科學教育學刊
2000, 第八卷第三期, 215-224

Chines Journal Science Education
2000, 8(3), 215-224

《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點[1]

洪萬生
台灣師範大學數學系

(投稿日期：民國 89 年 6 月 29 日，接受日期：民國 89 年 8 月 1 日)

摘要：本文採取 HPM 觀點，針對十九世紀韓國數學著作《無異解》進行初步的探討。在此一數學文本中，作者南秉吉從清代中國出版的《測圓海鏡》與《益古演段》中，摘錄了七題與其解法，並且附上了《四庫全書》的編者之『（館）案』以及李銳的『銳案』，然後，再添加他自己的『愚案』。由於這三案的對比，反映了十九世紀中、韓兩國數學家，面對西方代數『借根方』的所表現的不同調適與認知，儘管他們都『活』在中國傳統代數『天元術』的脈絡之中。因此，本文之作，意在為教、學初等代數的師生，提供一點歷史的參考與借鑑。

關鍵詞：數學史、HPM、天元術、借根方。

前　言

《無異解》(1855) 是韓國十九世紀數學家南秉吉 (1820-1869) 的數學著作之一，其內容涉及中國清朝數學家李銳 (1768-1817) 之算校《測圓海鏡》(1248) 與《益古演段》(1259)（南秉吉，1855）。後者是十三世紀中國數學的兩部經典作品，作者都是金元數學家李冶 (1192-1279)（孔國平，1988，1996）。由於它們在十八世紀末被乾嘉學派從《四庫全書》收錄發現時，李冶在《測圓海鏡》一書中所集大成的『天元術』，迅即被推舉為『興復古學、昌明中法』的利器（洪萬生，1993），所以，李銳奉命校勘時，就十分嚴肅地檢討『館案』。事實上，李銳對四庫館員以《數理精蘊》中的『借根方法』來註解『天元術』之方式深不以為然，於是，他另外再提出『銳案』，以作為『訂正』或『補充』（鄭鳳凰，1996，pp. 57-83）。

不過，南秉吉研讀這些著作時，卻又在『銳案』上再加上他自己的『愚案』。因此，在《無異解》這本書中，我們發現南秉吉針對他所摘錄的《測圓海鏡》、《益古演段》二書問題及其解法時，就並列了三種案語，分別是『（館）案』、『銳案』與『愚案』。這種對比，堪稱是數學文化交流的一個極為有趣歷史個案。當『借根方』這種西方代數的列方程式的方法，通過《數理精蘊》一書於十八世紀初傳入中國時，梅□成有幸供奉內廷得以接觸失傳已久的《測圓海鏡》，發現其中的『天元術』這種中國傳

統的列方程式的方法，與『借根方』『名異而實同』（洪萬生，1999a，2000；Tian, 1999），其後，『天元術』vs.『借根方』就一直是十八、十九世紀中國數學社群的議論焦點，尤其乾嘉時代形成的的『中法派』與『西法派』，更是這種爭議強度的標誌（洪萬生，1993）。此外，從『數學史與數學教育的關聯』(Relations between History and Pedagogy of Mathematics, HPM) 之觀點來看（洪萬生，1998），這三案的意義也極為有趣，因為它們充分地顯示：十九世紀中葉韓國人在他們自己的數學文化脈絡中，對於『天元術』vs.『借根方』所做的一種認知與理解。這種歷史經驗，對於今天教、學初等代數的師生而言，是頗有參照作用的，值得我們珍惜！

因此，在本文中，我們將對《無異解》進行一個初步的考察，重點將擺在南秉吉的「愚案」所呈現的教學意義上。至於此一數學文本的社會文化之脈絡意義，希望將來深入瞭解韓國數學史之後，再作進一步的探索。

南秉吉生平事蹟略述

南秉吉 (1820-1869)，字元裳，號六一齋，晚香齋，亦名相吉，朝鮮王朝時曾任『顯職』(金容雲，1985c，p. 4)。他的哥哥南秉哲 (1817-1863)，曾擔任吏曹判書兼大提學。兄弟倆儘管身為士大夫，但都喜愛數學研究，堪稱是朝鮮末期的傑出數學家（金容雲，1985b，pp. 1-3）。南秉吉的《無異解》甚至於被史家推許為韓國數學史上的第一篇數學論文（金容雲，1985c，p. 4）。

南秉吉不僅數學著述頗豐，在天文學方面也有《中星新表》、《太陽更漏表》、《春秋日食考》、《星鏡》、《推步捷解》與《時憲紀要》等著作（金容雲，1985b，p. 4）。在此，我們只略論他的算學著述。他在這一方面的著作計有《量度儀圖說》、《測量圖解》、《勾股述要圖解》、《算學正義》《九章術解》、《緝古演段》、《玉鏡細草詳解》與《無異解》（金容雲，1985c，p. 4）。瀏覽這些著作的內容，我們很難抗拒一個印象，那就是：它們都以中國十九世紀初問世的數學著作作為註『解』的對象。儘管如此，南秉吉所添加的論述，仍然具有認識論上的價值。譬如說吧，上述提及的《緝古演段》，就是南秉吉以『借根方法』解唐王孝通《緝古算經》算題。即以本文專論的《無異解》為例，我們也可印證南秉吉所採取的偏向『借根方』的立場，是以上述這些『解』作支撐的。

其實，南秉吉對於李銳及其中法『依歸』阮元之算學研究，是迭有批評的。譬如，在《勾股述要圖解》序文中，他就指出：『顧劉氏（徽）之以若精詣，無愧算學名家，而阮芸臺（元）《疇人傳》蒐羅頗富，未見採入，何哉？』（金容雲，1985c，pp. 3-4）此外，他在咸豐十一年 (1861) 年為兄長秉哲《海鏡細艸》撰寫序文時，也呼應了他在《無異解》(1855) 中對李銳的批評：

> 元和李尚之（銳）算學名家，而其校勘（《測圓海鏡》），不過依術布算，定其算式，且斤斤於立天元一與借根方之異同，而至若互通立算之肯綮，蓋未及焉，豈有所未遑而然耶？（金容雲，1985b，p. 4）

同樣的評論，我們也可徵之於南秉吉徒弟李俊養為《無異解》所寫的跋文：

> 元和李氏既擅是學，又得阮芸臺為之依歸，則其於本法，宜無不解，而第其立論，似涉鑿柄。由是觀之，數之為術，豈可易言哉！今公是書，寔補李氏之所不及，則探微鉤深，顧不偉與！（金容雲，1985c，p. 249）

至於南秉吉又是如何得以參與這場『天元

術』vs.『借根方』的爭議呢？首先，十八、九世紀的韓國士大夫對於清朝數學文本，應該是垂手可得。根據南秉吉的說法，『康熙中，何國柱來留賓館，時有劉生壽錫，與之論算』（金容雲，1985c，p. 4）。再者，韓國朝鮮朝中也有『中人算學者』之職，專司算學翻譯（金容雲，1985c，p. 4）。根據韓國數學史家金容雲的說明，南秉吉就曾與『中人算學者』李尚𤦲共同研究。其實，中韓數學交流的另一段佳話，乃是失傳五百餘年的《算學啟蒙》（1299，元朝朱世傑著）之韓國刻本，於 1839 年重見於北京琉璃廠（洪萬生，1993）。

另一方面，南秉吉撰寫《無異解》時，也正是中國清朝在鴉片戰爭之後「西法派」捲土重來，又主導了算學研究的旨趣（洪萬生，1993）。這種時間上的巧合，究竟反映了宗主國—藩屬國之間學術互動的哪種風貌，值得進一步的研究。

《無異解》內容簡介

南秉吉撰《無異解》的主要目的，可以徵之於他的〈無異解序〉：

> 古立天元一術，即今之借根方法也。嘉慶間元和李銳算校《測圓海鏡》、《益古演段》，其按云：借根方出於立天元術，其加減乘除並同，惟此相消法與借根方兩邊加減則有異，此說甚惑矣！（金容雲，1985c，p. 193）

其實，他認為：

> 夫相消法文簡而不言肯綮，加減法論詳而明辨條理。縱有詳約，理則一貫也。（金容雲，1985c，p. 194）

既然如此，他『於《益古演段》及《測圓海鏡》遂卞李銳不同之案，名曰無異解。』（金容雲，1985c，p. 194）

《無異解》先是收錄《益古演段》四問，然後是《測圓海鏡》三問。全書體例悉按中國傳統數學著述體例，亦即是『問題』、『答曰』與『法曰』（或『草曰』）。在本書的『法曰』（或『草曰』）中，只要有『按』語，通常會緊隨著『銳按』，最後南秉吉再追加上『愚案』。問題是：何以南秉吉選擇這七題來凸顯他對比『天元術』與『借根方』的看法？在回答此一問題之前，我們不妨先考察南秉吉所收錄的七個問題：

1. 今有方田一段，內有圓池水占之，外計地一十三畝七分半，並不記內圓外方。只云從外田楞至內池楞四邊，各二十步。問內圓外方各幾何？（金容雲，1985c，p. 195）
2. 今有方田一段，內有圓池水占之，外計地一千三百五十七步。只云外方面不及內池周一十四步，問方圓各多少？（金容雲，1985c，p. 205）
3. 又有圓田一段，中有方池水占之，外有田五十步。只云方池一尖抵圓邊，其一尖至圓邊三步，問圓徑方面各若干？（金容雲，1985c，pp. 208-209）
4. 今直田一段，中心有圓池水占之，外計地四畝一十三步。只云外田長平和得七十六步太半步，從田四角去池楞，各十八步，問外田水池徑各多少？（金容雲，1985c，p.215）

以上四題分別摘自《益古演段》第一問（郭書春，1993，p.875）、第七問（郭書春，1993，p. 882）、第十一問的第二題（郭書春，1993，p. 887）與第四十問（郭書春，1993，p. 912）。其中各問的『依條段求之』中都附有『義曰』，它的內容都是針對『條段圖』提供局部或全面性的文字說明（孔國平，1988，pp. 92-138；李秀卿，1997，pp. 7-47），但是，在《無異解》中都被刪除，而代之以『借根方解法』。至於另外三題：

5.或問出西門南行四百八十步有術，出北門東行兩百步見之，問徑。（金容雲，1985c，p. 222）

6.或問乙出南門直行一百三十五步而止，甲出西門南行四百八十步，望乙與城參相直，問答同前。（金容雲，1985c，p. 236）

7.或問甲乙二人同出西門，向南行至西南十字道口分路，乙折東行一百九十二步而立，甲又南行。甲通行四百八十步，望乙與城參相直，問答同前。（金容雲，1985c，pp. 241-242）

則分別摘自《測圓海鏡》卷二第十五問（郭書春，1993，p. 767），與卷三第十問（郭書春，1993，p. 774）、第十一問（郭書春，1993，p. 775）。其中『館案』與『銳案』並未悉錄，此外，在《無異解》中，南秉吉也都補入了『借根方解法』。

根據這些背景資料，我們可以仔細地比較這七個問題出現在《無異解》與《益古演段》、《測圓海鏡》中的內容。其實，南秉吉所以選擇這七題，全都是『銳案』重要與否的緣故。譬如，針對上述第一問的『法曰』，在『銳案』中，李銳就特別說明了『天元術』的列式法及其與『借根方』的比較。如此一來，南秉吉當然就有了『卞之』的機會。不過，在這兩部李冶的著作中，也有李銳並未提供『銳案』的例子，譬如上述第二問就是。當然，或許此問未獲『館案』青睞，所以，李銳也就懶得提供『對話』了。然而，南秉吉卻抓到此一良機，大唱『獨腳戲』：

> 愚案：相消所得之實，為寄左數與後數相併之數，則乃兩邊各加之法也。豈得謂之減餘耶？此問雖無銳案，有足以發明無異之證，故引而卞之耳。（金容雲，1985c，pp. 206-207）

無論如何，李銳也好，南秉吉也好，他們在『天元術』vs.『借根方』的脈絡中，都各自找到『對話』的目標，前者針對『館案』，後者則是針對『銳案』，都為中外數學交流史上的『爭議』(controversy) 事件，留下極有意義的例證。

此外，《無異解》的內容還有一個值得注意的面向，那就是南秉吉對於借根方法的重視。正如上述，南秉吉在這七個問題各自『法曰』或『草曰』的最後一段，總會提供一個『借根方解法』，這也再一次地說明了他撰寫《無異解》的主要動機，就是與堅守『天元術』的李銳進行對話。

『館案』、『銳案』與『愚案』

現在，讓我們詳盡地比較《無異解》中這三案。針對第一題的『法曰』原文：

> 立天元一為內池徑，加倍至步，得○太。（金容雲，1985c，p. 195）

『館案』明顯地使用了『借根方』的用語，而且言簡意賅：『太即真數，此即四十步併一池徑。』（金容雲，1985c，p. 195）『銳案』則長篇累牘，請看以下轉述：

> 凡算式真積曰太極，旁記太字。虛數曰天元，旁記元字。太之下一層為元，元之下一層為自乘冪。記太字，則不記元字。記元字，則不記太字。其太元俱不記者，則以上方一層為太也。上中下三層，從戴而刻，每層部位，皆上下相當。步之左為十百千萬，步之右為分釐豪絲。式下注有步字者，便以所注之位為步，其上下層與此相當與此步字相當之位，亦為步也。其不注者，則以右方尾位為步，若上下層尾位不正相當，則以偏在左方一層之尾位

> 為步，其上下層與此尾位相當之位亦為步也。然算式有誤，並依法算定改正。（金容雲，1985c，pp. 195-197）

顯然，在此李銳花了許多篇幅說明天元術的列式方法，其中下半部尤其著重在籌算數碼中含小數部份之表徵（孔國平，1988，pp. 70-73）。關於後半部說明，南秉吉可以說毫無興趣，他只是淡淡地以『借根方』解讀的態度在『愚案』中說：『太，即真數也。元，即根也。元自乘冪，即平方也。』（金容雲，1985c，p. 197）

其實，正如上文所述，南秉吉真正感興趣的，是與李銳論辯天元術中的『相消』與『借根方』中的『加減』。至於原來李銳對天元術的堅持，當然是針對『館案』中的『借根方』。譬如，針對本題李冶『法曰』的『與左相消』之『館案』說法：

> 相消者，兩邊同減一千六百步，後凡言相消者，皆兩邊加減一數也。（金容雲，1985c，p. 199）

李銳就直陳：

> 此案非也！蓋西人借根方即古立天元一。而借根方兩邊加減，與立天元一相消，其法迥殊。加減法如案所云，若相消法，則但以寄左數減後數，或以後數減寄左數，故曰相消也。（金容雲，1985c，p. 199）

然而，南秉吉卻大大地不以為然，他說：『兩邊加減法與相消法，本無二致！特語有詳略耳。說詳見下。』（金容雲，1985c，pp.199-200）於是，他針對相當於 $1700-80x-0.25x^2=0$ 籌算式之後的『館案』與『銳案』之後，進一步提出他的論辯。

然則何謂『館案』與『銳案』？先是『館案』：『此即一千七百步與八十池徑、二分半平方等。』（金容雲，1985c，p. 201）接著是『銳案』：

> 兩邊加減法，既加減後仍分兩邊，故案云步與池徑平方等。若相消之後，則止有減餘，更不得云彼與此等矣。又借根方諸數用多少為記，其不言多少者亦為多。多即正，少即負。案不言多少，是步與池徑平方並為多也。若相消法以寄左數減後數，則得此實正、從負、隅負，或以後數減寄左數，則正負與此互相易所得，為實負、從正、隅正，或實或從、隅，與加減所得，每相反也。（金容雲，1985c，pp. 201-202）

正因為如此，所以，南秉吉才會進一步提出他的『愚案』：

> 凡寄左數與後數，原是等數，故相消與加減之後，皆為開方式也。相消法使實、從廉、隅，務歸一行，而不辨肯綮。加減法使真數與根、方數，仍分兩邊，而昭晰其法理。縱有詳略之不同，若以一行分之，則為兩邊，而彼此相等。以兩邊併之，則為一行，而正負相當。此即一而二，而二而一也。以等減等，所餘必等，何可謂止有減餘，更不得云彼與此等耶？（金容雲，1985c，pp. 202-203）

事實上，從等價的觀點來看，南秉吉也發現：

> 蓋天元一之實、從、隅，即借根方之真數、根、平方，而正為多，負為少也。多少之全變，便是不變，故相消法之負從、負隅，為加減法之多根、多平方。至於實數歸之一行而為正者，分為兩邊，則為負。『方程篇』所謂此多則彼少，彼多則此少是也。由此觀之，豈論相反乎？夫相消法之一行，實、法為異

> 名而開方者，分為兩邊，則兩數為相等而開方，此二法無異，庶可渙然也。（金容雲，1985c，pp. 203-204）

可見，南秉吉充分地掌握了以『借根方法』列式中的『相等』之意義，也因此，他認為李銳所在乎的相消到等號的左邊或右邊之各項係數之互反，可以說完全沒有意義！

讓我們再看一個例子。在上引第四問的『法曰』中，針對李冶的列式與求解，李銳注解說：

> 此開方除，以實為正，從為負，益隅亦是負也。蓋惟用相消法，故所得正負如此。若兩邊加減，則三者並為多號矣。相消與加減法不同，此其明證也。（金容雲，1985c，p. 218）

眼看『銳案』如此鍥而不捨，南秉吉只好再次強調說：

> 相消所得之正負也非別法，即與兩邊加減所得之三者，並為多號相同矣。已詳見上，故不綴陳耳。（金容雲，1985c，pp. 218-219）

以上是我們針對《無異解》中的前四問中的三案所做的討論。正如上文所述，這四問出自《益古演段》。不過，李銳校對此書之時間卻在校《測圓海鏡》之後（嚴敦傑，1993）。所以，在《測圓海鏡》的『銳案』中，有一些註解甚至於寫得遠較《益古演段》一書來得不憚其煩，看來也就可以理解了。譬如說吧，在上述第五問的『草曰』之後，李銳的第一個註解，就有將近三頁的篇幅，其中他極詳盡地介紹天元術的『逐層佈算之法』（含天元及其運算法則）。或許南秉吉認為此一『銳案』至關重要，所以，在它的每一句話之後，南秉吉幾乎都補綴了『句註』。譬如，李銳指出逐層佈算之法是『以虛數為天元，旁紀元字，真數為太極，旁記太字。元下必太，太上必元，故有元字，不記太字，有太字不記元字。元上一層，則源自乘數。』（金容雲，1985c，p. 224）而南秉吉則註以：

> 即平方也。此以下皆以借根方之加減乘除，分類句註，以證無異也。（金容雲，1985c，p. 224）

顯然，他是想就最基本的運算法則之規約，來證明『借根方』與『天元術』之『無異也』。

另一方面，針對本問『草曰』的最後一段，亦即相消得一開方式及其求解，李銳也提供了一個長達兩頁半的『銳案』。在對比『愚案』之前，請先看以下引述的『銳案』：

> 相消即相減，方程所謂直除是也。可以又數減寄左數，亦可以寄左數減又數，故曰相消也。凡相消所得算式有誤，並如法算正。今歐羅巴所傳借根方，出於天元術，其加減乘除之法併同，惟此相消法與借根方兩邊加減則有異。蓋相消止用減兩邊，加減則兼用加。二法相課，雖得數適同，而正負互異。（金容雲，1985c，pp. 229-230）

如以此問為例，則：

> 以又數減寄左數，得下層實正、中層從負、上層隅負，而以兩邊加減命之，則步數、根數、平方數皆為多號，多即正，少即負，是實數同為正，而從、隅之正、負相反。若以寄左數減又數，則得實負、從正、隅正，是從、隅同為正，而實數之正負相反。（金容雲，1985c，p. 230）

『總而論之』，

> 加減所得之實必是多號，而相減所得之實，亦有負算。相消而得負實者，則從、廉、隅之正負與加減所得合；相消而得正實者，則從、廉、隅之正負與加減所得，必相反也。（金容雲，1985c，pp. 230-231）

可見，李銳儘管同意這兩種方法運用之後，

『得數適同』，他還是在『正負互異』上糾纏不休。我們且看南秉吉怎麼解讀『銳案』：

> 相消而得負實者，則從、廉、隅之正負，與加減所得合。相消而得正實者，則從、廉、隅之正負，與加減所得必相反者，此由於一行與兩邊之故也。何者？蓋兩邊之一邊實數，與一邊根、方數相等者，以實數歸於根、方之行為一行，故從、廉、隅之正負自如，而正實變為負實也。若以根、方歸於實數之行為一行，則正實自如，而從、廉、隅之正負相反，良有以也。（金容雲，1985c，pp. 234-235）

此外，南秉吉也針對『銳案』中的吹毛求疵提出批評。譬如，在上述第六問的『草曰』最後求解方程時，『館案』將相當於天元方程的 $x^4-960x^3+100800x^2=0$ 解釋為：

> 此草得數九百六十立方，少一三乘方，與十萬零八百平方等。（金容雲，1985c，p. 238）

李銳卻批評說：

> 九百六十益從，負也，而此反以為多。一步常法正也，而此反以為少。蓋誤以兩邊加減法命之耳。說見前卷，後凡如此者並同。（金容雲，1985c，pp. 238-239）

不過，南秉吉則不以為然，他指出：

> 凡平方、從、隅之異名者，從正、隅負，則商得之數，必小於從。從負、隅正，則商得之數，必大於從。此為初商之津梁矣。本草圖式偶誤，原案所云正負，誠是也。而銳但以兩邊加減法斥之，誤也。（金容雲，1985c，p. 239）

儘管如此，南秉吉並不全盤抹煞『銳案』。譬如在最後一問（即第七問）中，相消得相當於 $-147456x+17694720=0$ 的一次方程。『館案』以為這是『相消法』中的『變例』，李銳反駁說：『得兩邊數者，加減之法也。得一邊數者，相消之法也，校書者惟知借根方法，故反以得一邊數者為變法耳。』（金容雲，1985c，p. 244）南秉吉同意『銳案』說：『相消後，獨得一邊二數者，一正一負，則固天元一法之恆例。借根方法則尤為明白矣。銳案以惟知借根方法斥之，何也？蓋原案之稱相消法中之一變，誤也。』（金容雲，1985c，p. 244）

結　論

如果我們將『館案』的作者（可能是戴震）（鄭鳳凰，1996，p. 61）、李銳與南秉吉視為正在學習（或研究）代數的學生，並使用李冶的《益古演段》與《測圓海鏡》充當教科書，那麼，他們之間的『對話』就充分地反映了各自學習（或研究）的認知特性。當然，正如 Hitchcock (1996) 所論述，這些特性也離不開社會文化脈絡的影響。

正如本文所論述，三案對話的焦點，乃是『天元術』的『相消』與『借根方』的『加減』之爭議。對於『館案』的作者而言，利用『借根方』來解讀李冶的『天元術』著作，可以說是勢所必然，蓋負責引介『借根方』的御製《數理精蘊》之主導故也（韓琦，1991，pp.73-79）。儘管如此，『館案』以（等號）『兩邊加減同一數』來解釋『相消』，卻符合方程式化簡中的移項原理。美中不足之處，在於《數理精蘊》中的等號『＝』，並未被『館案』所引用，以至於南秉吉在為『借根方』答辯時，並沒有得到此一符號及其運算的便利。

對於李銳來說，天元術是乾嘉學派『興復古學，昌明中法』的利器，因此，以中法來解讀李冶的著作，似乎是唯一具有『正當性』的判準。於是，李銳遂始終相信『若相消之後，

則止有減餘，更不得云彼與此等矣。』換句話說，雖然天元術列方程的實質，乃是利用『相消』將方程式的所有項都移到（等號）的某一邊去，然而，李銳似乎認定此一由籌算圖示所表徵的『開方式』為一個多項式，而非一個代數方程式！譬如以上文第一問的方程 $1700-80x-0.25x^2=0$（在『開方式』（亦即今日之方程式）中，它的『實』（常數項）正、『從』（一次項係數）負、『隅』（最高次項係數）負）為例，李銳就認為這是『以寄左數減後數』的結果，如果『以後數減寄左數』，那麼，其結果 $-1700+80x+0.25x^2=0$（在『開方式』中，它的『實』負、『從』正、『隅』正）當然就與前一表徵『每相反』了。（朱家生，1993）

針對上一段的『銳案』，南秉吉則依據『等號』的等價原理，強調『天元一之實、從、隅，即借根方之真數、根、平方，而正為多，負為少也』，於是，『多少之全變，便是不變，故相消法之負從、負隅，為加減法之多根、多平方』。如此一來，無論相消或相減所得的『開方式』，當然是『一而二，而二而一也』，蓋『以等減等，所餘必等，何可謂止有減餘，更不得云彼與此等耶？』

然則南秉吉何以傾向『借根方』呢？其依據無非是南秉吉所指出的一『詳』一『約』，只是何以詳約程度有異，南秉吉的解釋似乎力有未逮。譬如針對上引第一問的方程式之兩種表徵之比較，南秉吉認為『相消法使實、從、廉、隅，務歸一行，而不辨肯綮。加減法使真數與根、方數，仍分兩邊，而昭晰其法理。』然而，『天元術』相消到一邊對比『借根方』加減分兩邊，在解方程式時確有認識論上的差異，南秉吉固無法察覺，我們也就不必苛求了。不過，南秉吉依循『銳案』認定的『相消即相減，方程所謂直除是也』之觀點，來進行相消與相減之論辯，卻不免是賢者之失。這是因為在《九章算術》『方程術』中，每行都各自代表一個（一次二或三元）方程式，因此，其『直除』運算自與『天元術』中的相消或『借根方』中的相減不同。將兩者混淆，應該是無法將方程式與多項式各自運算的意義區別的主要原因。

無論如何，南秉吉對於『借根方』的自在態度，還是讓我們印象深刻！試看他以借根方法求解本書七個問題時，並未刻意淨化『借根方』術語，而是多少還揉合了『天元術』的籌算術語。由此可見，『天元術』vs.『借根方』的爭議，讓異文化中的南秉吉面對它，反而找到更寬闊、更包容的解讀方式。此一歷史經驗，對於我們今日進行中學代數教學時，應該還是很有啟示作用吧！

附　註

1. 所謂 HPM 是"Relations between History and Pedagogy of Mathematics" 的縮寫，它原是指隸屬於『國際數學教育委員會』(International commission on Mathematics Instruction) 的一個研究群：International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics。現在此一縮寫，也用以指涉強調數學史與數學教學應該、而且可以關聯的一種數學教育活動。參考洪萬生（1998）。

謝　辭

本文參考金容雲的韓文『解題』，承金利湜先生（Kim, Lee Sik，國立台灣師範大學國文研究所碩士）協助翻譯解說，謹此致謝。不過，文責當然由作者自負。另外，本文之撰寫，也接受國科會研究計畫 NSC 89-2511-S-003-031-(88/08/01 - 89/07/31) 部份贊助。

參考文獻

1. 孔國平 (1988)：李冶傳。濟南：河北教育出版社。
2. 孔國平 (1996)：《測圓海鏡》導讀。漢口：湖北教育出版社。
3. 朱家生 (1993)：李鋭《開方說》研究。載於洪萬生主編：談天三友，(pp.28-310)。台北：明文書局。
4. 李冶：測圓海鏡。載於郭書春主編(1993)：中國科學技術典籍通匯．數學卷一，(pp.729-869)。河南教育出版社。
5. 李冶：益古演段。載於郭書春主編(1993)：中國科學技術典籍通匯．數學卷一，(pp.873-941)。河南教育出版社。
6. 李秀卿 (1997)：二次方程式的幾何思維之歷史研究：以中國與回教世界為例。台北：台灣師大數學研究所碩士論文（未出版）。
7. 金容雲編 (1985a)：韓國科學技術史資料大系．數學篇 (4)。漢城：驪江出版社。
8. 金容雲編 (1985b)：韓國科學技術史資料大系．數學篇 (5)。漢城：驪江出版社。
9. 金容雲編 (1985c)：韓國科學技術史資料大系．數學篇 (6)。漢城：驪江出版社。
10. 南秉吉：緝古演段。載於金容雲編 (1985a)：韓國科學技術史資料大系．數學篇(5)，(pp.249-364)。漢城：驪江出版社。
11. 南秉吉：測量圖解。載於金容雲編 (1985a)：韓國科學技術史資料大系．數學篇(5)，(pp.365-482)。漢城：驪江出版社。
12. 南秉吉：勾股述要圖解。載於金容雲編 (1985c)：韓國科學技術史資料大系．數學篇 (6)，(pp.1-189)。漢城：驪江出版社。
13. 南秉吉 (1855)：無異解。載於金容雲編 (1985c)：韓國科學技術史資料大系．數學篇 (6)，(pp.191-250)。漢城：驪江出版社。
14. 南秉吉：九章術解。載於金容雲編 (1985c)：韓國科學技術史資料大系．數學篇(6)，(pp.251-496)。漢城：驪江出版社。
15. 洪萬生 (1993)：談天三友焦循、汪萊與李鋭：清代經學與算學關係試論。載於洪萬生主編：談天三友，(pp. 37-124)。台北：明文書局。
16. 洪萬生 (1998)：HPM 隨筆（一）。HPM 台北通訊，1(2)，1-4。
17. 洪萬生 (1999a)：清初西方代數之輸入。載於洪萬生：孔子與數學，(pp. 179-204)。台北：明文書局。
18. 洪萬生 (1999b)：全真教與金元數學－以李冶 (1192-1279)為例。載於：金庸小說國際學術研討會論文集，(pp. 67-83)。台北：遠流出版社。
19. 洪萬生 (2000)：數學典籍的一個數學教學讀法：以《赤水遺珍》為例。中華科技史同好會會刊，1(2), 35-43。
20. 洪萬生 (投稿中)：華蘅芳的學算心得之啟示。
21. 郭書春主編 (1993)：中國科學技術典籍通匯．數學卷一。河南教育出版社。
22. 鄭鳳凰 (1996)：李鋭對宋元算學的研究－從算書校注到算學創作。新竹：清華大學歷史研究所科技史組碩士論文（未出版）。
23. 嚴敦傑 (1993)：李尚之年譜。載於洪萬生主編：談天三友，(pp. 355-383)。台北：明文書局。
24. 韓琦 (1991)：康熙時代傳入的西方數學及其對中國的影響。北京：中國科學院自然科學史研究所博士論文（未出版）。
25. Hitchcock, Gavin (1996). Dramatizing the Birth and Adventures of Mathematical Concepts: Two Dialogues. In Ronald Calinger (Ed.), *Vita Mathematica* (pp. 27-46). Washington, D.C.: MAA.
26. Horng, Wann-Sheng (submitted). Reading into Mathematical Texts: a multicultural perspective.
27. Tian, Miao (1999). *Jiegenfang*, *Tianyuan*, and *Daishu*: Algebra in Qing China. *Historia Scientiarum* 9(1), 101-119.

Nam Byung Gil's Comments on the "Tian Yuan Shu" versus "Jie Gen Fang": An HPM Perspective

Wann-Sheng Horng
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
Taipei, Taiwan

Abstract

In this article, I am going to give a preliminary observation on Korean mathematical texts in the second half of the 19th century. I will focus on Nam Byung Gil's (1820-1869) *Vu Yi He* (A Study of commentaries on "Tian Yuan Shu", 1855). It is a text basically devoted to a critical evaluation of Chinese mathematician Li Rui's (1768-1817) restoration of the tradition "Tian Yuan Shu" in terms of the Western "Jie Gen Fang". Apparently based on the adaptation that Li Rui, among others, made of the Cardano's version of Western algebra, Nam Byung Gil, who knew Chinese mathematics well, was able to react in a "meta-cognitive" manner. Specifically, he commented on commentaries. His experience of studying the discipline is very interesting and illuminating, especially for teaching learners of introductory algebra.

Key words: History of Mathematics, HPM, Tian Yuan Shu, Jie Geng Fang.