 探究數學教學的研究是一個很好的案例，可作爲教學或研究上的參考。她的教學三元組：學習環境的經營、對學生的敏感度以及數學挑戰，和數學猜測活動的精神相當吻合，可作爲設計教學活動的參考。

參考文獻

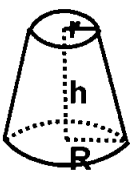
1. 徐利治、王前（1989）：**數學與思維**。湖南：湖南教育出版社。
2. Davis, P. J. and Hersh, R. (1995). *The Mathematical Experience*. Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.
3. Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*, London, Falmer Press.
4. Goodwin, B. C. (1983). History and Structure in Biology and in *the* organism, in Gorcia, R. *et al*. *History of Science and Psychogenesis*, 273-319, Geneve: Fondation Archives Jean Piaget.
5. Jaworski, B. (1996). I*nvestigating Mathematics Teaching: A constructivist Enquiry*. London. Washington, D.C. The Falmer Press.

6. Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press.
7. Lakatos, I. (1978a). *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press.
8. Lakatos, I. (1978b). *The Methodology of Scientific Research Programs*. Cambridge University Press.
9. Mason, J. *et al.* (1985). *Thinking mathematically*. California: Addison-Wesley Publishers.
10. Yerushalmy, M. (1993). Generalization in Geometry, in Schwartz, Yerushalmy and Wilson, *The Geometric Supposer*, 57-60, Hove and Londom.

附錄一 前置研究工具

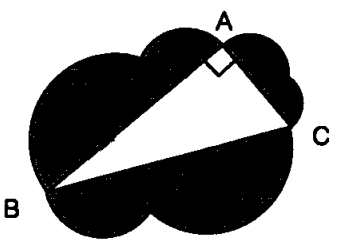
一、圓台體積

你能不經過計算，就猜出上、下底分別爲 r 和 R ，高爲 h 的圓台體積公式嗎？



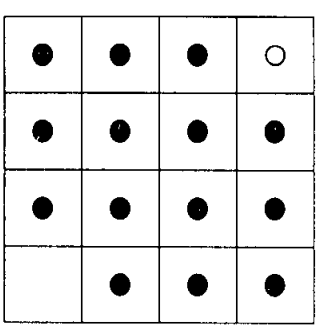
二、畢氏定理的推廣

如果我在這個直角△的三邊上畫上三個相似的圖形，你猜斜邊上的圖形的面積會等於畫在另外兩邊上那兩個相似圖形的面積和嗎？



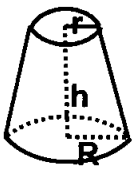
三、移動方格

下圖是一個 4 × 4 的方格，遊戲的規則是挑戰者必須把右上角的白色棋子移至左下角的空方格，每一次只能移至鄰接的空格，問：要達成目標的最少次數是幾次？如果換來一個 18 × 18 的方格，要達成目標的最少次數是幾次？

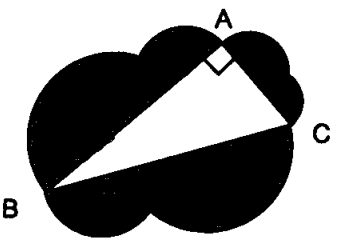


附錄二　數學猜測測驗

作答說明：本測驗共有四道題，請依題意儘量詳細作答



1. 你能不經過計算，就猜出上、下底分別爲 r 和 R ，高爲 h 的圓台體積公式嗎？說出你猜的答案以及猜的理由。



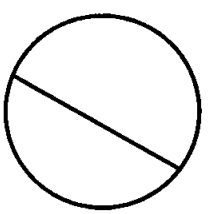
2. 如果我在這個直角△的三邊上畫上三個相似的圖形，你猜斜邊上的圖形的面積會等於畫在另外兩邊上那兩個相似圖形的面積和嗎？爲什麼？

3. 三角形三邊長 a ， b ， c ，半周長 $s=\frac{a+b+c}{2}$，面積爲 A ，則 $A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$

問題：(1) 假如不經過計算，你能猜出 $A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ 是一個面積公式嗎？爲什麼？

(2) 四邊形四邊長 a ， b ， c ， d ，半周長 $s=\frac{a+b+c+d}{2}$，你猜四邊形面積公式 A 應是什麼？爲什麼？是不是任意四邊形面積都可以這樣表示？

4. 「一圓周上取 N 個點 ($N \geq 2$) ，並兩兩用直線連接，則這圓最多可被這些線分成 個區域。」你猜上面的敘述是對嗎？爲什麼？



A Thinking Model of Mathematics Conjecturing

Ing-Er Chen[1] and Fou-Lai Lin[2]

[1]Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University

[2]Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Abstract

This study aimed to investigate students' thinking processes of mathematics conjecturing. Five grade eleven students, 5 undergraduate students and two mathematicians were interviewed with a special survey in the study. The survey included two parts: The Mathematics Conjecturing Test for students and The Expert's Interview Questionnaire for mathematicians. It was found that that pictorial representations of students' thinking processes of mathematics conjecturing could be constructed as a unified model. It was further found that students' conjecturing model and mathematicians' conjecturing model are compatible. The conjecturing model contained two directed cycles, an inner cycle and outer cycle. The inner cycle represents the process of refining the primitive conjecture and the outer cycle represents the process of rejecting the primitive conjecture and reforming a new conjecture. The conjecturing process appears to move dynamically and recursively between four stages: guessing, checking, confirming and refuting. When students work on tasks of guessing an unknown conclusion, the model reveals that the starting point of students' thinking and their thinking paths are more complicated than the corresponding representations on tasks of judging the correctness of a proposition. This mathematics conjecturing model can be used to study the difficulty of the tasks and to evaluate the quality of individual thinking.

Key words: conjecturing, refuting, mathematics investigating, thinking model.