科學教育學刊
2001, 第九卷第一期, 15-34

Chinese Journal of Science Education
2001, 9(1), 15-34

發展國小教師數學教學之佈題能力
－以分數乘除法教學為例

劉祥通　周立勳
國立嘉義大學數學教育所 教育系

(投稿日期：民國 88 年 8 月 9 日，修訂日期：89 年 11 月 15 日，接受日期：90 年 4 月 9 日)

摘要：在當前國小數學的教學中，教師必需具備以數學佈題促進學生建構數學知識的能力。本研究為協助國小教師發展數學教學的佈題能力，筆者採用協同行動研究，邀請三位六年級教師及一位參與研究者組成研究小組，共同探討相關文獻、分析有關「分數乘除法」三個單元教學目標與教學活動、研擬數學佈題策略並進行教學；同時藉由每單元教學前後兩次的小組討論，發掘教學問題與掌握學生分數乘除法的知識，據以修正教學行動方案，進行再次教學。結果顯示教師在研究歷程中雖能獲得佈題能力的成長，但也發現教師數學佈題的表現仍深受教材份量因素的限制。

關鍵詞：協同行動研究，數學佈題，數學寫作，分數教學

緒　　論

當前國小數學課程強調「數學即解題」，主張數學教學在使學生透過「解題」活動學習數學（周筱亭, 1995），教師的教學任務在於幫助學生發展數學意義。職是，數學教師的角色不應是「解題者」而是「佈題者」，學生才是「解題者」（甯自強, 1993a）。然而，國小數學新課程頒行有年，教師是否已能調整角色，依照課程目標，配合可利用的教學資源，以設計適當的解題活動？必將是決定新課程能否落實的關鍵。

根據筆者過去實地的觀察，發現目前小學數學有關解題的教學現況仍普遍存在若干值得關注的現象：其中，最顯著的是採用「教師演示–學生模仿」的教學模式。大部份的教師面對數學問題時，總是急著將最有效率、最「正確」的解法教給學生，俟學生有了回應，就立即要求學生不斷地反覆練習至純熟，以便獲得考試的高分。如此期待學生迅速的回應教師的問題，學生的責任似乎僅止於「模仿」教師的解題策略而已。

其次，教師忽略學生的自然解法，太快導入格式化的數學。長期以來，學校的數學教學始終忽略學生在進入學校之前，已擁有的數學知識，卻直接引入格式化的數學，然後要求學生接受與練習。此種過於重視工具性知識的學

習，以及格式化數學的學習，將很容易造成學生只重視工具性的知識以獲得分數，而忽略數學概念之間的關連。尤有進者，國內學者亦曾指出，教師照本宣科，把教科書看成是課程的全部，甚至當作「聖經」般的對待，忽略了課程計畫、目標與經驗層面的意義（黃政傑, 1991；蔡清田, 1998）。教師的角色只在於將別人所研究、發展、或設計的課程產品，照本宣科地進行忠實的課程實施（歐用生, 1996）。

再者，教學過程中很少運用合作學習，而讓學生獨自解題，教室存在競爭而不是合作的氣氛。解題時學生都獨自解題，缺少小組腦力激盪的過程，很少有合作解題以共同省思問題的機會，甚至合作解題被認為是浪費時間，對話的關係只存在於教師與少數學生之間，極少出現學生和學生之間相互協商、辯證的情形。

要改進上述不理想的現象以實踐數學即解題的課程目標，教師在教學過程中如何佈題？以及如何增進扮演佈題者角色的能力？是頗值得數學教育工作者予以重視的課題。

所謂「佈題」（problem posing）係指根據某一特定的教學目標而設計出的問題，引導學生藉由解決這些問題以建構數學的概念。教師應將佈題為一種教學技巧，學生能否達成教學目標端賴教師是否能做適當的佈題。根據甯自強（1993b, 1997）的研究主張，教師作為佈題者必須體認到教學目標往往不是經一次的佈題即能實現，或者全部的學生都能達成，因此無可避免的，如何根據學生解題表現進行再次的佈題亦是重要的教學技巧。例如，若是學生已經解題成功但是理由不明確，教師應追問學生「你怎麼知道的？」促使學生將內在想法表徵出來，以便教師或其他同學明瞭；若是學生以較具體或較粗糙的方法解題，教師應協助學生經驗到較抽象或較精緻的解法；若是某些學生尚未達成教學目標，教師則可鼓勵這些學生從其他人的解法中學到比較有效率或比較有效果的解法。

理想上，教師要依據學生的學習狀況做出各種方式的佈題，以達成預期的教學目標。在數學的課室中，教師不是只站在講台上解題與解說，甯自強（1997）強調：教師應更積極地走入行間以巡視學生的各種自發性解法，再根據教師心中的兒童的數學知識歸類成不同的解題類型，然後依照各種解題類型再次佈題。如此的教學方式，當然不同於以往快速引入格式化的數學後，立即進行反覆練習的教學。相對的，教師需在數學課室裡持續不斷的做決定(decision-making)以因應多變與複雜的教學情境，因而數學教學流程不能再是簡單直線式的進程。

有關教師的數學佈題，近年國內學者甯自強著有多篇文章以探討教師的角色（甯自強, 1993a, 1993c, 1997）。甯氏認為佈題能力是教師是否勝任數學教學的主要因素。除此，有關教師佈題與學生的學習解題表現方面的研究，國內梁淑坤教授(Leung, & Wu, 2000; Leung, & Wu, 1999; Leung, 1996)也著墨甚多。梁氏認為有效的佈題策略可幫助學生的解題表現；甚至，對於一些不完整或多餘資訊的問題，給學生討論如何增加或刪減資訊，再給學生解題，如此的佈題也可以增進學習成效。但是過內有系統的發展教師佈題能力方面的研究仍然很少，尤其是透過數學寫作檢驗佈題成果，進而協助教師發展佈題能力的研究更少。

筆者曾透過研究者與教師合作進行寫作活動融入國小數學解題教學的研究（周立勳和劉祥通, 1998），結果顯示數學寫作活動有助於增進國小學童解題能力。研究者檢視其主要的關鍵，可能在於數學寫作活動促使解題教學過程中，容許學生有不同想法與解法，而使師生一起思考數學發現解法的歷程成為可能。然而，更重要的是，教師在教學中更必需努力改變其習於傳統教學演示者為佈題者。此種調適的歷

程對參與研究的教師而言，經常是一項嚴峻的挑戰。同時，對研究者而言，協助教師從教學實踐中有效的轉換教學角色，提昇數學佈題能力以改進教學亦是亟待解決的課題。

回顧過去的教學實驗研究，研究者欲將探索的理論付諸實施，乃事先擬妥教學計畫，再交由教師執行教學實驗以檢驗理論與成效。但是，往往因研究者與教師的背景差異太遠，造成兩者討論(discourse)或對話(dialogue)的品質不佳，以致研究結果並無助於教師改進教學。近年來，協同行動研究法(cooperative action research)被認為是解決研究者與研究教師在背景上的差異，而可拉近理論與實際差異的一種研究方法（蔡清田, 1998；陳伯璋, 1988）。

協同行動研究主要的特色是幫助教師藉由反省式的探究(reflective inquiry)與反省式實踐(reflective practice)以釐清教師課堂教學的實務需要，並進而改進教學品質（陳惠邦, 1998；郭重吉、江武雄和王夕堯, 1999）。透過協同行動研究，研究者在真實的數學課室裡可以建構、發展、檢驗、與修正數學教學的理論，教師則可以透過協同或合作的機會，參與研究歷程以增進專業知識。誠如 Baroody (1987)的觀點，教師在數學課堂中兼具「假設的製造者(hypothesis makers)」與「假設的檢驗者(hypothesis testers)」的角色。教師應對學生的解題做預先的假設，然後俟學生解題後，再檢驗是否與原先的假設相符。若此，筆者相信教師不但可以掌握兒童的數學發展實況，也有助於增進教師自身的數學佈題能力。

有鑑於此，為協助國小教師於數學教學歷程中，配合課程革新的需要，調整角色增進教學佈題能力，本研究試圖採用協同行動研究法，探討如何發展教師佈題能力以引導學生進行有意義的學習？進而發掘何種因素將影響國小教師在數學教學歷程中佈題的表現？等問題，以提供未來研究教師佈題與改進國小數學新課程實踐的基礎。

研究方法

本研究旨在以協同行動研究法探討如何在實地教學情境中，發展國小教師的數學佈題能力。茲就研究程序、教師與教學班級、教材與學習概念、教學佈題策略、研究工具、以及資料蒐集與分析等方面說明如下。

一、研究程序

根據張世平和胡夢鯨（1992）的觀點，強調行動研究是一種發展性計畫，須要不斷考核與檢討，才能使行動益形完備，而達解決問題的目的。因此，本研究共執行三個單元，實施步驟是在每個單元執行前提出一種行動方案，以要求教師努力達成，經檢討後再於新單元實施前提出新修訂的行動方案。

本研究所探討的的三個月期間(1998. 08.30 1998.11.30)的實地教學之協同行動研究程序（見圖 1）為：教學前，研究者與教師共同探討有關分數教學文獻、分析教學目標與教學活動、研訂教學佈題策略以及教學行動方案；教學進行時，研究者在教室觀察與錄影，並於教學結束前，研究者與教師討論數學寫作題目；教學後，教師讓學生做寫作問題，以檢驗教學成果；俟教師評閱學生寫作作品後，研究小組共同分析學生作品，藉以瞭解學生的數學知識，並據此檢視佈題策略的成效，並從而修正教學行動方案，以作為下一教學單元（階段）的教學重點。

本研究希望教師在每個單元研究的前半階段（數學寫作之前）擔任「假設的製造者」，參與研擬「佈題策略」、「寫作題目」與「行動方案」；在研究的後半階段擔任「假設的檢驗者」，共同檢驗與分析學生的學習情況，從而提出改進行動方案之道。

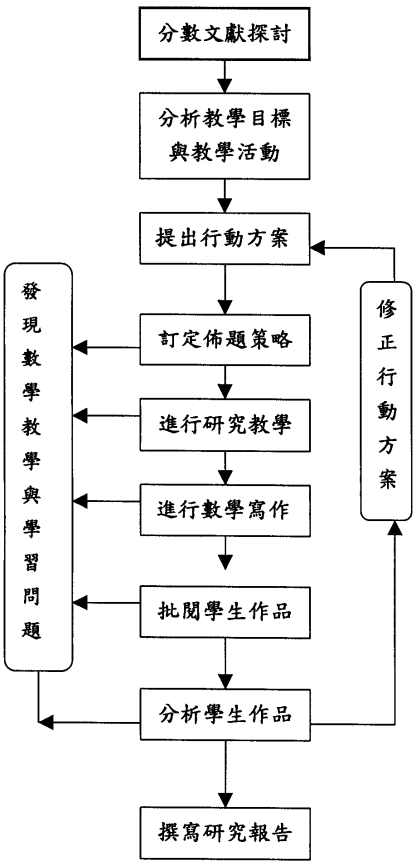


圖 1：協同行動研究流程圖

二、教師與教學班級

參與研究的三位教師皆為國小六年級班級的級任教師，他們都具有 10 年以上教學年資，分別代表不同的年齡層（甲：40，乙：47，丙：33），而且受過正式的師專教育與暑期師院學士班在職進修。過去三人曾參與數學寫作的試探性研究（1995.09 1996. 06），他們認為寫作活動可以幫助學生回顧所學、組織經驗、與整理教材的重點，也可以發現學生的自然想法與迷思概念。除了認為數學寫作要花很多時間批閱以外，也體認到如果要教學者本身設計寫作活動仍需要要學習與領悟。在這段時間，研究者並未給三位教師協助，因此他們在試探性階段的佈題表現，可以被視為整個研究的佈題初始行為。

參與研究的三個班級以甲、乙、丙三位教師的代號作為班級的代號。甲、乙兩班屬市區學校，多數學生的家庭社經背景較好；丙班則屬鄉鎮學校，學生的社經背景較甲、乙兩班的差，學生的家長以農人、工人或做小生意的商人居多。三班學生人數分別為甲班 38 位、乙班 41 位、丙班 40 位。整體而言，甲、乙兩班學生程度要比丙班要好，由於甲、乙兩班屬同一所學校，所以學生素質無甚區別。

參與研究三個班級的學生，自五年級上學期開始已練習過數學寫作的活動，他們在前面單元的數學寫作活動記錄內容，大多數都以反映他們在數學學習活動之「教材難易」、「演算方法」、與「學習困擾」上。以演算方法為例，有學生曾在教完小數除法的單元後（1998 年 3 月 5 日）寫著「只要做到以下幾件事：將小數化成整數，被除數跟著除數移動小數點，要對齊新的小數點，然後只要不計算錯誤就沒問題了。」，多半學生只能在寫作本上呈現出此類的「演算方法」，無法寫出小數單元的知識概念。

三、教材與學習概念

本研究原擬持續進行整學年，但是唯恐造成教師的過度負擔而耽擱教學進度，故只挑選六年級與「數與計算」有關的單元進行教學佈題的研究。又，基於文獻指出，有關分數概念是銜接學習高等數學的重要基礎（劉秋木，1996），教師的教學活動也最易流於演算規則的講解而忽略學生對分數意義的了解(Behr, Lesh, Post & Silver, 1983)。易言之，教師在進行分數運算教學中，佈題較可能傾向使學生精熟算則而非促進其概念的理解。因此，本研究乃針對國小六年級數學有關「分數乘除法」，包含「分數乘法」、「分數除法」、「分數的四則

運算」等三個單元，作為發展教師佈題能力的教材。研究者與教師在教學前，就分數乘除法教材與分數學習概念進行分析，以作為擬訂教學方案的基礎。

(一)分數乘除法教材

Behr, Lesh, Post 和 Silver (1983)指出學校數學介紹有關分數教材時太強調程序性技能與計算的演算法可能導致學習成效低落的原因。Bishop (1989)從文化的觀點看數學教育時，指出有些教材太過於技術取向，僅著重程序、方法、技巧、規則與演算法，這樣的取向不是把數學當作「省思」的學科，而是當作「操作」的學科，無法幫助學生瞭解數學與發展數學意義。此與 Skemp (1978)的觀點一致，亦即許多學生對於數學知識，只有工具性的學習(instrumental learning)，卻沒有獲得關連性的瞭解(relational understanding)。

Bishop 也強調教師真正的需要不是教科書(text)，而是活動(activities)與資源(resources)以幫助學習者發展。將教科書奉為規臬而不思考教學目標與教學活動反而會剝奪了教師省思與成長的機會。Behr, Harel, Post, and Lesh (1990)分析有關數學教材時強調：有關分數（有理數）的單元，應多提供廣泛的經驗以幫助學生分數的學習。換句話說，有關分數的教材缺乏分數運算意義的探討。研究小組檢視國內民六十四年課程標準版課本，認為有關分數單元的教學活動缺失如下：

1.過於重視直接公式的教導

在分數乘法的單元，『分數的相乘即分子乘分子，分母乘分母』；在分數除法的單元，課本很快的就導出『分數除以分數的商等於把被除數的分子、分母顛倒後和被除數相乘的積』，過於重視計算能力，而沒有讓兒童充分的釐清乘、除法的基本概念。

2.教材序列僅作線性截割分配

各年級的分數教材序列安排，基本上僅單純的從數學結構的角度，將分數概念與分數計算，進行線性的截割分配。現行教材缺乏相關概念的學習以進行良好的路徑編織，較高年級的分數教材，沒有重新結構低年級的分數教材（林福來和黃敏晃, 1993；呂玉琴, 1996）。例如，介紹分數除以分數時，並未先溫習分數除以整數與整數除以分數的問題。

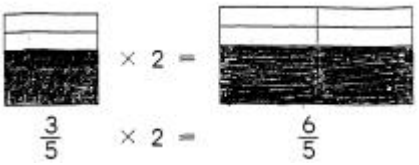


圖 2：$\frac{3}{5}\times 2=\frac{6}{5}$

3.欠缺表徵的多元性

學生必須將一個概念放入各種不同的表徵系統中，且能精確的將一個概念從一個系統內轉換到另一個表徵系統，如此才算是了解一個概念（Lesh , 1981），但課本卻忽略了表徵的多元性，偏重用圖形面積的表徵方式，使學生難以在不同表徵方式間進行轉換，造成許多學生把分數的乘法當做面積＝長×寬的機械式記憶，或將分數乘法看成是區域的分割，此種依照縱橫分割的印象就是部分學生對於乘除法的認識。甚至現行課本也出現 $\frac{3}{5}\times 2=\frac{6}{5}$ 的錯誤表徵（見圖 2），以致於學生從表徵圖可能會誤以為 $\frac{3}{5}\times 2=\frac{6}{10}$。

(二)分數概念的學習

分數是很高階的概念，是往後學習數學的基石，分數有如基礎數學與高深數學的分水嶺（劉秋木, 1996）。兒童對有關分數的學習必需具備的概念是：

1.乘法概念域、與分數的多義性

Vergnaud（1983）在論述乘法概念域

（multiplicative conceptual field）時提到分數的了解與乘法、除法、有理數、小數、線性函數、維度分析（dimension analysis）、以及向量空間（vector space）有密不可分的關係，Vergnaud 強調此等乘法概念域裡各個題材（topics）的內在關係（interrelationship）與相互依賴（interdependence）的複雜度，各個題材的概念發展又需花費一段相當長的時間。

分數可以是「部份-整體」的關係；比：兩個量之間的比較關係；商：兩數相除的結果；數線上的點：分數是數線上的一點；測量：分數中的分子可為測量時單位分量的個數，而分母則為一個測量單位被分割成單位分量時所分得之單位分量的個數；運算：分數可視為一種合成函數。如某數乘以 a/b 要 2 次變化，先增加 a 倍，再縮小 b 倍；由以上幾個關係可以看出分數有多元意義(Kieren, 1976; Dickon, Brown & Gibson,1984; Behr, Harel, Post & Lesh, 1992)。以上幾個子構念（subconstruct）構成了分數的多義性。劉錫麒（1994）指出一些數學符號一方面代表概念，另一方面也用來表徵歷程，就後者來說就是具有歷程或程序性質的概念，因此數學教育家創造了一個「過程概念」的名詞。劉錫麒以 3/4 為例子，說明 3/4 是分數的概念，也代表「除」的過程。學習數學者須具備很彈性的態度來解釋數學符號的多義性。

2.單位化、與正規化

測量的單位與量的大小對於理解數的關係和運算都很重要，單一物體當成一個單位時稱此種單位為單項單位（singleton unit）；而把數個物體或集合視為一個單位時，則稱此種單位為複合單位 (composite unit)（Steffe, 1994）。例如，5/6 在連續量的情況，可以把一個餅看成一個單位，一個餅的 1/6 也是一個單位，5/6 可以看成 5 個 1/6，也就是看成單位的單位，那麼 5/6 本身就是一個複合單位。

一但複合單位建立了，對於給定一個數量就能用單位的字眼以重新詮釋(reinterpret)它，就是 Freudenthal (1983)所說的「把地球的直徑的大小想像成毫米（1 mm），那麼太陽的大小為直徑 10 公分，且與地球距離 10 公尺的球體。」，這種採取一些單位的架構以概念化其他的情境，其實就是正規化（norming），這種正規化的過程，是很普遍的數學思維。

Lamon（1994）更進一步發現，參考單位（reference unit）或單位整體（unit whole）的建立，與用此單位以重新詮釋（reinterpret）新的數量情境，似乎是發展複雜數學概念的關鍵；單位化與正規化在解決比率與比例（ratio and proportion）的問題方面提供了關鍵性的機制（mechanism），也給分數除法教學提供了「被除數是幾個除數（複合單位）」的轉換問題，這樣的觀點，其實是以「包含除（partition division）」的方式來詮釋分數除法的意義。易言之，就把集聚性質的分數（除數）看成是一個單項單位，且把前面的被除數用後面的除數來詮釋的觀念。

四、教學佈題策略

研究小組根據上述分數教材與學習概念分析的結果，歸納三個教學單元的佈題策略的重點：首先，強調不同方式的表徵可以突顯複雜數學不同層面的概念，例如，分數乘法以數線圖的方式不僅可以說明倍數的觀點，也可以呈現「積」到底較原來的「被乘數」大或者小，用「『被乘數』的『乘數』倍」的觀點可以增進學生對於運算意義的了解，以「數個單位圓」的陣列圖表徵（見圖 3），可以突顯「積」與「單位量」的倍數（單位數）關係（Pandey, 1991）。

其次，若能在教科書所採用的方塊圖之外，輔以數線圖表徵分數除以分數，可以突顯兩個分數的倍數關係；採用顛倒相乘的方式介

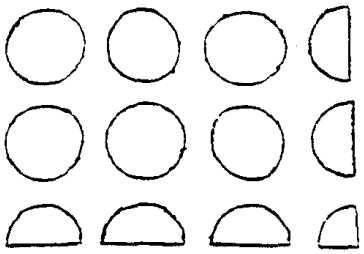


圖3：$3\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{2}$的一種表徵方法

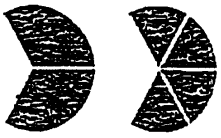


圖4：$\frac{2}{3}\div\frac{1}{6}$的一種表徵方法

紹分數除法雖是簡便，但往往忽略運算的意義。若能用「包含除」的觀點介紹，再用圓形圖（piece pie）來表徵「被除數是幾個除數」的觀念（見圖4），那麼分數除以分數的意義，將會更容易瞭解 (Sharp, 1998)。

再者，介紹分數四則運算式的演算程序之前，先前的整數的四則運算有必要應予複習，以喚起舊經驗，且易將其與新知識連結；若能將分數四則運算的計算式子與日常生活的例子相連結，學生較能把式子意義化（sense making），因此採用「擬題」的方式讓學生解題（梁淑坤, 1994）。

五、研究工具

所有的質性研究的成果都是由研究者與參與者的互動性創造而得；參與者跟隨研究者詮釋資料與建構意義，其實參與者就是在「做」研究（Olesen, 1994）。本研究的三位教師的意見與教學，以及教師與研究者的互動關係，都會直接或間接影響研究的結果與品質，基於「研究者即研究工具」（The researcher is the instrument）」的觀點（Guba & Lincoln, 1981；高敬文, 1996），本研究小組可以說是本研究的首要研究工具；其次，由於本研究以數學寫作題目作為蒐集學生學習成果與檢證佈題成效的資料來源。因此，本研究的主要的研究工具包含研究小組與數學寫作題目。

研究小組

研究小組由筆者、參與研究者（一位教育系教授，專長是教育心理學與班級經營）、及三位教師組成，五位成員彼此熟識，先前曾有多次的合作研究的經驗。是研究小組主要任務在進行探討文獻、分析教材與學生概念、擬訂教學行動方案、教學佈題策略與數學寫作題目，以及檢討學生表現與行動方案的缺失。

數學寫作

數學寫作在數學學習上有助於促進學生了解程序性與概念性知識的功能；學生也能在寫作的時發現自己在想什麼？學到了什麼？什麼是重要的？寫作有助於學生組織與整理數學概念，並且在一些觀念中尋找關連，尤其是連結直覺的想法，數學語言、與抽象符號（Miller, 1991）。國內亦有研究顯示，數學寫作可以作為增進學生瞭解數學的有效方法（周立勳和劉祥通, 1998; 魏宗明, 1997）。

Miller (1992)更進一步指出，在實踐數學寫作活動的過程中，教師是可以增進對學生的了解，也可以影響教學練習（instruction practice）。例如，Miller 請學生以自己的話解釋下列問題的意義：A.為什麼 0/5 = 0？B.為什麼 5/0 是無意義？C.為什麼 0/0 是不定數？這些問題是要他們說明為什麼要訂這些規則？但是不少學生把規則當作理由來說明。於是教師從學生的回答中發現了教學的問題，也體認到學生了解數學的重要性。

本研究所實施的數學寫作意指在數學教學中促使學習者解釋、省思、回顧、組織、或連

結數學的書寫與記錄活動。運用數學寫作的目的一方面在幫助學生學習數學；另方面對教師而言，期能藉由分析學生寫作作品，協助教師瞭解學生對於個別單元意義的掌握。本研究數學寫作先由教師根據教學方案設計，再經研究小組討論確定後實施。

六、資料搜集與分析

本研究採取文獻探討、觀察紀錄、正式座談、非正式訪談、數學寫作紀錄、及研究者回顧等策略來收集資料。資料來源式包括觀察、錄影轉譯、訪談、寫作記錄、座談會記錄的資料。

由於研究過程中有關分數運算三個單元教學前，研究小組分別於 1998 年 8 月 30 日、10 月 7 日與年 10 月 29 日進行三次的座談會，共同探討文獻與分析教材，並討論教學方案；而在各單元教學結束學生寫作批閱後，研究小組又分別於同年 9 月 15 日、10 月 22 日、11 月 12 日舉行三次檢討會。以上的資料除了載明日期外，並以「探」、「觀」、「檢」、「訪」、與「作」註解以區別從文獻探討、訪談、教室觀察、檢討會與學生寫作 作業得來的資料，例如「981119 作」代表 1998 年 11 月 10 日作業單上得到的資料。關於學 生資料的記錄尋求教學者的認同，對於三位教師的描述尋求筆者與參與研究者對資料的共識，也就是從以不同研究者觀點的交叉比對，以克服筆者主觀之見解。

結果與討論

本研究主要的重點在探討教師佈題能力的成長，為了使研究資料能完整而清晰的呈現研究過程，以下將就研究進程分教學研究前期、研究歷程、以及教學研究後期三個階分析並討論研究結果。

一、教學研究前期

(一)研究前教師的教學表現

根據研究者實地觀察與檢視此階段三位教師參與研究教學的記錄，就教學態度而言，三位都是很認真教學的教師，對於數學寫作活動都表示願意在課室裡嘗試。

甲教師的教學方式，強調計算的熟練與習題的精熟，在教學的角色上，她是「演示者」與「解說者」，不是「佈題者」；在教學內容上，強調「程序性的知識」，不是「概念性的知識」；在教學活動進行時，常常直接告訴學生解題方法，例如，用 5 元和 10 元湊成 200 元，有多少種湊法？甲老師就直接畫出表格、填上數字、然後講授解法。在教學活動之後，習慣替學生作結論與建議；在分組教學方面，雖有分組的形式，卻缺少討論或辯證的互動。

乙教師較有設計教學活動以發展數學意義的風格，她的教學較有「教師佈題－學生解題」的角色區隔，且善於在佈題之後「質問學生」。對於問題的性質能夠掌握並能舉一反三，舉例來說，研究者在介紹「請找出 5.1 和 5.2 之間的 15 個數」的寫作例子，以幫助發展小數的稠密性，她就自己佈一個「請找出 1/2 和 1/3 之間的 15 個分數」（見圖 5），這一題也是可以發展分數稠密性的認識。在分組教學方面，採用組間競賽以激勵學習的氣氛，但缺乏策略以促進組內的討論與對話。

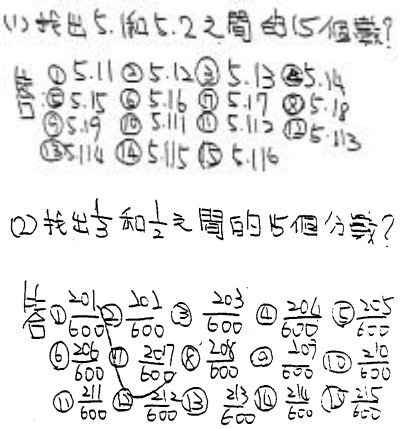


圖 5：小數與分數稠密性的佈題

丙教師在教學上花較少的時間在計算演算法的脈絡，很快地把演算程序告訴學生，把省下的時間用在應用問題的教學上面。在他教應用問題時經常鼓勵學生用「圖解法」幫助解題，例如，小英有三件上衣，及四條裙子，請問她有幾種穿著的方法？丙老師鼓勵學生把想到的所有方法都畫出來。在分組教學方面，他沒有採用分組教學，但是他會把同學的解法提出來討論，因此班級師生的對話卻是熱絡，他也勤於追問研究者的意圖，並在教學上配合與改變。

(二)教師對佈題策略的意見

課本以圖形面積的表徵方式介紹分數乘除法，研究者建議增加數線圖表徵法教學，希望學生從多重脈絡中學習，或透過不同的表徵方法介紹概念，可增進學生對意義的瞭解，至於時間不太允許，有關計算熟練的部分，請教師在家庭作業的部分加強以彌補上課練習之不足。研究者並請一一舉例說明畫表徵圖，算式意義、以及概念教學，期使從文獻分析得來的「理論」，得以「實踐」。以下說明教學前三位教師對策略的意見：

甲教師說：「擔心學生因不同表徵方法會造成學生混淆而無法統整。」(980830 探)。二位研究者以「從多重表徵的脈落中學習有利於知識的抽象化」的觀點（劉錫麒, 1993），鼓勵甲教師試試看，她才同意用不同的表徵方法介紹概念。

乙教師於介紹帶分數乘以帶分數乘法用圖(3)方法呈現分數乘法的意義時質問：「這樣的方法與演算法有什麼關連？」(980830 探)，事實上，這種方法主要是加強學生對於帶分數乘法意義的瞭解，其實也可以幫助瞭解演算法意義，例如，計算式子

$$3\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{35}{4}$$

此一計算過程所使用的數據，可以從圖(3)發現：「從橫的面向來看有 7 個 1/2，從縱的面向來看有 5 個 1/2，最後，從陣列(array)來看有 35 個 1/4」，經此說明後，她很願意試試看（980830 探）。

丙教師起初以為計算的意義不重要，他說：「只要讓學生知道怎樣算就好了，重要的是應用問題教學方面的引導」(980830 探)，研究者的說明是，計算本身也是問題解決(problem solving)，把計算也當作解題來教學，讓學生瞭解計算演算方法的道理也是教學的重要目標，後來丙教師接受了這樣的觀點也樂意配合實施。他對研究者提出的每個佈題策略都很認真的思考，且有不瞭解時會坦然地提出疑問。

二、研究歷程

本研究歷程依兩個主軸探討：其一是教學行動方案的改進，另一是佈題策略的教學表現，茲分段說明如下：

(一)教學行動方案的改進

行動研究是從不斷的行動與反省修正中逐步獲得預期結果，並從前一階段的行動方案，引發下一階段的方案，如此繼續不斷的修正歷程（Elliott, 1979）。過去的分數教學都太強調驗算法的熟練，疏於對概念性的探討，以致學生對分數的學習感到困難（林碧珍, 1990; Behr, Post, Harel & Lesh, 1993），有鑑於此，本研究首先要求三位教師的教學要著重概念取向（concept-oriented）。

第一階段（分數乘法）：強調概念性教學

本單元是分數乘法，從文獻探討的「分數教材的分析」，與「分數概念的學習」的分析，研究者提議以「概念性教學」替代傳統「演算法教學」，也就是不直接告訴學生公式與演算法，引導學生了解「分數乘以分數」式子的意義。此單元寫作問題及學生的寫作表現分述如下：

1. 請問$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}$的意義是什麼？並請兒童以數線圖表示。

學生直接把被乘數、乘數、與積分別畫出來（見圖6），但沒有呈現出乘法的關係，且3/5是從5公分中找出3公分，3/4是從4公分中找出3公分，9/20是從20公分中找出9公分。造成9/20的長度大於3/5與3/4，第一條直線上的整體單位1是5公分，而第二條直線上的整體單位1是4公分，第三條直線上的整體單位1是20公分，這種畫法的學生甲班有1人，乙班有2人，丙班則有6人之多，如此突顯出分數對這些學生來說是「分成幾等分中的幾分」的概念，以上的學生也顯示了每個單位「1」所代表的量一直都在變動。其他的畫法與課本的例子一樣。

2. $\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$有（2）個$\frac{5}{6}$，是$\frac{5}{6}$的（2）倍。

這位同學大概受到「顛倒相乘」的影響，把分母的數字填進了（ ）內。而另一位的答案則是：(1) $\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$有$\left(\frac{5}{12}\right)$個$\frac{5}{6}$，$\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$是$\left(\frac{1}{2}\right)$個$\frac{5}{6}$。

這位同學的分數乘法觀念是對於「幾個幾」較不瞭解，對於「倍數」的語言還算熟悉，但是，所以把相乘的積5/12填進了（ ）內。以上兩位同學尚無法把分數當作一個單位，或者說看成一個新的單位呢！

三個班級的學生答錯「$\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$有（ ）個$\frac{5}{6}$」的問題佔了35%，答錯「$\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}$是$\frac{5}{6}$的幾倍」的問題佔了18%。大體上三位教師都依照教學佈題策略執行，且強調概念性取向的教學，但是中下程度的學生的寫作表現並不如預期的理想。為了使這些學生能夠獲得有意義的學習，本研究的參與研究者提議加入「小組合作學習」於教學方案中，此一提議獲得研究教師的認同後，在下一個單元（分數除法）實施。

第二階段：「小組合作學習」策略之運用

本單元是分數除法，研究者認為「分數除以分數單元」仍然要以「概念性教學」為基調。為了使學習成果更普及到中下程度學生，此階段教師運用小組合作學習方式進行教學，小組中有同學理解了除法概念的意義，必須負責告訴同組同學，然後教學者抽問小組中的成員以了解概念的學習情況。此單元寫作問題及學生的寫作表現分述如下：

例1. $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$是什麼意思？如何算？為什麼？

大部分的同學都用畫方格圖來表示分數相除的意思，約只有20%的同學能正確用「幾個$\frac{2}{5}$」的觀點解釋$\frac{3}{4}$，而丙班有位同學卻把$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$解釋成$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$，「將$\frac{3}{4}$個蛋餅分成5等分，取其中的2等分」。（見圖7）

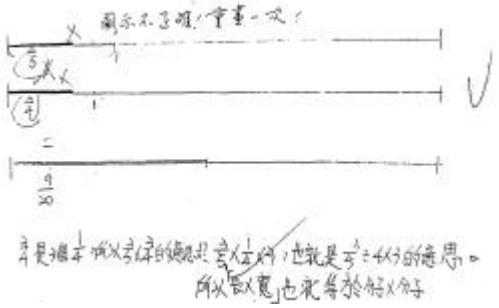


圖6：$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$的錯誤表徵



圖7：$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$的錯誤解釋

這位學生可能受到除法的「等分概念」影響，看到「÷」的符號就想到「分」，至於要分幾分呢？於是說分「5 份」，取其中的 2 份。研究者請三位老師利用小組討論這樣的「解法」，後來三個班的各組幾乎都有同學能指出錯誤之所在，同學對此題的迷思想法，老師們留下深刻的印象。

例 2. 計算 $\frac{7}{24}\div\frac{7}{12}$ 並用畫圖表示出它的意義

這一題甲、乙兩班沒有以這一道題進行寫作，丙班有 6 位同學畫出 12 格中的 7 格，也畫出 24 格中的 7 格（見圖 8），他們的 7 是固定的，然後發現分母從 12 變成 24，於是獲得 2 的答案。這樣的作法正是表現了把分數看成是「部分－全體」的關係，以上的學生也顯示了每個單位「1」所代表的量一直都在變動。

本單元雖以「小組合作學習」配合第一階段「概念性教學」策略，但是學習效果仍不夠理想。本研究的參與研究者提議要張貼與表揚良好的寫作作品，使「好的想法」透明化，讓更多的學生分享果實，小組乃決定以「分享寫作成果」作為下一階段的教學方案。

第三階段：分享寫作成果（分數四則單元）

本單元是分數的四則運算，涵蓋了前面兩個單元的內容，也包括分數的加減法與括號的處理。研究小組認為本單元的學習問題不在於計算，而是在於四則運算的意義 (981029 探)。因此採用「擬題」的方式讓學生探討四則運算，鑒於前兩個單元的教學方案的學習效果仍不夠理想，因此本單元的教學方案不僅要「概念性教學」、與「小組合作學習」，並將好的寫作作品解析給同學了解外，另外張貼於佈告欄給同學分享。此單元寫作問題及學生的寫作表現分述如下：

例 1. 請寫出一個題目它的計算式子是 $\frac{5}{8}\times\left(4-\frac{4}{15}\right)$。

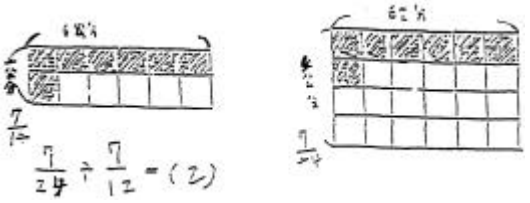


圖 8：$\frac{7}{24}\div\frac{7}{12}$ 的錯誤表徵

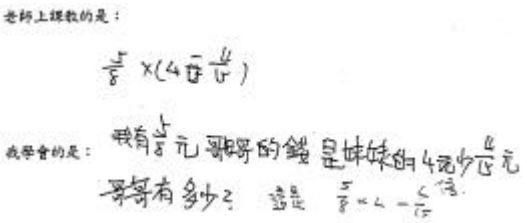


圖 9：$\frac{5}{8}\times\left(4-\frac{4}{15}\right)$ 之錯誤擬題

乙班有位同學這樣寫著「我有 5/8 元，哥哥的錢是妹妹的 4 元少 4/15 元，哥哥有多少元？（見圖 9）對於這樣的敘述，吾人可以發現這位同學所指的「妹妹」與「我」應是同一個人，且 5/8 元與 4/15 元與實際不符，這樣的擬題反映了同學對於計算式子的意義是不瞭解的。

雖然如此，能回答此問題的學生約佔 55%，但是能用連續量來配合分數，且正確回答問題者只有 10%，例如，「甲錶每天快 4 分，乙錶每天快 4/15 分，過了 5/8 天相差多少？」，這類的同學的敘述反映出他們已具備了「分數倍」的概念。

例 2. 請寫出一個題目它的計算式子是 $2\frac{3}{4}\div\left(\frac{1}{6}\times1\frac{1}{2}\right)$。

根據研究者的統計，能正確回答此題的學生甚少。甲班 7 位，乙班 8 位，而丙班只有 1 位，困難的原因可能是在以 $\left(\frac{1}{6}\times1\frac{1}{2}\right)$ 為單位的觀點未能建立，卻又得與 $2\frac{3}{4}$ 做倍數的比較，甚至說以「$\frac{1}{6}\times1\frac{1}{2}$」為單位去解釋 $2\frac{3}{4}$ 是

幾個$\left(\frac{1}{6}\times 1\frac{1}{2}\right)$的困難，也就是說，學生往往生往往對於指認單位（identifying unit）有相當的困難，這個發現與 Hunting (1983),Lamon (1989), Leinhardt (1988)以及 Mack (1990)的研究發現相符合。

(二)教師在佈題策略的教學表現

甲教師

研究者從實地教學情境中發現，甲教師課堂中反覆的強調一些原則與程序，少有促進學生連結到先前相關的的經驗，仍拘泥於演算法的傳授，無法脫離「技能」的教學，事實上，這樣的教學對於學生的段考或學期考試是有一定程度的幫助，她的教學可說是刻板與傳統的。易言之，教師是扮演「演示者」與「解說者」的角色，很強調演算法或關鍵字詞以決定解題策略，例如，她佈有關於 3/5×3/4 這類題目的策略是，以解釋的方法說明 3/5 的 3/4 其中「的」意思是要用「乘」來運算，將 3/5 分成四塊，其中的三塊，也就是 (3/5) ÷ 4 × 3 的意思（980910 觀）；當介紹「乘數」<1 的時候，積<被乘數的法則時，只告訴學生乘以小於 1 的數會越乘越小，乘以大於 1 的數會越成越大，如此只告訴演算法則卻缺乏與情境(context)連結的教學情節出現很多（980910 觀）。

甲教師上課方式始終忙著解說課本的知識，希望學生能消化與吸收數學知識（981020 觀），如此過多的解說減少了學生解題前的思考，也忽視給學生嘗試解題的重要性，她的角色似乎是在傳授知識，而不是幫助學生發展數學概念。研究者寄望她少解說，讓學生從討論或活動中得到結論，但是可能她的教學信念較傳統觀使然，抑是過去的教學習慣「積重而難反」，結論總是從她的口中說出，接著問學生「對不對？」，這種「一邊上課，一邊講解」，與「問問題—學生簡答」的教學方式，學生很容易依照教師所引導的問話，去回答教師所要的答案，這樣的問題就是 Brissenden (1988)所說的「裝飾性的問題（rhetorical question）（p.18）」，甲教師的佈題教學確實較少追問學生「何以然？」。

乙教師

乙教師能明瞭教學目標，按部就班的進行教學活動，演算法則的由來都有來龍去脈，然後才介紹格式化（約定成俗）的算法（980910 觀），她會依照研究者提供的教學佈題策略進行教學，也能掌握問題的核心，繼續追問學生的想法，例如，她對於分數乘法的教學，除了用「方塊圖」以外，再用「數線圖」幫助學生了解，對於分數除法的教學則以「包含除」的觀點介紹給學生，因此她能追問 3/4 是含有幾個「2/5」(981022 觀)。另外她也懂得利用問題情境幫助學生瞭解計算式子的意義，例如，她能以「甲水管每小時排入 3/8 公升水量，乙水管每小時排入 4/7 公升水量，甲、乙兩水管一個同時注入一個 $2\frac{3}{4}$ 公升的容器，請問需要多少小時？」的應用問題，幫助學生了解 $2\frac{3}{4}\div\left(\frac{3}{8}+\frac{4}{7}\right)$此四則運算式子的運算意義（981029 觀）。

但是她較少關照到程度中下等學童的想法。換言之，對於程度較好學生的想法，乙教師較少再次佈題，以提供機會讓程度差的學生分享與學習，於是對於程度較差的學生只有用考前的多做模擬試題以增進應考的能力了。「趕進度的原因，需預留一些時間，以便作考前複習（981105 訪）」是乙教師沒有給程度差者再次佈題的解釋，但是過去較不習慣地在課室中追問學生有關其他同學的想法，可能才是另一個原因。

丙教師

丙教師相較起來就特別瞭解研究者的意圖，教學時也很能利用程度較好的答案，希望

程度較差同學瞭解，但是在教學的角色上，也不免跟一般教師一樣，容易扮演「解題者」或「解說者」的角色（980912 觀，981014 觀），因此研究者要經常提醒他謹守「佈題者」與「討論促進者」的角色；「少做解說，多問學生」；並利用「合作解題」與「共同討論」的氣氛中獲得問題的答案。

值得一提的是，丙教師能自己設計問題情境讓學生了解算式式子的意義，例如，介紹分數乘以大（小）於 1 的分數會變大（小）時，他用「王小明平均一小時走 $3\frac{3}{5}$ 公里，$1\frac{3}{4}$ 小時走多少公里？」的問題說明 $3\frac{3}{5}\times1\frac{3}{4}$ 的「乘積」會比 $3\frac{3}{5}$ 大？(980912 觀)；再者，為了區隔題意上的不同之處，他的佈題例子，**1.**鐵絲 $\frac{4}{5}$ **m** 重 **60** 克，$\frac{2}{3}$ **m** 重多少公克？**2**. 鐵絲 $\frac{4}{5}$ **m** 重 **60** 克，$\frac{4}{5}$ **m** $\frac{2}{3}$ 的倍重多少公克？以上兩題有什麼不同？（981017 作，見圖 10）他的佈題用意不在於計算答案的正確與否，而是要檢驗學生是否瞭解題意與分數乘法的意義。

在異分母分數除法的教學時，丙教師切實地以「公分母」為單位的觀點介紹分數除法，例如 2/3÷3/4 利用等值分數的轉換變成 8/12÷9/12，然後教師要提問「8/12」與「9/12」是幾個「1/12」？學生經由這樣公分母的單位量轉換而獲得 8 ÷9 的答案，就是八十二年版數學新課程所強調的「單位量轉換」的觀點（甯自強，1993b）。令人特別欣慰的是，丙老師已從探討文獻的座談會中學到了「單位量轉換」的觀點，並切實地運用於數學課室的教學了。

三、教學研究後期

本階段，研究小組經過三次共同討論學生的寫作作品，寫作作品的討論除了作為提供教學方案改進的依據外，也作為教學者對於佈題策略的省思，茲將三位教學者省思與成長，以及研究者的反思分述如下：

(一) 教師佈題策略的省思與成長

甲教師

甲教師雖然常常給學生寫作，也勤於批閱學生的寫作作業，但是對於學生較粗造的或不對的自然解法，她無法釋懷的讓研究小組提出來討論，她總是說：「這些觀念我已再三強調過了，他們還犯下這些錯誤，這些學生真是粗心。」（981022 檢）。其實，這些錯誤有可能不是粗不粗心的問題，而是學生數學概念有了偏差或有迷思概念，學生呈現出偏差或迷思概念並不必然教學不對。研究小組將迷思概念提出討論的目的，是希望從學生的寫作單上的解題表現以修正佈題策略並檢討行動方案。

甲教師說：「教導學生最經濟、最快速的演算法對現行考試才是最有幫助的（981022 檢）」，跟很多教師一樣，甲教師非常注重學生的考試成績，她在考試前給很多的單元測驗卷給學生練習，然後給予訂正答案；正如大家所知，給足夠的測驗練習，考試成績自然會好的，但是提高考試成績不是本研究的重點，執行研究小組訂定的佈題策略對於幫助學生在現行考試獲得高分或許沒有直接的助益，可能是甲教師過於重視學生的成績，認為本研究的佈題策略，對於考試幫助不大，所以她沒有認真的思考佈題策略的用意，或許這一點也是甲教師在教學佈題方面比較沒有進步的可能原因之一。

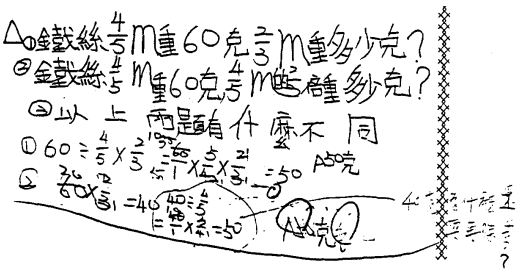


圖 10：區隔 $\frac{2}{3}$ m 與 $\frac{2}{3}$ 倍的佈題

乙教師

乙教師在教學時就是很善於質問學生，在研究期間她扮演很好「佈題者」與「討論促進者」的角色，對於研究者提供的教學方案與佈題策略她大致能忠實地執行，也很能掌握研究的意圖，並且在研究小組討論在討論學生的解題表現時提出很多的意見，例如，對於一位同學以「兩條數線並排的方式」呈現分數乘以分數的意義，雖然該同學並未表徵完整（見圖 11），例如，圖中 4, 8, 12, 16, 20 應該是代表座標點的位置，而不是區段的長度；3/4 應該寫成 3/4×3/5，否則 3/4 大於 3/5，位置的左右次序應該顛倒才是。

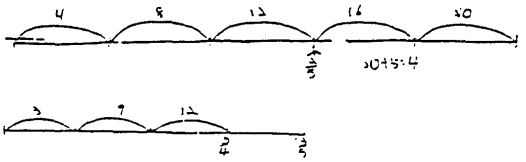


圖 11：$\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}$ 的錯誤表徵

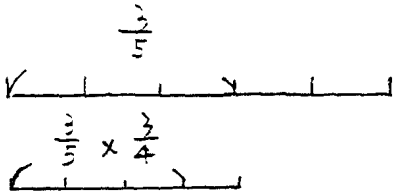


圖 12：$\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}$ 的建議表徵法

雖然如此，乙教師卻認為這種「以兩條數現呈現分數乘以分數的方式」，可以展現與與「被乘數」及「乘數」的關係，是一種很好的表徵方式，值得推廣給其他同學參考。易言之，她對原來以「用一條數線圖表徵以幫助學生瞭解分數乘法的意義」，建議改以「兩條數線並排的方式」呈現（見圖 12），將有更好的效果（980915 檢）。實際上，第一條線呈現整數「1」與「被乘數」的位置（大小）關係，而第二條線可呈現「被乘數」與「積」的位置（大小）關係，最後可比較「積」與整數「1」的位置（大小）關係。本研究給她最大的收穫，她認為是，從共同探討文獻中了解了分數的特質，也獲得其他有助於學生對分數意義了解的表徵方式，也從寫作作品中領略到學生的迷思概念，尤其是在分數四則單元裡讓學生先針對計算式子練習出應用問題，然後才做四則運算的教學，她認為如此可以幫助學生瞭解分數四則運算的意義。（981112 檢）。

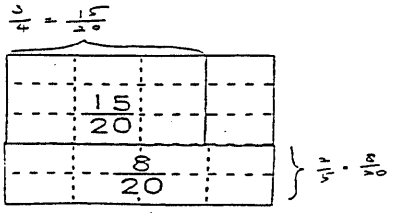


圖 13：課本上 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$ 從橫重疊的圖示

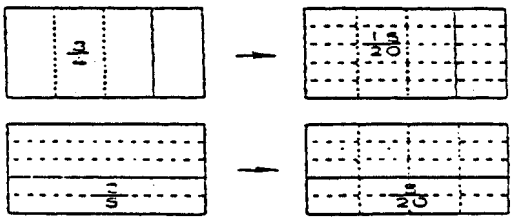


圖 14：$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$ 的兩個縱橫方塊的建議圖示

丙教師

丙教師認為以數線圖介紹分數的除法的缺點是學生不易在數線圖上畫出以公分母為單位分數的等分圖，且數線圖的表徵法與分數除法的計算演算法的關係，對於多數學生來說是不易連結的（981022 檢）。對於課本中採用縱橫的重疊方式介紹分數除法（如圖 13），學生可能會有不易察覺被乘數與乘數的困擾，於是他建議改用兩個縱橫的方塊圖以對照兩個分數的倍數關係 (981022 檢)（如圖 14）。

雖然如此，許多學生表徵分數除法時，出現兩個圖形所代表的「1」大小不相等，1 的單位一直在變動，經過小組分析學生的寫作作品之後，丙教師認為異分母分數的除法的教學，宜循序漸進佈題，先佈同分母的問題，其次，佈有倍數關係的異分母問題（例如，$\frac{1}{2}\div\frac{2}{6}$），最後才佈無倍數關係的異分母問題（例如，$\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}$）。易言之，就是採取階梯式的「分段佈題」。

對分數四則運算的單元，課本是透過應用問題將分數四則運算帶進來，然後把計算式子當作練習題。本研究的佈題策略是先讓學生試著去擬計算式子的問題，然後請同學共同修正較差的作品，而丙教師對於優良的寫作作品，除了在課堂表揚外，也展示於布告欄供其他同學學習（981109 觀）。其實，他已懂得要提供分數計算式子的應用情境給其他同學觀摩，以促進算式與應用問題的連結。特別是，對於「請寫出一個題目它的計算式子是 $2\frac{3}{4}\div\left(\frac{1}{6}\times1\frac{1}{2}\right)$。」的問題，甲班一位同學的答案是「有長方形體積是 $2\frac{3}{4}$，它的高是 $\frac{1}{6}$，長是 $1\frac{1}{2}$，請問它的寬是多少？」（見圖 15），這樣的回答可以說是沒有缺陷且非常有創意的，他的答案是可以幫助教師解釋四則運算式子的意義，丙教師在檢討會上特別欣賞這位同學的創意並提議給予讚揚，並給學生討論好讓更多的同學分享。

(二) 研究者的反思

綜合以上分析，三位教師大致上都能配合行動方案的構想與批閱學生的數學寫作。不過，甲教師可能因為數學結構知識的不足，抑或因數學教學信念持較傳統的觀點使然，甲教師的佈題能力並未有明顯的改進。Clark & Peterson（1986）認為教師持有理論與信念的

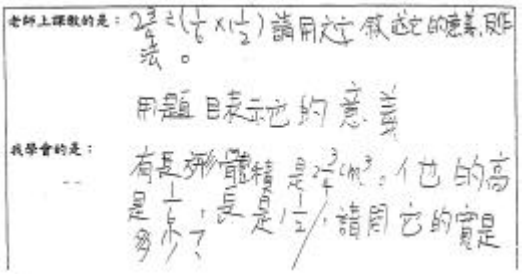


圖 15：$2\frac{3}{4}\div\left(\frac{1}{6}\times1\frac{1}{2}\right)$

系統影響他們教室裡的知覺(perceptions)、計劃 (plans)、與行動 (actions)。職是，甲教師的佈題能力沒有獲得明顯改善或許就是理論（數學結構知識）與信念（數學教學信念）影響了她在教室裡的教學行為。而乙、丙兩位教師可能從教學前佈題策略的討論，理解了分數教材的缺失以及獲得了分數概念的學習知識，進而增進了數學教學方法的認識，此兩位教師的教學佈題的能力獲得較大的改善。

Wilson, Shulman 和 Richert (1987)在教學想法與行動的研究裡特別強調：省思(reflection)與新理解 (new comprehension)的重要性。Powell 和 Lopez（1989）則強調：數學寫作是一種幫助學生省思經驗成為想法的有力工具。分析學生的數學寫作可以幫助教師省思教學問題，省思的結果若產生了新理解，那麼數學教學的佈題能力就可能獲得提昇。乙、丙兩位教師從教學與教學後學生寫作作品的檢討會上獲得了學生的解題想法與迷思概念，紛紛提出建言與改進意見，表現出有能力省思他們過去的數學教學的重心與數學佈題策略的缺失。

結論與建議

本研究從三位國小教師在國小六年級數學課程有關分數乘除法三個單元的教學歷程表

現，藉由協同行動研究法探討發展國小教師數學佈題能力的可能性，並試圖進一步發現影響佈題能力發展的因素。整體而言，三位國小教師在研究過程中了解如何扮演佈題者的角色，佈題能力可說獲得了改善。同時，從學生的數學寫作的表現檢驗教學成效觀之，教師對佈題策略大抵能進行反省並提出改進意見。因此，採用研究者與教學者合作的協同行動研究以發展教師佈題能力是值得去努力的。

從研究教學過程的觀察，雖然三位教師大體上已把佈題策略的主要觀念在課堂上引導與討論，但是從學生寫作作品的成果來看，許多中下程度的學生還是沒有因教學的改變而獲得益處。Vygotsky（1978）提倡利用最近可能發展區（zone of proximal development）的觀點幫助學生學習的觀念，也就是說一個學生若有適當的他人協助，他的學習會有意義與獲得發展的。這個觀念的落實就是在數學的課堂裡，由教師安排程度好的學生的學習成果給程度差者分享。研究者曾鼓勵參與研究的教師多加利用，但是三位教師不太習慣使用，也較少針對程度差者再次的佈題，這或許是許多學生的分數直觀概念沒有效獲致顯著改變的關鍵原因。

Pollard 和 Tann (1993)提倡社會建構論以幫助學生學習時強調「教師應該適時的建構性的介入（constructive intervention），做個省思的關係人（reflective agent）」，從這個觀點來衡量三位參與研究的教師在研究過程的佈題情況仍有未臻理想之處。探諸教學現實，教材份量可能是主要的影響因素。因為現行教材內容很多，教師為了趕課以及給學生做考前的複習，於是教學上的佈題技巧做的還不夠徹底，許多的對話似可繼續進行以幫助學生發展數學概念，惟受制於趕進度的關係，而無法暢然的進行再次的佈題。換句話說，教材份量的壓力框住了教師的教學方法，致使新的教學法無法有效的實踐。

最後階段是研究小組分析學生作品，藉以檢討與修正原來的行動教學方案，由於一年的研究期限，本文並未探討二年後此三位教師如何教這些單元，以致未能檢視他們的佈題能力是否真正的改進。因此，後來此三位教師兩年後如何教這些單元？他們的佈題能力是否顯著的提昇？是後續可以繼續探討的研究問題。

致　謝

本文的完成承國科會的贊助（計劃編號：NSC-88-2511-S-023-003），及三位教師研究教學的全力配合，復蒙審查委員的不吝指正，在此一並致上誠摯的謝意。

參考文獻

1. 呂玉琴（1996）：數與計算教材設計對分數概念的處理。國立嘉義師範學院 84 學年度數學教育研討會論文彙編。
2. 周立勳和劉祥通(1998)：寫作活動對國小數學解題能力的影響。教育研究資訊雙月刊, **6**(3), 46-62。
3. 周筱亭（1995）：從解題看新課程教師在職教育。國立嘉義師範學院 84 學年度數學教育研討會論文彙編。
4. 林碧珍（1990）：從圖形表徵與符號表徵之間關係探討國小學生的分數概念。省立新竹師院學報, **4**, 295-347。
5. 林福來和黃敏晃（1993）：分數啟蒙課程的分析批判與辯證。科學教育學刊, **1**(1), 1-27。
6. 高敬文（1996）：質化研究方法論。台北：師大書苑發行。
7. 張世平和胡夢鯨（1992）：行動研究。賈馥茗、楊深坑主編：教育研究法的探討與應用。台北：師大書苑發行。

8. 郭重吉、江武雄和王夕堯（1999）。輔導中學數理教師設計教學活動之行動研究(2/3)。國立台東師範學院行動研究國際學術研討會彙編。
9. 陳伯璋（1988）：教育研究方法的新取向的研究方法。台北：南宏圖書。
10. 陳惠邦（1998）：教育行動研究法。台北：師大書苑。
11. 黃政傑（1991）：課程設計。台北：東華書局。
12. 甯自強（1993a）：國小數學科新課程的精神及改革動向－由建構主義的觀點來看。科學教育學刊, **1**(1), 101-108。
13. 甯自強（1993b）：「建構式教學法」之教學觀－由根本建構主義的觀點來看。國教學報, 5, 32-41。
14. 甯自強（1993c）：單位量的變換（一）：正整數乘除法運思的啟蒙。教師之友, **34**(1), 27-34。
15. 甯自強（1997）：數學教學實踐課程的開發。國教學報, **9**, 265-278。
16. 劉秋木（1996）：國小數學科教學研究。台北：五南圖書出版公司。
17. 劉錫麒（1993）：數學思考教學研究。台北：師大書苑。
18. 劉錫麒（1994）：從國小新數學課程標準的基本理念談討論活動的重要。國教園地, **50**, 4-7。
19. 歐用生（1996）：課程與教學革新。台北：師大書苑。
20. 蔡清田（1998）：教師如何透過行動研究成為研究者：「教師即研究者」的理想與實踐。國立中正大學教學科技研討會論文彙編。
21. 魏宗明（1997）：國小實施數學寫作活動之研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所未出版碩士論文。
22. Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking*. New York: Teachers college, Columbia University.
23. Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers : An integration of research* (pp.13-48). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
24. Behr, M. J., Harel, T., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and pro-portion. In D. A. Grouws, (Ed.): *Handbook of rearch on mathematics teaching and learning* (pp.296-333). New York : MacMillan.
25. Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process*（pp.91-126）. New York: Academic Press, Inc.
26. Behr, M., J. Harel, T., Post, T. & Lesh, R. (1990). On the operator concept of rational number: Towards a semantic analysis. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Boston, MA.
27. Bishop, A. L. (1989). *Mathematical enculturation*. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.
28. Brissenden, T. (1988). *Talking about mathematics: Mathematics discussion in primary classrooms*. Oxford, England: Basil Blackwell.
29. Clark, C. M., & Peterson, P. L. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 255-296). New York: Macmillan.
30. Dickon, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's*

guide to recent research. Oxford, England: Schools Council Publications.

31. Elliott, J. (1979). Implementing school based action-research: Some hypotheses. *Cambridge Journal of Education*. *9*(1), 55-71.
32. Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel.
33. Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). Effective evaluation: Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches. San Francisco: Jossey-Bass.
34. Hunting, R. P. (1983). Alan: A case study of knowledge of units and performance with fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(3), 175-180.
35. Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of ration number. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Paper from a resarch* (pp.99-142). Athens, Georgia: The Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics.
36. Lamon, S. J. (1989). *Ratio and proportion in Preinstructional cognitions*. Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin, Madison.
37. Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-121). Albany, NY : SUNY Press.
38. Leinhardt, G. (1988). Getting to know : Tracing students' mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist, 23*(2), 119-144.
39. Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 235-264.
40. Leung, S. K.,& Wu, R. (2000). Sharing problem posing and problem solving at home through diary writing. *Australian Primary Mathematics Classroom, 5*(1), 28-32.
41. Leung, S. S., & Wu, R. (1999). Posing problems : Two classroom examples. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(2), 112-117.
42. Leung, S. S. (1996). Problem posing as assessment : Reflections and reconstructions. *Mathematics Educator, 1*(2), 159-171.
43. Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding : Building on information knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32.
44. Miller, L. D. (1992). Teacher benefits from using impromptu writing prompts in algebra classes. *Journal for research in mathematics education, 23*(4), 329-340.
45. Olesen, V. (1994). Feminisms and models of qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research*. Thousands Oaks, California : Sage Publications.
46. Pandey, T. (1991). *A sample of mathematics assessment*. Columbus, OH: Ohio State University。
47. Pollard, A., & Tann, S. (1993). *Reflective teaching in the primary school: A handbook for the classroom* (2nd Ed) . London: The Open University.
48. Powell, A. B., & Lopez, J. A. (1989). Writing as a vehicle to learn mathematics: A case study. In P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), *Writing to learn mathematics and science* (pp.157-177) . New York: Teachers College Press.

49. Sharp, J. (1998). A constructed algorithm for division of fractions. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp.198-203). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
50. Skemp, R. R.（1978）. Relation understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15
51. Steffe, L. P. (1994). Children's multiplicative schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*（pp.3-39）. New York: State University of New York Press.
52. Vergnaud, G. (1983). Multiple structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp.127-174). New York: Academic Press.
53. Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
54. Wilon, S.M., Shulman, L. S., & Richert, A. E. (1987). "150 different ways" of knowing: Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp.104-124). London: Cassel Educational Limited.

Developing Elementary School Teachers' Problem-Posing Abilities: Examples of Teaching Multiplication and Division of Fractional Numbers

Shiang-Tung Liu and Li-Shiung Chou

Graduate Institute of Math Education and Department of Education
National Chiayi University

Abstract

For current elementary schools, a mathematics teacher must have the ability to problem posing ability during students' construction of mathematics knowledge. In order to develop the problem posing ability of teachers, this study invited three sixth grade teachers and a researcher to conduct cooperative action research. The research group reviewed the literature, analyzed instructional objectives, analyzed instructional activities, to discussed problem solving strategies, and to taught three units related to multiplication and division of fractional numbers. Also, through the discussions held before and after teaching of each unit, the research group analyzed instructional practice, which subsequently modified the teaching approaches. This study found that the research teachers refined their problem posing abilities during the research process. Yet, the quantity of the mathematical material restricted the development of those abilities.

Key words: Cooperative active research, Mathematics problem-posing, Mathematics writing, Fractional teaching