建模教學活動學生解題類型之探討 —以七年級一次函數單元為例

林麗美*、張靜嚐**、尤詩憶*
台中縣光正國中*、國立彰化師範大學科學教育研究所**
beauty5529@yahoo.com.tw

摘 要

本文旨在探討七年級學生在建模活動（modeling activity）下，歷經模式引出活動(Model- Eliciting Activity)、模式探索活動(Model- Exporting Activity)、模式修正活動(Model- Adapting Activity)等三個階段，對於一次函數的建模活動所展現的解題類型。建模活動的內容主要以研究者本身在生活裡所遭遇的實際問題作為核心，在配合九年一貫能力指標下，透過數學教學研究會的教師加以組織設計而成。研究中採用行動研究法，質性資料蒐集包括教師反思日誌，學生學習日誌，教師與學生的晤談紀錄，教學錄影帶，教師與觀察者的晤談紀錄，學習單...等文本。經由分析與歸納後，結果顯示在模式探索活動，透過量測腳印大小建模活動的實施，學生對於函數自變數與應變數的關係能有比較清楚的認識；另外，透過模式引出、模式探索活動，學生利用三人小組討論與全班發表分享解決方案，可以發展出找善心人士身高的初步模型，在模式修正活動後，全班同學可以利用比例關係、先求組員的平均身高後再利用比例關係，以及利用電算器的操作與一次函數的概念，找出“求善心人士身高”的數學化模型。

關鍵詞：一次函數、建模教學活動、解題類型

一、研究動機與目的

根據文獻指出，學生學習函數至少有以下困難。第一、學生在學習函數時，對於自變數和應變數的角色會有所混淆，難以釐清關係（陳盈言，2001）。第二、學生會將代表自、應變數的文字符號位置混淆，未能正確用文字符號列出兩個變數間的關係式（鄭維誠，2001）。在函數單元的教學裡，通常學生學過函數之後，仍然不知道什麼是函數。就此，研究者認為數學不應該只是練習的工具，教師更應該提供促進概念形成的情境或活動，讓學生理解自變數與應變數之間的關係，並能舉出生活中實際的例子來說明，或能更進一步加以應用。數學的一次函數是一種特殊的比例對應關係，是學生學習數學時的一個非常重要的觀念，可為他往後學習數學時奠定良好的基礎。

傳統的教學總是執著於陳述數學問題與教師本身的解題，一開始進入新的主題就在形式化的層面操作，很少提供可以促進數學模型建立的活動，並透過這些活動在數學世界與現實世界之間作為橋接的活動。一般而言，在教學活動裡即使有所謂的數學「應用題」，但呈現出來的都是一些標準化的題目，有著標準化的解題模式，標準的答案，學

生僅能照本宣科地將老師所傳授的知識複製在這些題目上，經過不斷地反覆練習後，學生的能力充其量只是數學題目的機械式反應，迫使學生的批判能力、創造思考能力在這樣的機制下逐漸凋零。由是之故，研究者設計建模教學活動並採用建模導向的教學，希望所有的學生，都能在活動中學會關於一次函數概念中應變數是隨著自變數而改變的、函數的對應關係、以及函數值、並能描繪一次函數的圖形，並且透過建模活動以了解學生一次函數的解題類型。

二、文獻探討

(一)建模教學的三個階段

Lesh & Doerr(2003)指出教師在引導學生建模的過程，其模式發展的順序可分為模式引出活動(Model- Eliciting Activity)、模式探索活動(Model- Exporting Activity)、模式修正活動(Model- Adapting Activity)三個階段。模式引出活動，即是從真實生活問題解決的情境中出發，學生需要比平時多一點的時間來完成活動，分組的合作學習讓學生概念學習的技巧更好，而建模活動主要的目標是在發展、測試並且重新發現更好的、可分享的以及可再使用的概念工具。在教學中，模式引出活動的教學目標是協助學生面對問題情境時能夠建立數學模式 (Lesh & Lamon, 1992)。而模式探索活動通常不是使用較具體的書寫資料，而是包含電腦繪圖，圖解或是以動畫的形式呈現(Lesh, Post, & Behr, 1987)。然而，無論使用那一種形式的模式探索活動，目的都是希望學生可以發展出一套對目標概念系統有意義的強而有力的語言及表現系統。而這個系統是有用的，並且學生的思考是超越相關的建構(或概念系統)，此階段通常聚焦在使用概念工具(模式引出活動中發展，而在模式探索活動中改良)，來解決在概念工具尚未發展以前很難處理的問題。特別是，學生通常會發展出強而有力的概念工具，可以在下一個模式修正活動中使用，透過模式修正活動最主要的目的即是希望有意義的修正之後，此概念工具在新的情境仍是可以使用的，因此，模式修正活動也可以稱為模式應用活動，或模式延伸活動。

本研究的教學即是採取 Lesh & Doerr(2003)的模式引出活動(Model- Eliciting Activity)、模式探索活動(Model- Exporting Activity)、模式修正活動(Model- Adapting Activity)等三個建模教學的歷程，作為可以促進學生數學模型建立的活動，並透過這些活動了解學生的解題表現。

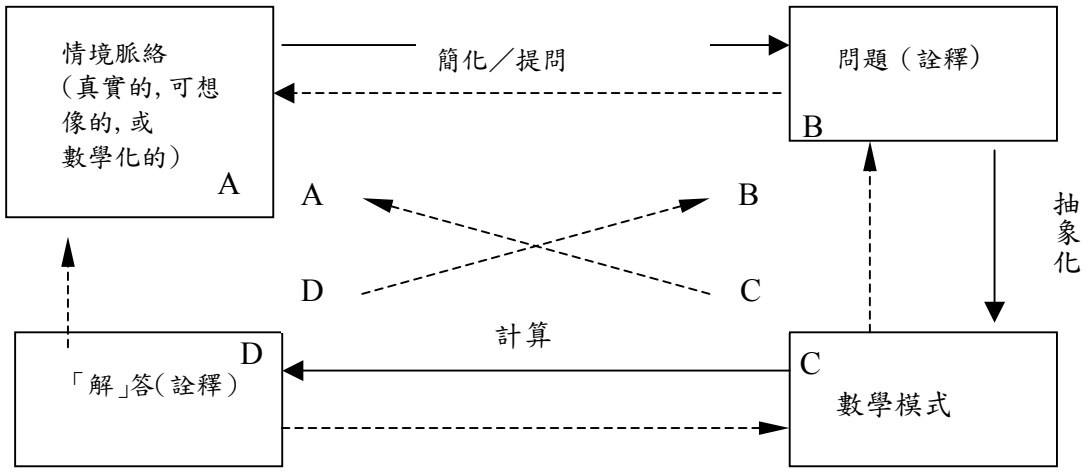
(二)傳統與建模數學學習的差異

傳統的數學學習是學生從概念化後的知識世界去解釋一堆數學符號。模式引出活動(modeling eliciting activity)則是學生將有意義的情境做出數學化的描述與詮釋。Lesh & Doerr(2003)進一步指出建模環(modeling cycle)通常包含：描述(description)、操作(manipulation)、預測(prediction)/轉化(translation)以及驗證(verification)等四個階段。包含：1、描述(description)：建立一個真實世界到模式世界的地圖(指引)。2、操作(manipulation)：操作模式以便能產生預測或行動，以期能符合最初問題解決的情境。3、預測(prediction)/轉化(translation)：帶著相關的結果回到真實或想像的世界。4、驗證(verification)：包含有用的行動以及預測。

更進一步的，Kehle & Lester 提出在數學任務關鍵性的活動中，當個人在複雜、逼真的、可想像的數學情境脈絡(A)中，個人必須努力參與以致能從多面向的過程中獲得可接受的結果。接著，簡化／提問(A→B 實線)表示個人透過辨別並處理問題中最直接的概念來簡化問題，此階段包含做決策、刪除哪些資訊，發展重要概念的連結，以獲得原始狀況中的逼真表現。逼真的表現即是原始情境脈絡的模式。原始情境脈絡中的問題描述是更容易了解的、可操作的，而且是比原始的狀況更容易了解的。

接著，抽象化階段(從 B 到 C 的實線)，介紹數學概念及數字、符號。抽象化階段包含選擇數學概念以表現逼真的模式基本且重要的特性，並且將原始的問題用數學符號明確而詳細的表現。一旦，問題的解決者對原始狀況產生數學表現，逼真的問題就變成不一樣的問題和數學表現有關的問題。第三個階段(從 C 到 D)包含操作數學表現以及推論有關數學的結論，亦即圖一中"計算"箭頭所描述者，在這個階段，個人所擁有的數學知識、技巧及數學思考能力…等，都可以應用。最後一個階段，(從 D 到 A，D 到 B，及 D 到 C)，應該包含個人"比較"原始的情境脈絡問題中獲得的結果，以及數學表現二者(圖一中虛線所表示)。但是，"比較"有時並不會發生，只有在產生結論以及獲得解決方案時才會發生，另一方面"比較"也有可能在整個過程中的任何一個時間點發生。事實上，研究指出，在復雜的數學任務中，"比較"以及持續的監控是屬於個人能否完成複雜的數學任務的關鍵特性。

附註：虛線表示 "比較"



圖一："較合適的"數學化活動圖（Lesh & Doerr, 2003, p514）

三、研究方法

本研究採取行動研究的方式，揭露研究者在教學上所遇到的問題，依據研究者的想法，輔以文獻探討，形成研究問題，付諸行動，希望問題可以獲得改善。研究對象為研究者所任教的一班七年級學生，學生人數 34 人(男生 17 人，女生 17 人)，研究者利用與學校同事合編有關一次函數之建模活動：是誰救了櫻花樹？在任教班上進行試教，過程包含模式引出活動、模式探索活動、模式修正活動三個階段。學生透過報紙文章的閱讀，以及暖身活動量動物的腳趾長與利用腳趾長度預測動物體型等活動，讓學生漸漸融入本活動情境中。接著，再引入陳述問題：有位善心人士救了光正國中的櫻花樹，但現場只留下腳印，為了感激他，想要找出他到底是誰或有什麼特徵？利用這樣的任務，引發學

生在資訊不足的情形下，開始思索如何解決問題。資料收集包括教師反思日誌，學生數學學習日誌，教師與學生的晤談紀錄，教學錄影帶，教師與觀察者的晤談紀錄，學習單…等質性資料。研究者仔細分析質性資料中所透露出來的訊息，並將學生所呈現的解題類型加以分類，對應於文獻中所提之數學化活動，嘗試將七年級學生的對於一次函數的解題類型適度分析。

四、研究結果與討論

研究者將學生的解題過程與 Lesh & Doerr(2003)提出"較合適的"數學化活動圖比較，研究結果發現：

(一)模式引出活動：學生初步的猜測，較粗糙不確定的想法。

學生面對具有情境脈絡的問題，會提出心中的疑問以便更了解問題，此時學生的想法是發散式的，且大多屬於比較廣泛籠統的猜測、初步想法，經過討論會提出較多元但粗糙的想法；經由老師的引導及歸納趨於較具體及可行的解決策略(A－＞B 提問階段)。這個階段學生需要比平時多一點的時間以完成活動，研究者與全班同學共同討論的初步解決方案歸納如下：

1、我們可以用腳的長度和深度推測這位善心人士的體型(身高、體重)。2、量腳印與腳印之間的距離(步幅)可以判斷男生或女生。3、看鞋子的紋路可以知道穿什麼品牌的鞋子。4、把當天晚上還留在學校的人，一一面會，問說他們晚上時在做些什麼事？再從所有人的供詞中找出疑點。

5、看學校的錄影機。6、去查看櫻花樹的編號再去賣小樹苗的店問問看當天有沒有出售同品種的櫻花小樹苗。7、登報詢問，到各個官方網站登尋找善心人士。

(二)模式探索活動：學生是以個人的先備知識為起點，透過與小組溝通討論建構知識。

學生以個人先備知識為起點，蒐集證據資料，透過小組成員問的溝通、討論、質疑、辯證來判斷資料的可用性，形成小組的共識，這個階段的解題策略小組會建立一套表徵系統。在這個階段，學生將問題用數學符號明確的表示，每個人擁有的數學知識、技巧及數學思考能力會在此階段加以運用(從B－＞C抽象化階段，及C－＞D計算階段)。老師扮演傾聽者，觀察者，促進者，同儕比較及自我解放的角色協助發展屬於學生自己的數學解題模式並重新建構知識。研究者收集學生的學習單，報告單，任務報告單，並且參照學生上課討論的過程，將學生的解題類型綜合整理如下：

1、 沒有算出善心人士的身高：僅測量組員的腳印大小及身高，但是並沒有推算出這位善心人士的身高。

2、 用比例式推算善心人士的身高：

162：32=x：40　　32x=6480　　x=202.5　A：202.5cm (s041-1 組學習單 950602)

3、 用比例(正比)關係推算善心人士的身高：

表一：學生解決策略

特徵 ＼ 人	8 號	4 號	30 號	善人
腳長	23	26	28	38.5
身高	153	150	161	？
身高／腳長	6.7	5.8	5.8	5.8
體重	36	42	43	？

善心人士的腳長　38.5 × 5.8 ＝ 223 cm　(s042-1 組學習單 950602)

4、 先算出平均身高、腳長，再用比例關係推算善心人士的身高：

表二：學生解決策略

人 \ 特徵	腳長	身高	體重
33 號	32	169	60
35 號	27	153	50
22 號	27	153	50
善心人士	39	？	？

(169＋153＋153)÷3＝158　　(32＋＋27＋27)÷3＝29　　158 ÷ 29=5.4

5.4 x 39 ＝210.6 cm　　所以善心人士身高為 210.6 cm(s043-2 組學習單 950602)

5、用電算器推算善心人士的身高：

在機器裡我們輸入我們這一組 3 個人測量的結果，(25，153)，(23，148)，

(27，155)，算出身高的方程式。

電算器出現：y=ax+b　　a=1.75　　b=108.25

若善心人士腳印深度為 40cm，輸入以後，得到 y=178.25 公分。(s043-1 組學習單 950602)

研究者綜合以上各組解題類型，將它整理成以下表格：

表三：學生解題類型綜合表之一

有關的數學模式	組(人數)	百分比
1、沒有算出善心人士身高	4(13)	42%
2、用比例式	2(6)	19%
3、用比例(正比)關係	1(3)	10%
4、先算出平均身高、腳長，再用比例關係計算	1(3)	10%
5、利用電算器推算身高	2(6)	19%

(三)模式修正活動：比較不同解決方案的優缺點以後，選擇較合適的解決策略。

學生經由模式探索活動呈現多元的解法，經過解決方案的共享，學生會比較各種不同解決方案的優缺點，並將模式探索活動建立的表徵系統做調整及修正；最後，形成解決問題的系統化方法。最後這個階段(從 D－＞A，D－＞B 及 D－＞C 比較階段)，「比較」階段有時並不會發生，只有在產生結論以及獲得解決方案時才會發生，然而，「比較」也有可能在整個過程中的任何一個時間點發生。教師若能經由晤談，應可更深入的了解學生的想法及思考模式，總之；「比較」是在數學活動中個人思考以及做決策的過程，學生在這個階段通常會重新發明屬於學生自己的思考方式。

1、用比例式推算出善心人士的身高：

共有 5 組，推算出善心人士的身高分別為 202.5CM，194CM，218CM，200CM 及 165CM。

2、先算出平均身高、腳長，再用比例關係計算。

3、用電算器推算身高：共有 3 組，推算出善心人士的身高分別為 171CM，226CM，及

173CM。

4、利用電算器推算身高、體重：

表四：學生解決策略

特徵 \ 人	11 號	7 號	15 號
身高	153	148	155
體重	43	33	48
腳深度	2	1	3
腳長度	25	23	27

電算器出現：y=ax+b　　a=7.5　　b=26.33

若善心人士腳印深度為 7cm，輸入以後，得到 y=78 公斤。

而身高的部分仍保留：

在機器裡我們輸入我們這一組 3 個人測量的結果，

(25，153)，(23，148)，(27，155)，算出身高的方程式。

電算器出現：y=ax+b　　a=1.75　　b=108.25

若善心人士腳印深度為 40cm，輸入以後，得到 y=178.25 公分。(s043-1 組報告單 950605)

研究者綜合以上各組修改後的解題類型，將它整理成以下表格：

表五：學生解題類型綜合表之二

有關的數學模式	組(人數)	百分比
1、用比例式	5(15)	48%
2、先用平均身高與腳長，再用倍數關係	1(3)	10%
3、利用電算器推算身高	3(10)	32%
4、利用電算器推算身高、體重	1(3)	10%

從表三與表五可比較出，透過模式修正活動的引導與全班再討論，發現本來 42%的同學無法算出善心人士身高均能利用有效策略，推算出善心人士的身高。而原本有 39%的同學利用比例關係求出身高，後來也提升為 59%的同學利用比例相關概念求出身高，此外，使用電算器來計算的比例也由 19%大幅提升至 42%，顯示模式修正活動能提升學生對於數學模式詮釋與理解。

五、結論

研究者嘗試以一次函數單元設計建模教學活動：是誰救了櫻花樹？進行實驗，研究結果顯示：

(一)以往傳統教學學生對於自、應變數的文字符號位置容易混淆，未能正確用文字符號列出兩個變數間的關係式，學生能夠透過使用建模教學活動，清楚的知道要使用腳長資料推算善心人士的身高；自變數即是腳長，而應變數即是身高，不易造成混淆。

(二)從學生呈現的多元解決方案中，可以清楚地比較出學生利用三人小組的討論，以及

全班性的模式修正活動後，每組學生能利用小組共識出的解決策略，應用不同的關係式解決求善心人士身高的問題，使用的策略包括比例關係，先求組員的平均身高後再利用比例關係，以及利用電算器的操作與一次函數的概念找出身高。

(三)在學生所呈現的解題類型中，可以看到學生用文字符號來表徵關係式，並善用計算工具的特質，這顯示出建模教學提供良好的途徑讓學生建立解決真實世界問題的解題形式。

六、參考文獻

陳盈言（2001）：**國二學生變數概念的成熟度對其函數概念發展的影響**。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，未出版。

鄭維誠（2001），**線型函數的學習對國二學生變數概念發展的影響**。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，未出版。

Lesh R., & Doerr H. M. (2003). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* .American, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier(Ed.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Lamon, S. (Eds.). (1992). *Assessment of authentic performance in school mathematics.* Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.