科學教育學刊
2000, 第八卷第四期 379-394

Chinese Journal of Science Education
2000, 8(4), 379-394

國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法

楊德清
國立嘉義大學 應用數學系

(投稿日期：民國 89 年 8 月 15 日，修訂日期：89 年 11 月 16 日，接受日期：89 年 12 月 7 日)

摘要：本研究的主要目的在經由質的研究，藉由所設計的數字常識問題深入的訪談國小六年級學生，以瞭解兒童回答訪談問題時使用數字常識方法解題之能力為何？21 位國小六年級學生參加本研究之訪談，分別來自於南部四所公立之國民小學。結果顯示，不論低、中、或高程度的學生皆普遍表現出非常習慣使用算則的原理與方法，而少有數字常識的解題策略（如使用參考點、善用估算的方法、認知數字之大小、或理解運算對數字之相對影響等）被使用。亦即表示學生非常缺乏數字常識的能力。對中、下程度的學生而言，此種情況更為嚴重。當學生回答訪談問題時，皆非常依賴紙筆計算的方法，無法從理解與有意義化的層面思考，往往將自己侷限於算則的方式。

關鍵字：估算、參數點、數字大小、數字常識。

壹、前言

國際上許多著名的研究結果已經很肯定台灣學生在數學成就上的表現，其中包括了筆算能力的優異成績（Beaton, Mullis, Martin, Gonzalez, Kelly & Smith,1997; Stevenson, Chen & Lee, 1993; Stevenson, Lee & Stigler, 1986; Stigler, Lee & Stevenson, 1991）。但是具有良好的計算能力與技巧，是否代表學生亦應具有良好之數字常識（number sense）能力呢？根據 Reys 和 Yang (1998）的研究結果顯示學生具有良好的筆算能力並不代表他們亦能發展良好的數字常識。例如，當要求學生使用紙筆計算(WCT)繁雜之小數乘法運算 534.6×0.545 時，小六與國二學生有高達 61%和 71%的答對率；相對於數字常識測驗 (NST) 卻只有 11% 和 25%的正確回答率。深入的探究其原因可以發現在傳統的算數教學中，數學老師常常告訴學生包含小數的數目相乘時，小數點位置的選擇由乘數與被乘數所共有的小數所決定。因此，在 NST 中 534.6×0.545=291357 要求學生決定小數點的位置時，由於 534.6 與 0.545 總共有 4 位小數點，所以學生不假思索地選擇答案為 29.1357。但是他們未曾仔細思考 0.545 約為 0.5 乘以五百多大約為二百多至三百不可能為二十九點多。

最近以色列 Bethlehem 市的一位小學數學

老師 Muneer（1999）在其碩士論文中參照筆者的研究工具與方法對該城市小學九年級的學生做相同的測試。結果亦發現學生在筆算能力的表現遠優於數字常識的表現。優秀教師鄔瑞香（黃敏晃編、林文生和鄔瑞香著，1999）在其多年的教學經驗中亦發現小學生會正確的解答傳統制式的數學題目，並不代表學生真正的理解其所做為何？以及為何要如此作？學生常常「會做計算，但不知所以然」（p. 87）。這種現象普遍地發生於許多學生的身上。我們的數學教育向來只重視訓練學生的計算能力、計算速度與解題技巧，而缺乏思考、邏輯推理的培養。此種對數概念之迷失，歸咎其原因乃是由於學生缺乏數字常識的能力。

數字常識已被視為 21 世紀中小學數學教學的重心（NCTM, 2000）。目前國內在這方面的相關研究仍相當欠缺，楊德清（1998, 2000a, 2000b）已進行了些許的研究，但對於學生在回答數字常識問題時所使用之相關能力仍待進一步的研究，以幫助中小學教師深入的瞭解學生困難之所在以及幫助教師改進教學方法；同時作為數學教育家與課程設計者當作改進課程和教學活動之依據。此乃本研究之動機。

貳、研究背景與目的

何謂數字常識（What is number sense）？數字常識（楊德清，1997, 1998, 2000b; Reys & Yang,1998）可以解釋為個人對數字、運算、以及數字和運算所產生之情境的一般性理解。具有數字常識能力者能夠以靈活與彈性的方法對數學作判斷以及發展解題策略以處理數字和運算之問題。美國數學教師協會（NCTM, 1989）在其所出版之「數學課程與評量標準」（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,1989）中特別強調具有良好數字常識之兒童應該具備下列之特徵：

(1)充分的瞭解數字的基本意義；
(2)能夠以不同的方式表達數字間的關係；
(3)認知數字之相對的大小；
(4)了解運算對數字之相對的影響；
(5)能夠適當的選擇與使用參考點（p. 38）。

同樣地，NCTM (2000)今年所發表之最新的「數學課程之原則與標準」(The Principles and Standards for School Mathematics)即主張「當兒童瞭解數字的大小，發展多重的方式以表達數字，能夠使用參考點，以及能夠認知數字和運算之相對的影響，數字常識即發展了」(p. 80)。

由於數字常識主張學習數學是一種有意義化的學習活動，強調兒童對數字概念的理解；所以在目前歐、美、澳等先進國家的數學教育改革文獻中特別強調 "數字常識" 的研究與教學（NCTM, 1989, 2000; AEC, 1991）。由於數字常識是一個很重要的數學主題，它激勵了許多先進國家的數學教育家、心理學家、以及研究人員之研究與熱烈討論。這些研究的結果陳列了數字常識的主要組成元素（Markovits & Sowder, 1994; McIntosh, Reys & Reys, 1992; McIntosh, Reys. Reys, Bana & Farrel, 1997; Sowder, 1992a, 1992b; Sowder & Kelin, 1993; Yang,1997）；陳述數字常識的特徵（Howden, 1989; B. Reys, 1994; NCTM, 1989），以及從心理學之觀點作理論性的分析數字常識（Hiebert, 1989; Greeno, 1991; Resnick, 1989）。

經由這些討論與研究提供了數字常識的多重面貌，基本上而言，數字常識的組成元素包含了：了解數字的基本意義，認識數字之大小，適當的選擇與使用參考點，瞭解運算對數字之相對的影響，靈活彈性地使用心算、估算、或其他的解題策略。

數字常識在美國和其他先進國家受到相當程度之重視，並且要求將其融入中小學之數學課程中（NCTM, 1989, 2000; AEC, 1991; Emanuelsson & Johansson, 1996）；然而目前我

們的數學教育並沒有強調發展兒童數字常識能力的重要性。台灣的數學教育強調程序性知識與技能之獲得，如此重視計算能力或許會產生很高之成績，但學生是否會將如此之計算能力轉換為對數字與運算之理解與應用呢？其答案是否定的(Reys & Yang, 1998)。

本研究之發展乃是希望藉由訪談以深入的探究小六學生回答數字相關問題時使用數字常識解題之方法為何？以幫助教師深入瞭解學生所遭遇之困難，以及幫助研究者或課程設計者在未來設計課程之參考。

研究目的

本研究的主要目的希望藉由所設計的數字常識問題深入的訪談小六學生，以瞭解兒童解決問題時其所具有之數字常識能力。欲探討之研究問題如下：

1. 分析國小六年級學生回答訪談問題時使用數字常識解題之方法為何？
2. 數學成績為低、中、高學生所使用數字常識解題能力之差異性為何？

參、研究方法

一、樣本

24 位國小六年級學生參加本研究之訪談，這些樣本分別來自於南部四所（各 6 位學生）公立之國民小學，每班學生之人數範圍為 29 至 40 人。從該四個學校之小六班級中選取一個班級，並將該四個班級之學生依其數學成績分成高（top10%）、中（介於 40%-70%）、低（後 20%）三個層次，每個層次各選取 2 位學生接受訪談。該四所小學學生之家庭背景來自各不同之經濟、教育、階層，因此學生之組成亦多樣化，而且班級亦採常態分班。其中屬於大學之附屬小學，有部分之學生家長為該大學之教職員工之子女，故平均之家庭教育背景較高。

二、數字常識組織架構（Number sense framework）

本研究根據 McIntosh, Reys 和 Reys (1992) 與其他相關之文獻與研究報告而發展了一個數字常識之組織架構（Case & Sowder, 1990; Markovits & Sowder, 1994; NCTM, 1989, 2000; McIntosh, Reys, Reys, Bana & Farrel, 1997; B. Reys. *et. al.*, 1991; Reys & Yang, 1998; Sowder, 1992a, 1992b; Yang,1997）。這個組織架構定義數字常識的主要組成元素包含 4 個部分：

◎瞭解數字的基本意義及具有比較數字大小的能力；
◎瞭解運算對數字的意義和影響；
◎運用參考點；
◎發展不同的計算策略，包括心算或估算，以及理解計算結果的合理性。

由這 4 個元素所組成之數字常識組織架構乃是構成本研究設計數字常識訪談問題以分析國小六年級學童回答問題所具有之數字常識解題能力。

三、訪談工具

參考上述之數字常識組織架構，研究者設計一份訪談工具。該工具包括 12 個問題：1 至 3 題瞭解學生對參考點之使用能力；4 至 6 題探討學生對數字大小之理解；7 至 9 題分析學生關於運算對數字的影響之理解；10 至 12 題探討估算能力之發展。每一次訪談大約需要 30 分鐘的時間。本研究法主要是採用訪談策略（interview technique）以進行研究。訪談之主要目的是希望藉由與學生之互動中深入的瞭解學生對相關問題所具有之解題方法為何？以進一步釐清學生之數字常識能力。

表 1：國小六年級學生回答使用參數點之訪談問題所使用的解題方法

訪談問題	解題型態	低 n = 8	中 n = 8	高 n = 5
1.小明用計算器求得 534.6 × 0.545 = 291357，但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：	(1) 2.91357	0	0	0
	(2) 29.1357	8	5	5
	(3) 291.357	0	3	0
	數字常識方法	(0)	(0)	(0)
	傳統算則方法	(0)	(3)	(0)
	(4) 2913.57	0	0	0
	(5) 沒有計算無法找出	0	0	0
2.下列那個分數之和比 1 大？為什麼？請解釋使你的原因。	(1) 2/5 + 3/7	1	3	0
	(2) 1/2 + 4/9	2	2	1
	(3) 3/8 + 2/11	1	1	0
	* (4) 4/7 + 1/2	4	2	4
	數字常識方法	(0)	(1)	(1)
	傳統算則方法	(2)	(1)	(2)
	錯誤的解釋	(2)	(0)	(1)
3.不需要計算，請估計 11/12 + 8/9 的答案大約是多少？	(1) 21	0	1	1
	(2) 1	0	1	0
	* (3) 2	1	3	3
	數字常識方法	(0)	(1)	(3)
	傳統算則方法	(0)	(2)	(0)
	傳統算則方法	(1)	(0)	(0)
	(4) 19	1	2	0
	(5) 沒有計算無法找出	5	1	1

"*" 表示該題之正確答案（正確答案後之各分項代表學生所使用之方法）。

四、實施程序

由於有四所小學共 24 位小六的學生參加晤談，經過研究者與協助之教師討論與選擇了接受訪談之學生後，決定了研究進行的時間從五月中至六月中。而且晤談以不影響學生上課為原則，皆利用學生課餘時間，於學校輔導室或教室進行晤談。每一個訪談皆有錄音，以便日後之轉譯及分析之用。由於時間因素，最後有三位高程度的學生無法參與訪談。因此，最後有 21 位學生參與本研究之晤談。其中低（編碼為 L1-L8）、中程度（M1-M8）之學生各有 8 位，高程度（H1-H5）之學生有 5 位。

肆、研究結果與討論

本訪談工具從數字常識組織架構中選取：數字大小、參考點、運算對數字之相對的影響、以及估算等四個元素為基礎設計數字常識問題以探討小六學生回答這些問題時使用數字常識解題之方法。因此結果的呈現將從這幾個方向進行。

表 1 呈現學生回答參考點之相關訪談問題所使用的解題方法。若學生之回答為正確且使用傳統之計算方法，包括公式之使用或通分的方法，皆被視為使用傳統計算原理。相反的，

若學生能應用參考點，如 1 或 1/2，以合理的解決問題則被歸類為使用數字常識方法。若學生給予正確的答案，但無法說明清楚其理由，或解釋為錯誤，則被視為不正確的答案。

問題 1 的結果發現沒有一位學生（不管低、中、或高程度）可以使用適當參考點的策略以正確的解釋其答案。例如：

H1：「第一個數字（被乘數）有一位小數，第二個數字(乘數)有三位小數；相乘的結果有 1＋3＝4 位小數，因此 291357 的小數點應該向左移四位，所以答案為29.1357」。

即使有三位中程度的學生給予正確的答案，但回答的理由亦是使用相同之傳統的計算法則，例如：

M7：「本來小數點應該有四位才對。因為 6×5=30，因為 0 沒有寫上去，所以小數點變為三位。所以答案為291.357」。

當然，這也代表著學生不能以有意義的方式去思考五百多乘以 0.545（約為 0.5=1/2），答案應該是二百多，而不可能是二十多。題目雖簡單，但學生的回答卻令人很訝異。

問題 2 要求學生判斷哪一個分數的和大於 1。從訪談結果可以發現，只有一位高程度的學生可以從容不迫地看完題目，然後思考解題方式，應用參考點的方法決定 4/7 大於 1/2，所以 4/7＋1/2 的結果會大於 1。例如：

H2：「因為 1/2 是全部的一半，4/7 比一半還要大，所以答案比 1 大」

即被視為使用參數點之方法。然而其他的學生當被要求去回答本問題時，普遍的解題方式都是埋頭苦幹，使用通分的方法：

L7：「我使用通分的方法，把每一個答案都算出來，因為前面三個分數的和都沒有超過 1，所以答案應該是第四個。」

問題 3 檢驗學生是否會使用 1 當作參考點以估計 11/12+8/9 的答案大約是 2？結果顯示有三位高程度學生 (3/5) 以及一位中程度 (1/8) 的學生可以正確的解釋其理由。例如：

H1：「因為 11/12 很接近 1，8/9 也很接近1，那大約加起來差不多是2」。

即為使用參數點之案例。由於本題之分數較複雜，因此低程度的學生（7/8）普遍地產生較大的困擾，他們回答的共通點是使用算則的方式，如：

L1：「計算太複雜，沒辦法做。我可不可以使用紙筆計算？」

由此可知在傳統重視算則教學的模式下，學生缺乏思考的方向，只是習慣地使用紙筆計算以求解。當遇上未曾見過的題型時，往往迷失方向，不知所措。同時，有一位高程度，三位中程度，以及一位低程度的學生回答：

M2 (M5 & L7)：「19」或 M6 (H3)「21」。

從學生的解釋中，探究產生此結果之原因有兩種可能：一是由於學生嘗試使用通分的方法，但發現計算太複雜，無法經由心算完成，產生混亂。因此，就用猜的方式選取與分母或分子之和相同的答案。此類學生解釋的理由如下：

R（訪談者）：請問本題的答案是多少？

L7：「19」。

R：為什麼？

L7：「我試著用通分的方法，但計算太複雜了，..所以我用猜的」。

二是學生完全不瞭解分數的基本意義，將分數視為一種代表 2 維向度之東西，將分子與分母抽離了分數的意義，將整數加法原則類推至分數。學生的反應是：

M2：「不知如何解釋」、「19 吧！分子相加」。

由以上 1-3 題的結果可知，學生的思考模式深受傳統的紙筆計算的機械訓練所侷限，造

表 2：國小六年級學生回答數字大小之訪談問題所使用之解題方法

訪談問題	解題型態	低 n = 8	中 n = 8	高 n = 5
4.請問 5/7 和 5/9 那一個較大？為什麼？請解釋你的原因。	* 5/7	7	7	5
	數字常識方法	(3)	(0)	(4)
	傳統算則方法	(2)	(6)	(1)
	錯誤的解釋	(2)	(1)	(0)
	5/9	1	1	0
5.由小至大依序排列下列數字：0.4899, 16/25, 8/15, 19/18, 0.91。為什麼？請解釋你的原因。	排序正確	0	1	3
	數字常識方法	(0)	(0)	(0)
	傳統算則方法	(0)	(1)	(3)
	錯誤的解釋	(0)	(0)	(0)
	不正確排序	8	7	2
6.請問 15/16 和 11/12 那一個較大？為什麼？請解釋你的原因。	* 15/16	1	4	4
	數字常識方法	(0)	(0)	(2)
	請解釋你的原因。	(0)	(0)	(1)
	錯誤的解釋	(1)	(4)	(1)
	11/12	7	4	1

成數學學習未能產生意義。在我們傳統的制式教育中，如此的情形到處充斥。對這些學生而言，數學是一系列分割、不連貫的事實和公式而必須加以記憶和練習。學生們習慣於背誦一連串的公式和運用傳統的算則以便於處理數字問題；而非真正的對數字之瞭解和缺乏數字常識。誠如 Kamii (1989; 1997)以及 Burns (1994)所主張的傳統的算則不但妨礙兒童的思考推理的能力，而且有礙於兒童數字常識的發展。

表 2 呈現學生回答數字大小相關訪談問題時所使用之解題方法的結果。學生之回答若以通分、記憶公式的方式，或將分數化為小數，或者將小數化為分數皆被視為使用傳統算則。若學生可以具體的說明其理由（例如舉例說明）則被視為使用數字常識的方法。

問題 4 探討學生對分子相同分母不同之分數相對大小的理解。結果顯示學生對此類之問題有較好的表現。由於分子相同，當比較大小時，就不需要同時考慮分子與分母之間的關係，因此學生較容易回答。學生解釋的理由如下：

H2：「因為 5/7 是 7 份裡面的 5 份，5/9 是 9 份裡的 5 份。7 份裡面的 5 份一定比 9 份裡面的 5 份大。」

L1：「切西瓜 7 份的話會比 9 份還大。」

L3：「一份蛋糕分成 7 份比較大，分成 9 份比較小。」

這些解釋皆被視為數字常識之方法。然而中程度之學生中卻有 6（6/8）位使用傳統之算則，沒有學生可以具體的舉證以解釋其理由。他們普遍的回答都是：

M1：「上面的分子一樣，下面的分母比較大，分數就比較小。」

R：可不可以告訴我為什麼分子一樣，分母比較大，分數就比較小？

M1：「以前數學課就是這麼做的，...不知道！」（他無法解釋原因）。

或

M2：「因為化為同分母，5/7 是 45/63，5/9 是 35/63，所以 5/7 較大。」

同時有一位低程度的學生回答說：「因為 9 比 7 大，所以 5/9 較大。」顯然該學生完全不具有分數之概念。

問題 6 類似問題 4，但分子分母皆不相同，且皆差 1，困難度亦較高。只有兩位高程度的學生可以給予有意義的理由，例如：

H4：「11/12 它差 1 還有 1/12，15/16 它差 1 還有 1/16，1/16 小於 1/12，15/16 因為它的差距比較小，差 1 比較小，11/12 差比較大，所以 15/16 比較大。」

即被認定為使用數字常識的方法。然而從結果可以發現低程度的學生完全無法回答此問題，他們沿用題 4 的解題方法，但完全忽略了分子與分母的關係。他們的解釋如下：

L1：「西瓜切 12 份會比切 16 份大。」

L4：「與前一題一樣，切越多就越小，切愈少就愈大。」

L7:「11/12 比較大。因為它除起來會比較大。」

L8：「11 除以 12 大約是 0.9 多，15 除以 16 大約是 0.8 多，所以 11/12 比較大。」

從他們的解釋即可知道低程度學生對部分/整體之分數概念非常缺乏。同樣地，中程度的學生在比較異分母與分子之分數大小方面之數字常識能力亦非常缺乏。從他們的解釋中：

M2：「因為 15 比 11 大，16 比 12 大，所以 15/16 較大。」

M6：「一樣大，因為 11 和 12 差 1，15 和 16 亦差 1。」

M7：「11/12 之分母比 15/16 之分母小，所以分數 11/12 較大。」

可以發現中程度學生在分數概念的迷失亦相當普遍。高程度學生在分數相對大小之能力雖然比低、中程度的學生表現好，但在這方面之能力仍須加強。

問題 5 主要在研究學生對分數與小數之相對大小的比較能力。從結果可以發現傳統算則的解題模式深深地影響學生的思考方式。不論何種程度的學生皆習慣性地將分數轉換成小數或將小數轉換成分數然後再嘗試通分以比較數字之大小。甚至有兩位低程度的學生認為 0.4899 比 0.91 大，因為：

L1：「0.4899 = 4899/100，0.91 = 91/100，所以 0.4899 > 0.91。」

L3：「0.4899 比 0.91 大，因為 0.4899 的數字比較多。」

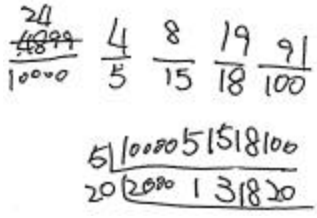
顯然小數位值認知的欠缺以及將整數比較大小的概念應用於小數比較大小之迷失概念存在於低程度的學生中，此與 Resnick 等人（1989）的研究相一致：將整數比較大小之概念類推至小數大小之比較。同時結果顯示沒有一位低程度的學生可以正確地比較這些分數與小數的大小。而中程度的學生亦只有一位可以正確的找出這些數目的大小關係。整體而言，排序分數與小數之大小的問題普遍對低與中程度的學生而言是相當的困難的。而且高程度的學生則傾向於使用傳統算則作為其解題之方法。

從以上的結果可以發現，學生在比較或排序分數（與小數）之大小相關問題時，呈現相當程度的缺乏數字常識的能力。特別是對低與中程度的學生而言在分數概念的迷失與國外的一些研究相符合（Peck & Jencks, 1981; Carpenter, *et al.*, 1982），沒有充分的理解分數的意義，或者沒有辦法將分子與分母之間的關係做連結。同時，對低與中程度的學生而言在分數與小數之間的關連性之理解亦十分欠缺，此與 Markovits 和 Sowder（1991）的研究相符合：許多的學生往往將分數與小數視為不相干的個體，而兩者之間不必須具有關連性。

表 3：國小六年級學生回答運算對數字之相對影響問題所使用的解題方法

訪談問題	解題型態	低 n = 8	中 n = 8	高 n = 5
7.請問 63×37 的正確答案是大於，等於，還是小於它的估計值 60×40= 2400？為什麼？請解釋你的理由。	* 小於	0	2	3
	數字常識方法	(0)	(0)	(0)
	傳統算則方法	(0)	(1)	(1)
	錯誤的解釋	(0)	(1)	(2)
	等於	3	3	0
	大於	3	2	2
	必須使用紙筆計算	2	1	0
8.不需要使用計算方法，找出最接近的估計值：21/32 × 7/16 為什麼？ 請解釋你的理由。	A. 大於 1/2	2	3	2
	* B. 小於 1/2	3	3	3
	數字常識方法	(0)	(0)	(0)
	傳統算則方法	(0)	(0)	(2)
	錯誤的解釋	(3)	(3)	(1)
	C. 等於 1/2	0	0	0
	D. 無法判斷	3	2	0
9.在下列的數線中，哪一個字母最適合代表 D x G？為什麼？	正確答案	5	6	4
	數字常識方法	(0)	(0)	(0)
	傳統算則方法	(2)	(3)	(3)
	錯誤的解釋	(3)	(3)	(1)
	不正確的答案或不會	3	2	1

訪談結果可以發現要求學生從分數與小數中排序其大小是非常困難的，沒有一位學生呈現數字常識的策略；他們的策略都是使用傳統算則的方式，嘗試將分數化為小數，或者將小數化為分數，然後再通分。例如：有一位中程度的學生就使用下列的方法（將小數化為分數，再通分）：



因此，將自己陷入泥沼之中而不知如何自處。中、低程度的學生甚至對分數與小數之間的關聯性欠缺認知能力，無法真正的理解分數與小數的意義與相關性。此正與 Hiebert (1984) 所說的：「大部分的學生沒有連結分數與小數符號的理解。」（p. 505）相一致。而這亦與 Markovits 和 Sowder（1991）的研究結果：對兒童而言分數與小數之間關係的建立是很困難的，而且當要求他們作分數與小數的比較時，學生們常常將這兩者視為分離的個體。

表 3 呈現小六學生回答運算對數字之相對影響的訪談問題時所使用的解題方法。問題 7 在評估學生是否可以利用運算對數字之相對影響的策略以解決問題。誠如 Markovits 和 Sowder (1994) 所說：要求學生去決定正確的值是大於或小於估計值是非常困難的，如果學生可以判斷以及給予合理的解釋這兩者是不相等，已是難能可貴了。結果顯示有 3 位低程度與 3 位中程度的學生認為 63×37 會等於 60×40，因為

表 4：國小六年級學生回答估算之訪談問題所使用之解題方法

訪談問題	解題型態	低 n = 8	中 n = 8	高 n = 5
10.不需要使用計算方法，找出最接近的估計值：72÷0.025	A. 比 72 小很多	3	2	0
	B. 比 72 小一點點	1	1	0
	C. 比 72 大一點點	2	0	0
	* D. 比 72 大很多	3	5	5
	數字常識方法	(0)	(1)	(1)
	傳統算則方法	(2)	(4)	(4)
11.請估計 53687＋8365＋1638+28 的答案大約是多少？為什麼？	* 接近之答案	4	5	4
	大約估計(28 消去)	(0)	(0)	(0)
	大約估計(28 被計算)	(0)	(1)	(0)
	使用四捨五入法	(0)	(0)	(1)
	使用四捨五入法	(4)	(4)	(3)
	錯誤或要求使用紙筆計算	4	3	1
12.請估計 8326÷86 的答案大約是多少？為什麼？請解釋你的理由。	當約分以求值 (例如：8300÷90 或 8300÷80 或 8000÷80	0	0	0
	使用傳統計算原理	6	6	4
	錯誤或要求使用紙筆計算	2	2	1

M2：「前面一個數少 3（63－60＝3），
後面多一個 3（40－37＝3）
因此，前後互相抵銷，所以答案相等」

很顯然的這些學生非常欠缺運算對數字之相對影響的能力。同時有 4 位低程度與 2 位中程度的學生回答：

L7：「我可以用紙筆計算嗎？」

對於此種非例行性的問題，如果不靠紙筆計算似乎是很困難的。

問題 8 在評量學生是否理解數字與運算之相關性以及選擇適當的參考點以估計其值是大於、小於、或等於 1/2。由結果可以知道，學生遇到類似之計算題，就會不假思索地想使用紙筆計算的方式以求得答案，由於分數的分子與分母較大，無法成功的心算，以致於陷入混亂之中，他們的回答常常是：

M7：「因為這兩個分數都小於 1，若再相乘，則結果會變更小，所以答案是小於 1/2。」

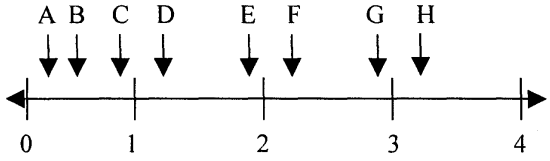
L3：「他們都不能約分，乘起來比 1/2 小。」

M2：「數目太大，無法判斷。」

L4：「因為這個數字（21/32）很大，所以乘起來會大於 1/2。」

顯然，完全無法以意義化的思考模式，即數字常識的方法解決問題。

問題 9：在下列的數線中，哪一個字母最適合代表 D x G ？為什麼？



問題 9 亦在檢驗學生是否具有運算對數字之影響的認知。從結果可以知道學生仍習慣於使用傳統算則的方法，首先找出 D 與 G 的對應值，然後經由計算求出其值，最後再決定其結果。例如：學生回答說：

M4：「把 D 當成是 1，G 當成是 3，相乘結果是 3。」

M2：「D 大約是 1.1，G 大約是 2.7，相乘大約是 3.8。」

顯然學生在數字常識的特徵–運算對數字之相對影響的能力亦相當缺乏。

表 4 呈現小六學生回答估算之訪談問題時所使用之解題方法。問題 10 在檢驗學生對整數除以很小的小數以估計的方法決定其大約值之方法同時檢定學生是否有 " 作除法運算時結果會變小 " 之迷失概念。同時結果顯示有 6 位（n = 8）低程度的學生無法選擇正確的答案，對某整數除以很小的小數其結果應比某數大很多之認知非常缺乏。而能夠正確回答的學生中也都幾乎是使用傳統的算則方法，例如他們的回答大都是：

L8：「72 ÷0.025＝72000 ÷25，所以結果應該比 72 大很多。」

M6：「因為 0.025 有三位小數，所以要跳三格，被除數也要跳三格，變成 72000 除以 25，所以結果就變很大。」

二位低與一位中程度的學生似乎認為作除法運算時其結果會變小，而此種迷失概念，應證了 Graeber 和 Tirosh (1990)以及 Greer (1987) 的研究結果：除法運算會使結果變小。

問題 11 與問題 12 在檢定學生是否會發展良好的估算策略以解決問題。結果顯示沒有一位學生可以展現良好的估算策略以解決問題。在問題 11 中，估計 53687＋8365＋1638+28 的答案大約是多少？由於 28 與 53687 相較之下是非常的小，對答案之影響幾乎是微乎其微，因此作估算的時候，可以將其省略不作考慮。沒有一位學生可以省略 28，以數字常識的方法解題。一位高程度之學生雖然使用四捨五入法，但在做加法運算時仍然使用算則的方式加上 30：

H1：「28 用四捨五入是 30，1638 是 2000；和是 2030，8365 是 8000，就是 10030，然後這個 53687 是 50000，所以是 60030。」

在傳統的紙筆教學中，為求正確的答案，每一個數字都必須被計算。因此，要求學生作估算的時候，沒有一位學生可以拋棄傳統的計算模式或脫離藩籬的約束，以發展估算策略。他們的回答大都是：

M1：「56387 加上 8365 大約是 6 萬多，再加上 1638 也是 6 萬多，再加上 28 也是 6 萬多。」或者是

L3：「53687＋8365 大約是 6 萬 1 千多，然後加上 1638 和 28，就大約是 6 萬 2 千多。」

此種情形正符合 Sowder 和 Wheeler (1989) 的研究結果，即對許多學生而言希望他們能夠忽略不影響結果的數字或將其視為零似乎是非常困難的。

問題 12 請估計 8326 ÷86 的答案大約是多少？本題主要在研究學生是否具有良好的估算策略：(1)將兩數化為可相除進的數目，例如：8300 ÷83，8600 ÷86，或者是 8000 ÷80；(2) 將兩數化為接近但不能除進之數，例如：8000 ÷90；以估計其值。但令人失望的是，不論低、中、或高程度沒有一位學生擁有類似的估算能力，這些學生都是沿用算則的方式解題：

H2：「83 不能被 86 整除，所以退一位，變成 832 除以 86，大約是 9，所以大約是 90 幾。」

學生的思考模式，深深地被侷限於算則的圈圈裡，由此可見一般。

表 5：低、中、高程度學生回答訪談問題（1-12 題）之整體正確百分比

正確回答率	低	中	高
	22%	36%	60%
使用數字常識方法	3%	3%	18%
參數點	[0%]	[2%]	[6.6%]
數字大小	[3%]	[0%]	[10%]
運算對數字之相對影響	[0%]	[0%]	[0%]
估算	[0%]	[1%]	[1.4%]
使用傳統計算原理	19%	33%	42%

表 5 呈現低、中、高程度學生回答訪談問題（1-12 題）之整體正確百分比。由結果可知低與中程度學生使用數字常識方法以回答問題之能力皆非常的差。雖然高程度學生之表現亦不好，但相較之下仍具有較好之數字常識能力。同時由表 5 亦可發現沒有一位學生使用數字常識之元素–運算對數字之相對影響的方法以回答問題。顯示學生在 運算對數字之相對影響' 這部分最弱。

伍、結論與建議

本研究的報告建立在只有四所小學 21 位國小六年級學生的訪談結果，因此它的代表性必須被限制，而且結果的推廣及一般化也必須非常小心。然而本研究的主要發現有下列幾點：

1.訪談結果明白的顯示，不論低、中、或高程度的學生皆普遍表現出非常習慣使用算則的原理與方法，而少有數字常識的解題能力(如使用參考點、善用估算的方法、認知數字之大小、或理解運算對數字之相對影響等)被使用。亦即表示學生非常缺乏數字常識的能力。對中、下程度的學生而言，此種情況更為嚴重。當學生回答訪談問題時，皆非常依賴紙筆計算的方法，無法從理解與有意義化的層面思考，往往將自己侷限於算則的方式。此結果亦更深入的證實了 Reys 和 Yang（1998）所獲得之研究結果：「台灣學生普遍缺乏數字常識的能力；筆算能力表現的良好，並不必須伴隨著數字常識的發展」。

2.研究結果顯示，我國學生在傳統制式的教育下，由於強調程序性知識的獲得，注重計算能力，技巧，與速度，教師所關心的焦點常常是答案正確與否；因而往往忽略了學生學習的內涵與理解程度。學生的思考模式被侷限於傳統的算則原理，常常囫圇吞棗似地背頌與記憶公式和定理，往往不知所做為何？因此當學生被要求解釋其解題策略與思考方式時，學生常常機械化地想使用紙筆計算的方式解決問題，而無法從事意義化的思考；特別是遇到一些較複雜的數字時，學生常常回答說：「我可不可以使用紙筆計算？」對這些學生而言，數學是一系列分割、不連貫的事實和公式而必須加以記憶和練習。這個研究結果與 Altizer-Tuning (1984) 所主張：「問題的理解與概念化應該比只是單調地練習以尋求正確的答案被賦予更高的價值」一致。同時，這個結果也應證了 L. Sowder (1988) 的理論「正確答案不是良好思考的一個安全指標」以及教師除了檢驗答案外更應該要求學生給予解釋與說明其理由。

顯然的，算則的過份學習將妨礙學生思考與推理的能力，侷限了對數字的理解與彈性的應用，因此阻礙了學生數字常識的發展。這也應證了 Kamii (1997)，以及 Warrington 和 Kamii (1998)所強調的：算則的教學有礙於數字常識

的發展。數學教師應該學習將我們的注意力焦聚於促進學生的理解而不是單調程序之演練與實行（Bezuk & Crame, 1989）。

3.訪談結果發現，多數的學生沒有呈現估算策略的能力，學生的解題模式緊緊環繞紙筆計算的法則，此亦反應了R.Reys 等人(1991) 研究成果：估算策略不必須隨著傳統筆算原理的發展而演進。事實上，過份的學習算則可能會阻礙了估算能力的發展。例如：要求學生估計53687＋8365＋1638＋28 的答案大約是多少時？在傳統紙筆計算的訓練下，企盼學生在估計時能夠將28 約去（在估算中 28 與 53687 相較之下非常小所以可將其視為 0）是一件很困難的事情，此正反映了Sowder 和Wheeler (1989) 的研究結果:「rounding a number to zero, which is the effect of ignoring it, is very difficult for many students to do」（p. 17）。一些其他的研究（Reys, Rybolt, Bestgen & Wyatt, 1982; Rubenstein, 1985; Threadgill-Sowder, 1984）亦證實具有良好估算能力的學生往往具有較彈性的思考能力與擁有多重的解題策略，同時亦具有較好的數字常識。因此這些學生沒有發展良好的估算能力是可以理解的。

4.訪談中可以發現對中與低程度的學生而言，分數概念的認知與理解是非常困難的。誠如數學教育家 Southwell（1985）所說：「分數的學習對兒童而言是最困難的。可能是由於分數與整數之符號與運算截然不同的緣故」（p. 177）。特別是，這些學生無法對分母與分子的關係作觀念性的連結；這亦應証了 Behr, Wachsmuth, Post 和 Lesh（1984）以及Kerslake（1986）的研究結果：學生處理分數時常常傾向於將分子與分母視為分離的個體。例如：學生在比較異分母與異分子之分數時往往將同分母但異分子的分數之比較方法類推，或者只考慮分子的大小，而無法同時考慮分子與分母的關係。

研究的最後目的不外乎希望改進我們的教育品質，提昇學生的數學素養。經由本研究的結果，研究者有下列幾點的建議，希望對我們的數學教育以及未來的課程設計有所助益：

1.數字常識已被歐、美等先進國家視為小學數學教育的主要目標，誠如 NCTM（2000）所發表之最新的「數學課程之原則與標準」所強調的「本標準（數與計算）之中心在發展兒童數字常識的能力」(p.32)。目前我國正進行數學教育的大改革中，應該投入更多的研究與發展數字常識教學活動，並仔細思考應如何將這些教學活動融入學校課程中，以幫助兒童發展良好數字常識的能力。

2.筆者非常同意 Wearne 和 Hiebert (1988) 的看法：「It is more difficult for students to acquire conceptual understanding once they have learned rote procedures」。教學的焦點應該強調如何幫助兒童建立觀念性知識的理解，而不是程序性技能的熟練。計算能力不應被拋棄，但是理解與意義化的學習數學更為重要。數學應鼓勵學生思考與邏輯推理能力的培養，而不是汲汲於追求計算的能力，速度，與準確性。我們的數學教育應更重視培養孩子邏輯思考，推理，溝通，與聯結知識的能力。

3.學生對分數概念，例如：異分母與分子之大小的認知，以及分數與小數之關聯性的建立，應思考如何加強設計良好的教學活動，以幫助兒童增強這些概念。特別是對中、低程度的學生而言，更應幫助其觀念的培養。

參考文獻

1. 黃敏晃主編、林文生和鄔瑞香著（1999）：數學教育的藝術與實務，另類教與學。
2. 楊德清（1997）：數學教育中目前大眾所關切之一個主題 – 數字常識，科學教育月刊，**200**，12-18。

3. **楊德清（1998）：筆算能力與數字常識表現之差異性的探討，科學教育月刊，212，**3-10。
4. **楊德清（2000a）：從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力，國科會** 89 **年度補助研究計畫**。
5. **楊德清（2000b）：數字常識評量問題之發展與設計，教育部科技顧問室** 89 **年度補助研究計畫之部分**。
6. Kamii, C.**著，幸曼玲譯（1997）：使用算則的不良影響，國北師主辦** 1997 **國際學術研討會**。
7. Alitzer-Tuning, Carol (1984). "One point of view: Crisis in Arithmetic teaching: The future is here." *Arithmetic Teacher, 32*, 2.
8. Australian Education Council (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
9. Beaton, A. E., Mullis, I., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1997). Mathematics achievement in the middle school years, IEA's third international mathematics and science study, Chestnut Hill, MA: Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy.
10. Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 323-341.
11. Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In Paul R. Trafton and Albert B. Shult (Eds.), New directions for elementary school Mathematics (pp. 156-167), *1989 Yearbook of NCTM*, Reston, VA: NCTM.
12. Burns, M. (1994). *Arithmetic: The last holdout. Phi Delta Kappen*, (Feb.), 471-476.
13. Capenter, T. P., Corbbit, M. K., Kepner, H. S. Jr., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1982). An interpretation of the results of the Second NAEP Mathematics assessment. In S. Hill (Ed.), *Education in the 80's: Mathematics* (pp. 24-35). Washington, DC: National Education Association.
14. Case, R., & Sowder, J. T. (1990). The development of computational estimation: A neo-Piagetian analysis. *Cognition and Instruction, 7*, 79-104.
15. Emanuelsson, G., & Johansson, B. (1996). Kommentarer till kursplan I matematik, Lpo 94. (Nn-statutory guidance to the ne Swedish curriculum of mathematics).
16. Graeber, A. O., & Tirosh, D. (1990). Insights fourthand fifth graders bring to multiplication and division with decimals. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 565-588.
17. Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 170-218.
18. Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving Decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 37-45.
19. Hiebert, J. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and Understanding. *The Elementary School Journal, 84*, 496-513.
20. Hiebert, J. (1989). *Reflections after the conference on number sense*. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference (pp. 82-84). San Diego: San Diego University,

Center for Research in Mathematics and Science Education.

21. Howden, H. (1989). *Teaching number sense. Arithmetic Teacher, 36*(6), 6-11.
22. Kamii, C. (1989). Young children continue to reinvent Arithmetic, second grade: Implications of Piaget's theory. New York: Teachers College Press.
23. Kerslake, D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor, England: NFER-Nelson.
24. Markovits, Z., & Sowder J. T. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(1), 3-11.
25. Markovits, Z., & Sowder J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.
26. McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.
27. McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J., & Farrel, B. (1997). *Number sense in school Mathematics: Student performance in four countries*. Mathematics, Science, & Technology Education Centre, Edith Cowan University.
28. Muneer, Jebree (1999). *The relationship between number sense and computational performance in grade-ninth of Bethlehem area schools*. Unpublished Master Thesis of University of Birzeit in Israel.
29. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school Mathematics. Reston, VA: NCTM.
30. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). The principles and standards for school Mathematics. Reston, VA: NCTM.
31. Peck, D. M., & Jencks, S. M. (1981). Conceptual issues in the teaching and learning of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 339-348.
32. Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference (pp. 82-84). San Diego: San Diego Univ., Center for Research in Mathematics and Science Education.
33. Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics, 20*, 8-27.
34. Reys, B. J. (Ed.). (1991). Developing number sense in the middle grades. Reston, VA: NCTM.
35. Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teaching Mathematics in the Middle School, 1*(2), 114-120.
36. Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 225-37.
37. Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, Ishida, Yoshikawa, & Shimizu (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth-and eighth-grade Japaneses students, *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 39-58.
38. Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J., &

Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 183-201.

39. Rubenstein, R. N. (1985). Computational stimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 106-119.
40. Southwell, B. (1985). The development of rational number concepts in Papua, New Guinea. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.),Theory, research, and practice in mathematical education. Nottingham, England: Shell Centrefor Mathe - matical Education, Universityof Nottingham.
41. Sowder, J. T. (1992a). *Estimation and number sense*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371-389). New York: Macmillan.
42. Sowder, J. T. (1992b). *Making sense of numbers in school mathematics*. In G. Leinhardt, & R. Hattrup (Eds.), Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
43. Sowder, J. T. & Kelin, J. (1993). Number sense and related topics. In D. T. Owens (Ed.), Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics (pp. 41-57). New York: Macmillan.
44. Sowder, J. T., & Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 130-146.
45. Sowder, L. (1988). Children' s solution of story problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 227-238.
46. Stevenson, H. W., Chen, C., & Lee, S. Y. (1993). Mathematical achievement of Chinese, Japanese, & American children: Ten years later. *Science, 259*, 53-58.
47. Stevenson, H. W., Lee, S. Y., & Stigler, J. W. (1986). Mathematical achievement of Chinese, Japanese, and American children. *Science, 231*, 693-99.
48. Stigler, J. W., Lee, S. Y., & Stevenson, H. W. (1991). Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children, Reston,VA: NCTM.
49. Threadgill-Sowder (1984). Computational stimation procedures of school Children. *Journal for Research in Mathematics Education, 77*, 332-336.
50. Warrington, M. A. & Kamii, C. (1998). Multiplication with Fractions: A Piagetian, Constructivist Approach, *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 339- 343.
51. Wearne, D. & Hiebert J. (1988). *Constructing and using meaning for mathematical symbols: The case of decimal fractions*. In J. Hieber & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 220-235). Reston, VA: NCTM.
52. Yang, D. C. (1997). *Number sense performance and strategies possessed by sixth and eighth grade students in Taiwan*. Doctoral dissertation, University of Missouri Columbia, 1995, *Dissertation Abstracts International, 57*, 3865A.

The Methods Used by Sixth Grade Students in Taiwan When Responded Number Sense Questions

Der-Ching Yang
Department of Applied Mathematics National Chiayi University

Abstract

21 sixth grade students from four different public elementary schools participated this study. The purpose of this study was to explore the methods used by sixth grade students in Taiwan when solving specific number sense problems. The interview results indicated that most of students (including low, middle, and high level) revealed little number sense strategies when were interviewed. These students heavily relied upon paper-and-pencil computational skills when solving number sense related questions.

Key words : Estimation, Benchmark, Number magnitude, Number sense.