科學教育學刊
1998, 第六卷第三期， 255-269

EJ51-1998-255

涂景翰的數概念

甯自強
國立台中師範學院　數學教育學系

（投稿日期：86 年 10 月 23 日，接受日期：87 年 6 月 26 日）

摘要：以根本建構主義爲知識論基礎，皮亞傑的基模理論爲心理學的基礎，本文假設數概念爲集聚單位，並區分幼兒的數概念類型爲數的前置概念與起始數概念兩種。透過教學晤談法的實施，一位七歲幼稚園大班的兒童涂景翰對有關數概念功能問題的反應資料被加以蒐集，並加以概念分析。分析的結果顯示其數概念爲起始數概念。至於個案的起始數概念的特質，則以對 8 個原案的詳細的闡釋加以突顯。

關鍵詞：數概念、教學晤談法、幼稚園。

前　言

本文共分五節。第一節敘述進行兒童數概念研究的背景及其重要性。第二節則分析數概念的本質以及說明幼兒階段的兩種數概念類型及其性質。第三節敘述進行數概念類型研究時蒐集及處理資料的方法。第四節報導涂景翰的數概念類型及其性質。末節則反思研究上的一些瑕疵。

背景及重要性

在國小數學教育階段中，有關數概念的學習是主要的課程重點。即以我國國民小學數學課程來說，有關數概念的學習即佔三分之二左右，其他世界各國的小學數學課程，在有關數概念的教材份量上，也不遑多讓。事實上，世界各地在幼稚園階段即開始引入數概念啓蒙的教材。倘使課程研發的目的在於能促使兒童學得所編製的有關教材，在課程編製時，對於兒童可能達成的學習成果，則應當有所預期。易言之，在幼兒數學教育時，對數概念啓蒙教材的側重必須先對兒童學習數概念的成果－即兒童數概念的類型，有所預期，始能在編製有關的教材時，可以妥當的選擇與組織。

然而，臺灣過去對幼兒「數概念」研究上，一向缺乏對幼兒「數概念」的特質加以描述；即便有所描述，若非僅限於描述幼兒的學習成果，亦多以研究者預先假設的概念來規範（即描述成人的數概念），而非由幼兒有關「數概念」的全盤表現特質加以抽象。如果幼兒的「數概念」是發展的，他們的數概念依其發展過程，必然迥異於成人的數概念。是故，如果幼兒的「數概念」有其類型，是項類型理應源自幼兒在各階段對有關數概念問題的反應記錄，而非研究者預先假設的概念架構的修正。

中外已有有關對兒童「數概念」發展的研究，除去少數（例如， Steffe, *et al.*, 1983, 1988) 的例外，大多數將所謂的「數概念」視爲當然而且具有一成不變的意義。如果「數概念」之類的數學知識來自於解決有關於數量問題的經驗，是項知識的獲得理應歷經「經驗」、「察覺」以及「瞭解」的各階段（甯自強，1993a ），而非一時之間驟然「從無變有」。即，兒童首需「經驗」數概念活動的顯著成分，最後「瞭解」何以是項「數概念」活動得以發揮功能的「所以然」。是以，意圖研究兒童的「數概念」發展，不但需揚棄所謂「數的意義一成不變的」底成見，更需能區分同一「數概念」的不同心理成就。

特別的，「發展」一辭，從宏觀的著眼點來看，「時間差」是不可忽視的重要因素，但從微觀的著眼點而言，「路徑差」亦爲一顯著的要素。已有的心理成就經歷了長期的人際交流，可使相同的語辭在使用上的「語意」更具「相容性」，但是「語意」上的相容未必蘊涵著心理成就上的「相同」。同一「數辭」可以誘發不同的「數概念」，研究者應避免由於不同「數概念」的「相容功能」，遽而結論出相同的「數概念」。是以，意圖研究兒童的「數概念」發展，實不可忽視兒童對數辭的「語意差」以及「語意演化路徑差」。

因而，欲研究幼兒「數概念」的發展，不但需根據幼兒有關「數概念」問題的反應資料，歸納描述出兒童在不同時段的不同「數概念」的特質，更需累積是項資料用以刻劃出幼兒不同「數概念」的「演化途徑」。本文的目的在依據一位幼兒對有關「數概念」問題的反應底資料，描述出他的「數概念」的特質模型。具體言之，在於說明他對「數辭」所賦與的意義類型以及不同類型的功能。

本文涉及底幼兒的「數概念」模型與研究者所建構的幼兒「數概念」模型必有不可避免的不同。在此，所謂的模型是指一個由研究者就其認爲有關聯性的一組經驗中得以建構出的概念。模型可以被更改，如果其解釋威力已不足以說明在這模型原本使用的情境中所產的新例子。具體言之，本文企圖描述出兒童的「數概念」的特質，而是項描述的重要性，一方面爲研究幼兒「數概念」發展不可或缺的基礎；另方面則爲研究幼兒「數學概念」發展不可或缺的基礎，蓋「數概念」允稱爲「數學知識」之濫殤。

數概念本質及類型

本研究由根本建構主義的知識論假設 (von Glasersfeld, 1995) 出發，以皮亞傑的基模論 (Piaget, 1970) 爲心理學假設，探討兒童「數概念」的可能類型。即，探討兒童對整數詞所賦與的意義，而該項意義取決於兒童在解決問題的情境中，所使用的基模而言（甯自強， 1993b) 。然而，兒童儘管在解決問題的情境中，使用了特定的基模，而此基模也係因著整數詞所激發的，並不意味著兒童的所用的基模便可以被稱之爲「數概念」。舉例來說，在皮亞傑的大著《兒童的數概念》(Piaget, 1965) 一書便充斥著數的前置概念 (pre-concept) 的例子。事實上，皮亞傑對於數概念的擁有，也特別強調所謂運思顯著 (operationally significant) 的條件，以期能與數的前置概念有所區分。

一、本質

對數加以定義的例子有許多。例如，高斯 (1800/1929) 對於何謂「數」，就給了如下的一個界定：

> 數是一個指標，此指標是用來指示，爲了獲得一個與一被界定量相等的量起見，一個已知量（單位量），或是此單位的一個被等分割部份，所需被重複累積的次數；這個次數則被用來指示被界定量。

高斯的看法除了說明數是用來界定一量與

單位量間的關係外，特別的，則指出了界定的方法端視被界定量可否由單位量利用重複累積的方法得以複製而成。可惜的是，高斯在界定中利用「次數」來說明「數」，不免陷入循環界定的問題。此一循環界定的問題，究竟是否意指數爲不可分析的運作整體 (operatory whole, Piaget, 1965) ，則不得而知。所謂不可分析的整體，是指一整體雖由部份聯合構成，但因構成而形成的關係，雖在所構成的部份均已成形下，認知個體仍然無法獲得此一關係，因構成而形成的關係是一種質變的成果。易言之，雖有內容 (content) 的充斥，但仍未有形式 (form) 的獲得。

羅素 (1903) 則認爲：「由數學的觀點來看，數僅不過是相似的類所成的類。」換句話說，羅素主張，比如說， 3 是由 3 個桌子， 3 個人， 3 個椅子…等物件的類的抽象而得的。羅素的說法倍受皮亞傑的攻擊 (Piaget, 1965) 。皮亞傑經由對兒童的觀察指出，基數概念與序列概念是同時產生的。數概念一經成形，一方面是序列，另方面則同時爲類。數是由次序與類同時融合而成的東西。儘管如此，羅素所指的抽象，或是皮亞傑所指的融合，究指何物，仍然有得進一步探討。

Davydov (1982) 則指出：「數概念是指某量，及該量中用作測量單位的一部份，經由測量活動所建立的一組多重 (multiple) 的關係。」 Davydov 的主張基本上和高斯類似，其差別之處，在於 Davydov 強調高斯的次數是由測量活動的一個產品。與羅素的抽象相較之下，此抽象可能和 Davydov 的測量活動有關。皮亞傑的融合，可能即爲藉由測量活動所達成的，即在測量活動中融合了類與序列。如果這樣的猜測具有可能性的話，所謂的測量單位，或是高斯的單位量，或是羅素或皮亞傑之所以成類的標準，仍然無法視爲當然，有待進一步的說明。

認爲單位 (unit) 的概念在數概念中扮演重要的角色，由來已久。例如，歐基理德 (Euclid, 1926) 則說過：「所謂的單位是指存有而被稱爲一的事物，而數則是由單位所構成的多數。」當然，歐基理德的說法，並未脫離前面各家的主張－數是指由單位所構成的多數，或是單位量與被數界定的量間的多重關係。

事實上，有關單位觀點使用上，不僅限於單位量，連數的本身也被看成一個單位。例如，杜威 (1895) 認爲：「在簡單的辨認，比如，三個事物爲 3 的時候，必需包含下面的運思：將三件被辨認的事物當成一個連通的整體或是群－即，辨識出三個事物都是個別的，辨識出一個由三個個體所構成的全體單位。」把一個異於 1 的數看成一個新的單位是勢在必行的，因爲數常被當成事物進一步的加以運作，如數的運算等即爲實例。此外杜威的說法的貢獻－數與 1 間的部份全體關係，也是值得加以特別彰顯的。這種說法雖然在皮亞傑的論述中，亦有所提及，事實上在歐基理德的定義中的「構成」一詞即已蘊涵其中。易言之，數是由個別的 1 部份所構成的全體。必須說明的是，雖然 Davydov 提出了測量活動的背景；皮亞傑提出了所謂次序與類的融合；羅素提出了類的抽象；而且杜威也說明了數是理性的過程 (rational process) ；但究竟單位係指何物的抽象，仍未周全。

對於此點， Steffe 等人 (1983) 則認爲：「 1 是內蘊化的數數動作，而數則爲由集合 1 所構成的集聚單位 (composite unit) 。」數數動作事實上，則爲測量離散集合活動的必備條件。由此可見 Steffe 等人的意見，確與 Davydov 不謀而合。必需指出的是，除了數數的動作可抽象成 1 之外；依據杜威的說法，集合 1 以成爲集聚單位的過程必須也經過同樣的抽象－即如同歐基理德所說的，把 3 個 1 ，看成 1 個 3 的抽象活動。當然 Steffe 等人對數概念的界定，也引起了另一個問題一數數與數概念間的關係。

數數活動的功能在於確定一被測量的量與

測量單位量間的關係，即確定被測量量的數值。一般而言，多半研究者認爲早期整數概念的發展與數數活動間的關係非常密切 (Gelman & Gallistel, 1978; Piaget, 1965; Freudenthal, 1983; Steffe, *et al*, 1983)。從所謂成功的數數經驗的界定方面來看，Gelman 和 Gallistel 認爲必需滿足五個性質：(1) 一對一性質－即每一被計數物必需對應一個而且只能有一個數詞；(2) 穩定次序性質－即個別數詞在數數序列中出現的次序必需是穩定不變的；(3) 基數性質－即數數活動最後活動最後出現的數詞必需被指定成代表被計數集合的數值；(4) 抽象性質－物件所成的任何類均包含一可被計數的集合；(5) 次序無關性質－被計數集中的任意物件在被計數時的被使用次序與數數活動或是該被計數集的數值無關。而 Steffe 等人，則認爲數數活動包含了三個主要的活動：(1) 能口語地（或默默地）唸出一序列的標準數詞；(2) 能製作一群被計數單位（無論是感官的或其他）以進行計數；(3) 能將 (1)，(2) 兩項的活動連合在一起，使得一個數詞能與一個被計數單位加以對應。

值得注意的是，Steffe 等人的第二項成份，包含了 Gelman 和 Gallistel 的 (4) 和 (5) 兩項性質。按，說到一群單位所構成的集合，即先行假設對該集合進行了抽象，而且被計數物的使用次序也因抽象而失去了。這項說明與 Gelman 和 Gallistel 在其大作中的結論－「抽象性質的達成出現的很早 (1978, p.243)」－是相當一致的。Steffe 等人所主張的 (1) 項活動則與 Gelman 和 Gallistel 的穩定性質類似。其所不同的是 Steffe 等人指向必需具備的能力，而 Gelman 和 Gallistel 的 (1) 和 (3) 性質則指向該項能力的性質（此之所以原文 principle 譯成性質）。至於 Gelman 和 Gallistel 的性質 (3)，並未包含在 Steffe 等人的第 (3) 項中，此中之差異則在前者所強調的是「成功」；而後者，則強調所需進行的「同步」活動而已。

必需注意的是 Steffe 等人在第 (2) 項中對被計數單位的強調；此項強調與 Gelman 和 Gallistel 有所不同。在 Gelman 和 Gallistel 視被計數單位爲當然的情形下，Steffe 等人甚至以心理學上的成就層次對被計數單位進一步的區分爲：(1) 感官單位－指視覺的，聽覺的或是觸覺上的信號而言；(2) 圖像單位－指已見過的物件的心像而言；(3) 動作單位－指由具體動作所產生的信號而言；(4) 口語單位－指在計數時所產生的數詞信號，被用來計數；(5) 抽象單位－指 1 的抽象概念而言－等五種被計數單位。抽象單位是指不需再表現（甯自強，1993a) 即可被計數的單位而言的。

Steffe 等人在心理學上區分 1 的概念及其前置概念的說明，引致另一問題－數的概念與數的前置概念究竟如何區分？特別的，在杜威等人對一個數也強調必需是一個單位的情形下，此問題便特別值得探究。von Glasersfeld 氏 (1981) 對於此一問題，曾從注意力脈動 (attentional pulse) 模型觀點加以探討。對於物件的叢集概念，他作了如下的幾種區分：(1) 類 (plurality) －指一群無界的且共享特定性質的感官物件序列；(2) 集 (collection) －指具體有界的類；(3) 組 (lot) －指圖像的集類型；(4) 算術組 (arithmetic lot) －指由圖像單位構成的組；(5) 數－指抽象的算術組類型。von Glasersfeld 氏所作的區分是依據心理成就所作的；然而特需說明的是，von Glasersfeld 所描述的數的數值均未被確定；數值的確定需得通過數數的活動，這種模型下的數，即爲集聚單位。

單純的一個集聚單位只不過是由數數動作 1 所構成的新單位。探討學前的兒童數概念，只需說明是否具備集聚單位的性質便已足夠。但進入小學之後，明顯的由於記數系統的使用，單純的集聚單位概念已經不足說明低年級兒童的數概念本質。姑且不論現今在小學通用的印度－阿拉伯記數系統的文化史根據，記數

系統的系統化預先假設了數概念的系統化。易言之，記數系統的結構預設了數概念間的組織活動（甯自強， 1995 ）。

衆所周知，印－阿記數系統是十進的。易言之，在原本的數概念是以 1 爲單位的結構這種情形下，兒童若欲同化印－阿記數系統的結構，至少得多考慮另一個單位－「十」。甚且需能同時使用這兩個（或更多的）單位，來組織概念，並在使用的過程中不能混淆。有關以 1 爲單位的數概念研究，如前所述，研究頗多；然而，正同 Fuson (1992) 所招認的－截至目前爲止，涉及多單位的系統方面的研究，甚爲少見 (p.268) 。由於本文的中心議題並非多單位系統，不再進一步說明。

綜上所述，由心理學的觀點來看，數概念是由 1 概念的聯合再加以聚合而成的集聚單位；而 1 概念則由測量活動中的行爲，或是數數動作的內蘊化所得的。由於是內蘊化的成果，所以數必需是運作顯著的。數概念用在實際中，是單位量與被界定量的關係；此一關係多半發生在測量活動中，此一關係建立單位量部份與被界定量全體可重複累積的多重關係上。特別的，由於記數系統的使用，對數概念的本質探討尚需加入其結構方面的探索。由於幼兒尚在啓蒙階段，集聚單位可否重製的性質應是探索幼兒數概念結構上的主要問題。

二、幼兒階段的數概念類型

數概念類型的種類，在幼兒階段，可以分成兩類：數的前置概念與起始數概念（甯自強， 1997 ）。茲依其順序次第說明於後：

㈠數的前置概念

此一數概念類型的意義爲標準數詞序列上的一個位置，或是特定的空間圖型，並不具備約定俗成的「數概念」性質。用皮亞傑的眼鏡來看，此一類型的數概念無法成功的通過「數保留概念」(Piaget, 1965) 的檢測。從「位置」此一意義來看，舉例來說，給一個兒童 5 個花片，問她有多少？她數著「ㄧ、ㄦˋ、ㄙ ㄢ、ㄙˋ、ㄨˇ」，然後說『ㄨˇ』個。研究者進一步的問：「那麼『ㄨˇ』在那裡？」如果她指著最後一個花片說：「『ㄨˇ』在這裡。」此時，兒童的『ㄨˇ』的意義就是『第五』。這個『ㄨˇ』與『一』並無太大的分別，它是數數數到『ㄨˇ』停止時的最後一個整數詞。這個『ㄨˇ』並非指示一個有 5 個元素的群體。『ㄨˇ』不是基數也不是序數，是個『位置數』。從『特定的空間圖型』的意義來看，例如，給兒童一個骰子，並且要她找出骰子的那一個代表『ㄨˇ』。當她正確的尋出答案後，研究者可以進一步的詢問她是如何知道答案的。如果兒童亂數一通，則她的『ㄨˇ』事實上是一個『特定的空間圖型』。就如同前面所提的幼兒一般，她僅是能依據經驗來對現象作精細的區分 (subtizing; von Glasersfeld, 1982) 而已，她的『ㄨˇ』也不是約定成俗的整數概念『五』。

在處理有關數的合成、分解、比較及單位量轉換的問題上，具有此一類型的數概念的兒童，若不是不瞭解問題，就是只能在具體活動下才能解決問題。例如，求解 5 + 8 = ？，如果佈題時，先要他數出 5 個實物，再數出 8 個實物後，他先行將實物合併，再數出 13 作答案。必需注意的是，前面佈題的過程中，兒童給出正確答案時所解決的問題並不是 5 + 8 = ？而是一堆實物，有多少個的問題。兒童在此階段的解題活動，就是數數。他無法解眞正的數的合成、分解、比較等問題。僅具備數的前置概念的一些表現的實徵例證，請參考拙文（甯自強， 1997）。

㈡起始數概念

此一數概念類型的意義爲，與標準數詞序列中，一段由 1 開始的有限數詞序列，一一對應的一個以『一』爲元素的群體，或是集聚『一』所成的集聚單位 (composite unit, Steffe, *et al.*, 1983, 1988) ，而且此集聚單位的數值則爲有限數詞序列的最後一項。此種類型的數概念具備了約定成俗的正整數概念意

義。如果給兒童一堆花片並要求她找出『ㄨㄨ』個花片來，她不但能正確的取出所需的量，也能說明所謂的『ㄨㄨ』，是所取出花片的全體。不論情境所涉及的量的種類，兒童大多以『合起來』來描述她所參考的量。『ㄨㄨ』是 5 個 1 合起來的意思。當然，此一數概念類型可以通過皮亞傑的「數保留概念」檢測。

從起始數概念來看，整數詞『ㄨㄨ』指示的是一集聚單位量與單位 1 間的關係，而此關係是透過數數活動「一、ㄦ、ㄙㄢ、ㄙ、ㄨㄨ」來達成的。「一、ㄦ、ㄙㄢ、ㄙ、ㄨㄨ」是一序列的數 1 的活動，區分『ㄨㄨ』是第五和『ㄨㄨ』是五個一，無法僅用序列地數 1 活動加以分別：『合起來』這個動詞才是『ㄨㄨ』的前置概念與起始數概念兩種意義的主要分界點。將構成事物的元素合成爲一事物的能力或運思，稱之爲『合成運思』(uniting operations)，遠在兒童三歲以前便已經出現，此由兒童能自行建構物的恆有概念即可印證。運用合成運思於量的情境中以建構數的概念，則是兒童首次使用合成運思於與整數有關的情境中。合成運思將抽象的計數動作 (counting acts) 合成爲一集聚單位。由是，兒童具備了數保留概念。

具備起始數概念的兒童，在進行數的合成、分解時，能序列性的使用合成運思來進行解題活動。序列性的合成運思 (sequential uniting operations, Steffe *et. al*, 1988) 是指兒童依數詞指示的量依序全盤表現後，再進行量的分解與合成，並對分解或是合成的結果重新合成加以數值化。在這種運思時期，每一個數詞所代表的數都是獨立的。

序列性的合成運思應用在減法情境時，數數的活動都是由 1 開始。例如：解決 5 + 3 = ? 時，兒童先做出 8 的表徵量來，然後在 8 的表徵量中利用由 1 數起的方式做出 5 的表徵量，再把 5 的表徵量去除後，由 1 數起來確定剩餘的量的數值。

在處理比較的問題時，具備起始數概念的兒童，也同樣地使用序列性的合成運思，序列性的合成運思在應用在比較的情境中時，必需將所有的被比較量都表徵出來後，才能透過一對一的比較活動進行比較。由於比較多的多的部份事物可以透過對應後，未被對應過的事物的集聚來獲得，無需將較少的量內涵於較多的量中，所以兒童可以以序列性合成運思來解決『比較多，多多少？』的問題。然而，在處理『比較少，少多少？』的問題上，透過一對一的對應方法，兒童可以判斷何者較少，但是由於『少多少』必需將較少的量內嵌於較多的量中，才能決定；而此種內嵌所蘊涵的數與數間的關係，超出了序列性運思的功能。是故，兒童無法依據序列性運思來解決『少多少』的問題。特需注意的是，解決比較、合成、分解等類的問題，兒童只是序列地合成 1 成一集聚單位，或散開集聚單位成 1，合、分、比活動是作用在 1 的群體上，而不是在數上。所以兒童對兩數的比較，僅能比較出其中含 1 的多少，而不是兩數的大小。

僅具備起始數概念的兒童，在處理單位數起過 3 個以上的單位量轉換問題（甯自強，1994）會有困難。例如，4 排積木，每排 3 個，合起來會有幾個？如前所述，兒童對數的運作主要是透過合成運思的序列性使用。因此，在再表現 4 排 3 個積木時，若是情境中未曾供給具體物以被表徵時，兒童最多以雙手表現 2 排，再利用心像將第 3 排表現於外，無法掌握必須先被再表現後才能以計數的第 4 排。

方　法

教學晤談法 (teaching interview, Ning, 1992) 是用來蒐集兒童的數概念行爲資料的。當教學晤談法進行時，研究者首先向兒童提出問題並要求兒童加以解決；其次，研究者以兒童的表現的基礎提出進一步的問題，用以釐清

兒童的解題方式及相關的意圖。這種研究者與兒童間彼此溝通的互動，則持續至研究者提出其它問題或訪談時間終了爲止。教學晤談的全部過程均將予以錄影，作爲資料分析的資源。

教學晤談法其不同於臨床晤談法的主要之處在於，當研究者察覺兒童確實無法解決研究者提出的問題時，研究者會適當地協助兒童，以免兒童遭遇過的挫折，並在事後適當地剔除兒童在類似問題上的成功表現，除非研究者有充份的證據使其相信兒童在類似問題上的成功表現並非基於研究者的教學干擾。教學晤談法其不同於教學實驗法的主要之處在於，研究者的目的在於瞭解兒童解決問題的方式，而非在於瞭解操弄不同的情境變因後兒童的知識模型可能產生的變化。

基於本研究的目的爲蒐集兒童的對數詞所所賦予的意義類型以及類型的功能，教學晤談中使用的一組問題則是與數概念的功能有關的。此組問題爲由「數概念理論模型」所發展之關鍵性問題，對詳細內容有興趣的讀者，請自行參閱有關的研究報告（甯自強，1994），此處不再贅述。

1993 年上學期，嘉義縣一個勇類國小附近的農會設置的托兒所的小班幼兒涂景翰（7歲，男）被選出參與教學晤談，以瞭解其數概念。他前後共參加 5 次的訪談（每次 20 ~ 40 分鐘）。訪談過程中，研究者在不影響對其數概念類型的推估下，刻意的增減訪談的範圍；一方面減少參與者的挫折，另方面避免參與者覺得枯燥乏味。由於訪談的房間位在馬路旁邊，常有車輛經過，有時遂使訪談者或參與者記錄在錄影帶上的話語無法分辨。但一般來說，這些不可辨的資料，並未影響到對兒童的概念分析。

兒童在研究者的佈局下，對有關「數概念」問題的解題方法及其對「數詞」的闡釋。均被加以錄影，錄影所得的結果即形成 Ricoeur (1971) 所謂的「文本 (text)」，以供研究者作進一步的概念分析。儘管研究者個人的偏見影響，錄影所得的晤談過程無法標準化；然而，既經錄影存證，全部過程已成不可變動之「文本」，靜候經過一而再，再而三的重新檢視後，才能獲得的最具一致性的闡釋 (interpretation)。此最佳的闡釋即爲研究者所能獲得的兒童「數概念」模型；而模型，如前所特別指出的，是研究者經驗的抽象並且隨著新事例的出現逐步演化的。

每次教學晤談後，研究者將反省晤談過程並依據涂景翰的表現決定進一步的晤談問題以及晤談速度。過程的全部錄影首先全數轉登錄成原案 (protocols)。全部錄影記錄及其原案將用以分析，藉以歸納不同的「數概念」類型。分析的方法爲原案分析法 (protocol analysis)。研究者在以特殊的標籤標記特定兒童的「數概念」或是「數」基模類型時，除需彰顯該「數」基模的本質活動外，並需對該基模的功能以及限制加以說明。從事概念分析時，除了基於已有經驗所源生的假設必需和錄影記錄加以辯證外，利用重複的情節 (episodes) 以及交錯的 (triangulated)「證據」來去除研究者的成見以及對偶發事件的過度闡釋亦爲不可或缺的過程，概念分析的成果爲涂景翰的「數概念」類型。

涂景瀚的數概念

涂景瀚受訪時，由於體弱多病，所以全程他只參加了 5 次訪談。涂景瀚的數概念類型，可以歸結成起始數概念的啓蒙階段，雖然歷經兩個學期的資料蒐集，但他的改變不大；再表現是他的主要解題方式。他的數概念類型及其功能可由下文中的 8 個原案予以突顯。第 1 個是他通過數保留概念的例證。原案 2 至 5 是他在解決合成分解問題上的特色；原案 6 至 7 是在則爲單位量轉換問題。至於原案 8，則用來突顯研究者未低估他的概念類型。

一、數保留概念測驗上的成功

兩量的相等，可以透過一一對應，內容物沒有增多或減少來解釋說明。此爲皮亞傑對通過數概念保留測驗的說法 (1965)。然而，可以詢問的是，透過一對一指稱兩量的相等，而沒有數詞與之對應，究竟可否算是數概念？利用同一標籤標示時空不同的兩個群體，牽涉到「特定標籤」的選擇問題。此一選擇活動的實施，則爲計數活動。計數活動既爲確定數值的活動，同時也代表了「特定標籤」的類型。兩群事物原有同與不同，在能確立各自的內容的數值後，使用數值的相同加以說明，也是合理的成功方式。

1993 年 12 月 6 日　原案 1

1. 師：好，你看喔，你排出八個排一排
2. 生：排什麼？
3. 師：把八個排成一排（進行中，學生排的很緊密，老師排在學生之上，且排的很疏鬆）
4. 師：數一數，上面一排有幾個？
5. 生：一、二、……八（用手指一個一個點數餅乾）
6. 師：下面一排有幾個？
7. 生：一、二、……八（用手指一個一個點數餅乾）
8. 師：上面比較多還是下面比較多？
9. 生：一樣多
10. 師：一樣多，爲什麼？
11. 生：我的有八啊

師要求生表現出一列 8 個花片，生成功的完成了。刻意的，教師亦在生所排列的花片，排出相同的一列 8 個花片，但以不同的密度方式予以排列。爲了確定生了解上、下兩列的數量，師復要求生確定上下兩列花片的數值。當生均成功的計數並答以 8 個後，師詢問那一列較多。生認爲一樣多，因爲相較於師的花片，生亦「有」8 個，所以一樣。

判斷上下兩列的花片，孰者較多？生成功的回答一樣多。而其說辭則爲：「我的有 8 」。生的說明中的「 8 」應是指整列的 8 個花片而言，易言之，其數概念所指的是整個集合的事物。另一對立假設可能是 8 仍爲數詞序列上的一個位置，易言之，生的主張一樣多，是依據上下兩列的計數終點皆爲 8 而來的，而不是上下兩集合的基數 (cardinal) 相等。然而考慮在行 11 中，生使用的是「有 8 」，而非其他的說法，如「是 8 」，對立假設應予以推翻，因爲「有」的使用指向了內容，而「是」則指向了命名。雖然生所排的花片較爲緊密，所佔的空間較小，但其內容「有」 8 ，所以會一樣多。「 8 」顯然是與空間位置無關的。

原案 2 和 3 則是他在解決合成、分解問題上的表現類型。

二、利用再表現解求和數問題

所謂的再表現 (re-presenting) 是指將一概念透過具體事物加以表徵的活動。此一表徵活動的結果稱爲概念的表徵 (representations)。生在此地，利用再表現問題中的數概念成爲具體的花片量，從而解決問題。至於求和數問題，則爲求解 a + b = ？，確定？數值的問題。

1993 年 11 月 29 日　原案 2

1. 師：這裡有幾個？
2. 生：二個
3. 師：合起來有幾個？（兩堆都用手蓋住）
4. 生：五（眼睛）
5. 師：你怎麼知道的？
6. 生：我自己算的
7. 師：你怎麼算出來的？
8. 生：（一手伸出三個指頭，另一手拿出二個指頭，手指一根一根得折下去）一，二，三，四，五

師取出兩堆花片，各爲 3 個及 2 個後，將兩堆花片均用手蓋住，接著詢問合起來有幾個。生瞪視著一會兒，成功地解決了問題。師詢問如何得知正確答案，生使用雙手，用手指頭，各自再表現了 2 和 3 之後，重頭開始計數，而終止於 5 上。

生在行 4 中的瞪眼直視，應是在其心像中，再表現師所蓋住的花片，而后再逐一點數，而得出答案 5 。進一步的請生溝通如何求得結果，他用兩手的手指分別成功的再表現了 2 和 3 ，並使用表現出來的結果，進行點數確定數值。不論是心像或是自發性地使用手指再表現 2 、 3 ，均是逆溯整合運思的結果，而計數 5 則合成了數 5 。

三、利用再表現解求差數問題

所謂的求差數的問題，是指求解 a － b ＝？，確定？的數值問題。在原案 3 中，求差數的問題類型是自 a 中取走 b ，求剩餘的拿走型減法問題。

1993 年 11 月 29 日　原案 3

1. 師：（用布蓋住）這裡有幾個？
2. 生：七
3. 師：好，我拿出三個來，裡面剩幾個？
4. 生：七（看天花板，伸舌頭）…四。
5. 師：你是這樣做（左手伸出五根手指頭，右手伸出二根手指頭），七，然後怎樣？
6. 生：這二個就拿下來
7. 師：哪二個？你拿給我看
8. 生：（把左手的無名指和小指折下去）
9. 師：這五個呵？
10. 生：…？
11. 師：你是這樣算四個，是不是？（把左手的拇指，食指，中指折下去）好，很好，（把布掀開）看，對不對。
12. 生：（點頭）

師首先確定生知悉被布遮著的花片數有 7 個後，接著佈出拿走型減法問題 7 － 3 ＝？。生瞪視著天花板說 7 ，過後一會才給出答案 4 。由於前面的師生互動，師確定生在看天花板時必然是再表現 7 後，再進行解題活動，遂直接以自己的手指 (左 5 ，右 2) 再表現 7 ，並要求學生就手指表徵演示其解題活動。生以折下師的左手 2 指作爲其進行活動的說明。師一時無法體會其意，而以“ 5 ”作答。生默然以對。師再重伸 7 指 (左 5 ，右 2) 並曲下 3 指，詢問其實際作法，生同意師的表現方式。

師在行 11 的解題活動，僅被生同意與其相容，未必與生的作法相同。問題在於行 6 中，何以生以折下師的無名指與小指作爲其解題活動的說明。折下無名指與小指，左手剩 3 ，右手剩 2 ，此爲師在行 9 中，指出其爲“ 5 ”的主因。然而由師於行 11 中的自行演示，生亦同意，且於行 4 中給出成功的答數“ 4 ”，生在行 6 中的表現，則應與“ 4 ”或“ 3 ”有所相關。由於師的右手上仍剩 2 指，若將右手手指計入，則連同左手折下的 2 指，則應有“ 4 ”， 即此生的此一行動 ，意在說明“ 4 ”的由來。可能的對立假設是與“ 3 ”相關。以當時的情境，由於，無可與“ 3 ”連絡的其他情境因素，對立假設應當予以推翻。

其次，既爲拿走型的減法問題，照理來說，生應以折下 3 的方式，表現剩餘數量爲 4 ；即，類同師在行 11 中的表現。何以生反以折下 4 的方式，溝通其解題活動？倘使學生確以折下 4 餘 3 的方式來溝通其獲得 4 的結果，則生必能視 4 與 3 兩者皆爲 7 的子集，且能在不影響全體 7 的情形下，自行交換。易言之，生已具備部份—全體運思 (Steffe *et al.*, 1988) 。具備部份—全體運思，應能成功解決求加數問題下文 (原案 5) ，生的失敗，推翻此一假設。另一假設則是，生在行 6 中的

說明，則是計數 4 的部份活動。易言之，在計數右手的 2 指後，持續計數左手的 2 指，則可得到答案 4 。折下的動作是表示「數過」而已，也同時說明合成運思於合成 4 時的結果。倘使上述所作的闡釋屬於合宜，則生透過再表現的方式解求差數問題，應屬合理的推論。

四、解求減數問題上的挫敗

所謂的求減數問題是指形如 a － ? ＝ b ，求 ? 數值的問題。求減數問題未必須要使用「轉換求減數問題成求差數的問題」策略才能求解，事實上，在數目不大，仍可透過再表現的方式，使用序列性整合運思求解。

1994 年 5 月 16 日　原案 4

1. 師：眼睛閉起來（拿走一些花片，再用橘布蓋住），張開，原來有八個對不對，我拿了幾個出來，裡面剩下四個，我拿幾個出來？
2. 生：生：五個
3. 師：你怎麼算的？
4. 生：想的啊
5. 師：怎麼想，想一遍我看看
6. 生：本來八啊，你拿五個出來，就變成四啊
7. 師：拿拿看
8. 生：（將左手的前二指彎下，其餘八指張開，然後左手的後三指和右手的拇指同時彎下去，只剩右手的四指）四
9. 師：我拿走幾？
10. 生：五

師佈出「原來有 8 個，拿走一些以後，剩下 4 個，拿走幾個」的拿走型缺減數問題。生在行 2 及行 6 中答 5 個，師進一步的詢問後，生在行 8 中伸出 8 指，屈下 4 指，回答 4 ，然而卻在行 10 中又回到先前的錯誤答案 5 。

對於此一拿走型求減數的問題，生雖在行 8 中利用手指再表現，回答 4 ，然而這個 4 究竟是拿走的「 4 」，即爲問題的答案，亦或是剩下「 4 」個，原問題中的敘述。假設是答案，行 2 ，行 6 與行 10 ，可以推翻此一假設。易言之，生在行 8 中的「 4 」，應該是剩下「 4 」。而，「 5 」才是他眞正主張的答數。

令人覺得有趣的是， 5 從那裏來的？由師生共處的環境中並無其他的具體事物，可以支撐解答爲 5 。唯一的考慮則是 8 與 4 對兒童的意義。在起始數概念階段，如前所述，所謂的 8 ，是指由 1 開始至 8 的一段數詞序列；將 8 拿去一些，而得到由 1 開始至 4 的數詞序列，的一種作法則是，將由 1 至 8 數詞序列中的 5 至 8 部份給拿走，或者是將「由 5 至 8 的那些個」拿走。因而在無其它環境因素的支援下，生在行 2 中的 5 顯然是指 5 ，6 ， 7 ， 8 ，此段數詞序列。雖然在行 8 中，他透過用手指頭的再表現解題，但是，在行 10 ，他又堅持原本的 5 爲解答，兒童仍以數詞序列上的位置爲主要選擇而非對數詞序列上的元素加以計數。顯示出，數爲數詞序列上位置的涵義仍未汰盡，而對數詞的選用上，基數性質並未穩定。

五、解求加數問題上的挫敗

一般而言，形如 a － ? ＝ b 或 ? － a ＝ b 均被稱爲缺加數 (missing addend) 問題。必須說明的是，用在此處，求加數問題，則專指 a － ? ＝ b ，求 ? 數值的問題。而 ? － a ＝ b ，則稱之爲求被加數問題。這兩類問題，難度並不相同（甯自強， 1997) 。下面是涂景翰解求加數問題的挫敗紀錄。

1993 年 11 月 29 日　原案： 5

1. 師：這裡有幾個？（指透明杯）
2. 生：四
3. 師：我把這裡的（指藍布）放進去，這裡（指透明杯）就會變六個，那我這裡（指藍

布）放幾個？

4. 生：不知道

5. 師：如果我這裡（指透明杯）有四個，然後我把這裡面（指藍布）拿進去變五個，我這裡面（指藍布）有幾個？

6. 生：不知道

師向生佈出 4 ＋ ？＝ 6 ，求？數值的問題。生拒絕作答。師進一步的再佈出 4 ＋ ？＝ 5 ，求？數值的問題，生仍以不知道作答。

對生的不知道，可以有兩種假設。第一種假設，生不瞭解題意。第二種，生瞭解題意，但其手頭上缺乏可供解題的策略。不論是第一種假設或第二種假設情形，可以確定的是，生不具備解決求加數問題的基模，或是生雖具備是項基模，但是項基模僅能在具體活動下實施。

讀者或許奇怪於在原案 4 中，生已經可以解決求減數問題，何以在此無法解決求加數問題。細心的讀者應可以發現生在原案 4 中的表現，與生在此處的表現有近半年的時間差距。易言之，對「數」的經驗有所不同。然而，比較原案 4 ，我們在此可以主張，生的挫敗主要是源自於，生的數概念中，每個集聚單位都是各自獨立的。易言之，由於生無法以再表現的方式聯絡 4 與 6 （或 5 ），兩數間的關係，所以生無法解題。即便在原案 4 中，生可能能以再表現的方式一度解出正確的答案，但仍以數詞序列中的“ 5 ”作爲解答。易言之，在原案 4 中，兩數 8 ，與 4 的聯絡關係仍然是以 5 爲始的一段數詞序列，而不是數本身。在半年之前，生的數經驗更缺乏，當然更無法以數來聯絡 4 與 6 （或 5 ）間的關係。

六、利用再表現解決求積數問題

求積數的問題，是單位量轉換活動或是乘法運算中形如 a × b ＝ ？，求？數值的問題。下面的原案記錄了生如何解決 3 × 3 ＝？的問題。

1993 年 12 月 6 日　原案 6

1. 師：一個小朋友分三個，三個小朋友分幾個？

2. 生：（不說話）

3. 師：再講一遍喔，（把三個餅乾放到第一塊布上）這個小朋友分到幾個？

4. 生：三個

5. 師：（把三個餅乾放到第二塊布上）這個小朋友分到幾個？

6. 生：三個

7. 生：（把三個餅乾放到第三塊布上）這個小朋友分到幾個？

8. 生：三個

9. 師：他們三個小朋友把餅乾放一起，他們一共有幾個？

10. 生：（左右手的大拇指和食指同時折下去，其餘六指張開，再一指一指折下去）一、二……六（右手再同時伸出那三指，再一一折下去）七、八、九

11. 生：看看對不對

12. 生：一、二、……九（用手指一個一個點數餅乾）

師在行 1 中，直接佈出 3 × 3 ＝？的問題，生無言以對。由行 3 到行 9 ，師具體的演示了 3 × 3 ＝？的意義，生首先同時再表現兩個 3 ，將之合成爲 6 後，右手再次再表現 1 個 3 ，合成前面的 6 ，而成 9 。

由行 2 來看，生顯然並不瞭解 3 個 3 合起來的意思，經過具體的演示後，生以眼前的 3 個具體的 3 爲參考，透過 3 的再表現活動，遂步的求出解答。嚴格的來說，生無法以再表現的方式，表現 3 個 3 ，而予以合成，只能在具體物的支持下，進行求積數的活動。被再表現的是 3 ，而非 3 個 3 。

七、透過逐一分配的具體活動解決等分除問題

所謂的等分除問題，是將一定數量的事物，平均分至一定數量的地點，求取每一地點分得多少事物的問題。相對於等分除問題的是包含除問題，是將一定數量的事物，依每地點一定數量的方式分配，求可分至多少地點的問題。下面是生透過具體活動的實施，解決等分除問題的實例。

1993 年 12 月 6 日　原案 7

1. 師：十二個，好，把十二個放在你前面，這是你的餅乾，對不對，要分給一個小朋友，二個小朋友，三個小朋友（分別指三塊布）你要分餅乾給他們
2. 生：一個人分幾個？
3. 師：要分完而且分得很公平
4. 生：（一次放一個到一塊布上，一直到分完）
5. 師：一個小朋友分幾個？
6. 生：一、二、三、四（拿其中一份一一點數）
7. 師：每人分四個，對不對？
8. 生：（點頭）

師首先指出問題是將 12 餅乾分給 3 個人。生詢問一個人分幾個，問題詮釋成包含除問題。師在行 3 ，持續將問題佈成等分除問題。生以一輪各分 1 個的方式，進行了 4 次，將 12 個餅乾全部分完。師要求生確定每個人分得的數量，生透過數數活動，確定一人得 4 個。

師事實上並未佈出等分除除法問題，更精確的說，師將等分除問題分成兩段問題：先進行等分活動後確定等分結果的數值。儘管如此，生仍運用逐一分配 (allocating) 的方式成功地具體進行等分活動。等分 12 成 3 份的問題，要求了學生製造不定數值的 3 個等值單位；師在行 1 中提供了三條方布，對生而言則爲提供了 3 個具體的容器， 12 個餅乾則成爲可置入容器的被容納物。爲了保證 3 個容器的容納物能夠一樣多，生以一輪各 1 的方式逐輪分配，直至窮盡 12 個餅乾爲止。由是，等分 12 成 3 份的問題，對生而言，至少可以以具體活動的方式進行解題；其解題方式，爲將數 12 逆溯成 12 個 1 後，具體地將 12 個 1 以一輪各 1 的逐步均分方式，窮盡整個 12 。因而，對於將 12 平分給 3 的問題，生具體的實施了逐一分配的方式，直到最後將獲得集聚單位重新計數，完成答案。

八、假的「往上數」活動

所謂的往上數 (counting up) ，是指兒童以某一個數詞序列上的位置，例如 9 的下一個位置，即 10 ， 開始計數 ， 例 3 ，成 10 ， 11 ， 12 。即爲由 9 往上數 3 ，到達 12 。在兒童的具體表現則爲 9 ， 10 ， 11 ， 12 。9 的時候頓一下，表示開始前的一個位置， 10 即 1 ， 11 即 2 ， 12 即 3 。此時數過的數詞序列可以再數。

1994 年 5 月 16 日　原案 8

1. 師：那裡有八個對不對，我把這五個放進去，會有幾個？
2. 生：（同時伸出五個手指，再一一彎下去）十三個
3. 師：十三個，你在幹麼？你在做什麼事？（伸出五個手指，再一一彎下去）唸一遍
4. 生：在算啊
5. 師：你怎麼算，算一次，我看看
6. 生：（不說話）
7. 師：你剛才算的，對不對，你這隻（指大拇指）彎下來的時候，你嘴巴在唸什麼，在說什麼？
8. 生：在唸啊
9. 師：在唸什麼？唸給我聽

10. 生：九
11. 師：（彎下大拇指）再來
12. 生：十
13. 師：（彎下食指）十
14. 生：十一
15. 師：（彎下中指）十一
16. 生：十二
17. 師：（彎下無名指）十二
18. 生：十三
19. 師：（彎下小指）十三，哦，你是這樣唸的啊，（掀開橋布）這裡有幾個？

師向生佈出 8 + 5 = ? 的追加型問題。生同時伸出 5 指，再逐一屈下後，回答 13 。師要求生解說如何解題。由行 8 至行 18 ，可以看出，生由 9 數至 13 。

表面上看來，生似乎使用了往上數的策略解題，因爲由行 8 至行 18 中，生僅使用由 9 至 13 的數詞序列。然而仔細思考生在行 2 中的表現，生利用往上數的策略解題此一假設，則被推翻。事實上，生先再表現 5 後，接著計數再表現所得的 5 個手指，而得到 9 至 13 的數詞序列，並非一邊再表現 5 ，一邊由 9 往上數。由是，生的解題活動並非眞正的往上數。基於此一例證，假設生的數概念爲起始數概念，而非進一步的「內嵌數」概念（甯自強， 1994) ，並未低估學生的能力。順便一提的是往上數是「內嵌數」概念的重要指標。雖然，生並未使用往上數的策略，但生將原須再表現 8 的活動，加以精簡 (curtail) ，仍是生的重要成就；因爲原本被加數 8 是必須被再表現的（參考原案 2 ， 3)。

總之，利用數保留概念的測試（原案 1) 假的「往上數」活動的例證（原案 8) 與涂景瀚的數概念類型被假設成起始數概念類型的啓蒙階段。由原案 2 至原案 7 ，可以觀察到「再表現」是他用來解決加減問題的主要方式。然而，兩數間的聯絡若無法透過再表現的手段進行的話，產生錯誤的可能性即會增大。特別的，在單位量的轉換部份，他確能具體進行單位量轉換及等分除的解題活動。

反　思

雖然有關涂景翰的數概念的原案仍然籠罩在數概念類型模型的解釋威力下，不可諱言的是，本文中並未提供其在比較問題部份的解題活動類型。未能提供的主因在提供於蒐集資料時間過短，未曾留下他解相關問題的記錄。蒐集更多兒童的反應資料以及將訪談問題全面性的擴充至包含比較型問題，藉以修正數概念類型模型，仍有待進一步的努力。

誌　謝

本研究部份蒙國科會專題計畫補助，計畫編號 NSC84-2511-S-023-005 ，特誌申謝；文中論點純屬作者個人意見，不代表國科會立場。

參考文獻

1. 甯自強（ 1993a ）：**經驗、察覺、及瞭解在課程中的意義～由根本建構主義的觀點來看～**。論文發表於國小數理科教育學術研討會。台東市：國立台東師範學院六月五日。
2. 甯自強（ 1993b ）：「建構式教學法」的教學觀～由根本建構主義的觀點來看～。**國教學報， 5 ，** 33-41 。
3. 甯自強（ 1993c ）：**國小低年級兒童數概念發展研究 (I) —「數概念」類型研究 (I)** ，國科會專題研究，編號： NSC 82-0111-S-023-001 。
4. 甯自強（ 1994 ）：**國小低年級兒童數概念發展研究 (I) —「數概念」類型研究 (II)** ，國科會專題研究，編號： NSC 83-0111-S-023-001 A 。
5. 甯自強（ 1995 ）：**五個區分對數與計算教材設計的影響**。論文發表於 84 年師院教授座談會。台北縣：板橋國民學校教師研習會二月十六日。

6. 甯自強（1997）：劉裕誠的數概念。載於國立嘉義師範學院主編：**1997 海峽兩岸幼兒教育學術研討會論文集** (pp.167-185)。嘉義民雄：國立嘉義師範學院。
7. Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: LEA.
8. Euclid (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements*. (T. L. Heath trans. and ed.) Cambridge, England: The University Press.
9. Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.
10. Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. pp. 243-275. New York, NY: Macmillan Pub. Co..
11. Gauss, C. F. (1800/1929). *Zur Metaphysik der Mathematik*. Werke, **12**, pp. 57-61. Berlin: Springer Verlag.
12. Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
13. McLellan, J. & Dewey, J. (1895). *The psychology of number*. New York: D. Appleton & Co.
14. Ning, T.C. (1992). *Children's meanings of fractional number words*. Unpublished doctoral dissertation. The University of Georgia, Athens, GA.
15. Piaget, J. (1965). *The child's conception of number*. New York: W. W. Norton.
16. Ricoeur, P. (1971). The model of the text: Meaningful action considered as a text. *Social Research*, **38**(3), 529-562.
17. Russel, B. (1903). *Principles of mathematics*. New York: W. W. Norton.
18. Steffe, L. P., Cobb, P., & von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer Verlag.
19. Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and applications*. New York: Praeger Scientific.
20. von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Washington, D. C.: The Falmer Press.
21. von Glasersfeld, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, **12**(3), 83-94.
22. von Glasersfeld, E. (1982). Subtizing: The role of figurative patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie*, **50**, 191-218.

Chin-Han's Meanings of Number Words

Tzyh-Chiang Ning

Department of Mathematics Education, National Taichung Teachers College, Taichung, Taiwan

Abstract

Radical constructivism and Piagetian's scheme theory were used as epistemological and psychological assumptions to conceptualize this study. Using this conception, the author hypothesized that number concepts are composite units. The meanings of number words used by kindergarten pupils were classified into two levels: (1) preconception of number and (2) initial number concept. Semi-structured teaching protocols were used to interview children and to collect data on their ideas about numbers. Chin-Han's reactions to solving number problems were gathered and the conceptual analysis of his meanings of number words are reported in this case study. The results revealed that Chin-Han was at the stage of initial number concept.

Key words: Number Concepts, Teaching Interview, Kintergarten.