次序理論取向的機率問題之解題規則分析

李佳芸　林原宏
台中市惠文國小　國立台中教育大學數學教育系
yun.jar@msa.hinet.net　lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘　要

本研究用 Bart 和 Krus (1973) 的次序理論來分析高年級學童在彈珠機率問題上的解題規則次序性，研究者以總分不同之受試者及總分相同但反應組型不同之受試者，分析其解題規則的次序階層性。

研究者以台中縣市共計十二個班級的高年級學童為研究對象，自編彈珠機率測驗共 24 題。研究結果顯示總分不同之受試者，其解題規則結構性和次序性不同；總分相同，但反應組型不同的受試者，在解題規則階層結構圖中，其解題規則的次序性亦不同，所蘊含的認知結構也不盡相同。

關鍵詞：次序理論、解題規則、機率問題。

一、緒論

(一)研究動機

Bart 和 Krus (1973) 的次序理論(ordering theory)，提出試題間假設階層的檢驗或試題間階層的確定。在心理計量的相關文獻上，次序理論主要應用在試題階層結構的分析(Airasian & Bart, 1973)，很少應用在解題規則的階層結構分析。

在往昔的所有文獻中，關於機率問題，大部份僅著重在量化性的描述或質性晤談，甚少利用合適方法來探討學生的解題規則次序性。在已有文獻基礎上，有關學生在解決機率問題，已有諸多文獻證實學生在解決彈珠機率問題上有許多規則，至於學生使用解題規則的次序性是值得探討的問題(Sigeler, 1981; Bart & Orton, 1991)。因此，本研究擬用 Bart 和 Krus (1973) 的次序理論，來分析高年級學童在彈珠機率問題上的解題規則次序性，藉以呈現處理彈珠機率問題時，其解題規則的次序性及階層性。

(二)研究目的

本研究所使用的解題規則之次序理論分析，可分析每位受試者的解題規則次序性及結構性，但限於篇幅，本研究僅針對總分不同之受試者，和總分相同但反應組型不同之受試者，分析其解題規則次序性和結構性的異同。

基於上述，本研究的目的可臚列如下：

1. 根據次序理論來分析不同總分受試者在彈珠機率測驗的解題規則次序性及結構性。
2. 根據次序理論來分析總分一樣但反應組型不同之受試者，在彈珠機率測驗的解題規

則次序性及結構性。

二、文獻探討

(一)次序理論

次序理論是就二元(dichotomous)計分試題，根據其列聯表資料，計算其先備(precondition)條件或次序性關係。根據 Bart 和 Krus (1973) 的次序理論，以二元計分的試題 i 和試題 j $(i \neq j)$為例，以答對(以 1 表示)和答錯(以 0 表示)人數之列聯表，如表 1 所示。(林原宏，2005)

表 1　試題 i 和試題 j 的答題人數之列聯表$(i \neq j)$

		試題 j		總和
		1	0	
試題 i	1	n_{11}	n_{10}	$n_{1\bullet}$
	0	n_{01}	n_{00}	$n_{0\bullet}$
總和		$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 0}$	$n = n_{11} + n_{10} + n_{01} + n_{00}$

根據表 1 的列聯表資料，Bart 和 Krus (1973) 定義「試題 i 指向試題 j」的衡量係數為 n_{01}/n，n_{01}/n 的範圍是 $0 \le (n_{01}/n) \le 1$，n_{01}/n 若愈小，表示試題 i 可能為試題 j 的先備條件。因此，Bart 和 Krus (1973) 以閾值(threshold) ε $(0 < \varepsilon < 1)$決定試題 i 和試題 j 是否有次序關係如下：

1. 若 $(n_{01}/n) < \varepsilon$，表示試題 i 為試題 j 的先備條件，即試題 i 與試題 j 有次序關係，此時以 $r_{ij} = 1$ 表示，以圖繪 $i \to j$ 表示。
2. 若 $(n_{01}/n) \ge \varepsilon$，表示試題 i 不是試題 j 的先備條件，即試題 i 與試題 j 沒有次序關係，此時以 $r_{ij} = 0$ 表示，圖繪中 i 沒有指向 j。

三、研究方法

(一)解題規則的計分及次序性分析

假設欲分析之解題規則有 K 個，以 $k = 1,2,3,\mathrm{L}\ ,K$ 表示；測驗有 M 題試題，以 $m = 1,2,3,\mathrm{L}\ ,M$ 表示。在每個規則的定義下，每個題目都有其標準的反應，假設其標準反應的矩陣表示如下：

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathrm{L} & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \mathrm{L} & x_{2M} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ x_{K1} & x_{K2} & \mathrm{L} & x_{KM} \end{bmatrix} = (x_{km})_{K \times M}$$

某個受試者在每一題的反應，可用矩陣表示如下：

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \mathrm{L} \quad y_M] = (y_m)_{1 \times M}$$

針對該受試者在每個規則下的計分，可用矩陣表示如下：

$$S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \text{L} & s_{1K} \\ s_{21} & s_{22} & \text{L} & s_{2K} \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ s_{M1} & s_{M2} & \text{L} & s_{MK} \end{bmatrix}=\left(s_{mk}\right)_{M\times K}$$，其中 $s_{mk}=\begin{cases}1, & y_m=x_{km}\\ 0, & y_m\neq x_{km}\end{cases}$

本研究應用 Bart 和 Krus (1973) 的次序性定義，假設共有 K 個解題規則，針對某一受試者在 M 個題目的反應資料，對每位受試者，皆可得到一矩陣 S。在矩陣 S 之下，計算兩兩規則間的次序關係。根據「規則 i」和「規則 j」 $(i\neq j)$的答案計分下，「規則 i」和「規則 j」(以 1 表示反應符合該規則，0 表示反應不符合該規則)的次數列聯表，如表 2 所示。

表 2　規則 i 和規則 j 的反應次數之列聯表$(i\neq j)$

		規則 j		總和
		1	0	
規則 i	1	m_{11}	m_{10}	$m_{1\bullet}$
	0	m_{01}	m_{00}	$m_{0\bullet}$
總和		$m_{\bullet 1}$	$m_{\bullet 0}$	$M=m_{11}+m_{10}+m_{01}+m_{00}$

根據表 2 的列聯表資料，則「規則 i 指向規則 j」的衡量係數為 m_{01}/M，m_{01}/M 的範圍是 $0\le\left(m_{01}/M\right)\le 1$，$m_{01}/M$ 若愈小，表示規則 i 可能為規則 j 的先備條件。以閾值 $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$決定規則 i 和規則 j 是否有次序關係如下：

1. 若 $\left(m_{01}/M\right)<\varepsilon$，表示規則 i 為規則 j 的先備條件，即有次序關係，此時以 $r_{ij}=1$ 表示，以圖繪 $i\rightarrow j$ 表示。
2. 若 $\left(m_{01}/M\right)\ge\varepsilon$，表示規則 i 不是規則 j 的先備條件，即規則 i 與規則 j 沒有次序關係，此時以 $r_{ij}=0$ 表示，圖繪中 i 沒有指向 j。

所以，對於每位受試者，可獲得其規則次序關係矩陣 $R=\left(r_{ij}\right)_{K\times K}$。若 $r_{ij}=1$，表示規則 i 為規則 j 的先備條件，以圖繪 $i\rightarrow j$ 表示；若 $r_{ij}=0$，表示規則 i 不是規則 j 的先備條件，圖繪中 i 沒有指向 j。

(二)研究對象

本研究對象以國民小學五、六年級學生。以台中縣市之學校，共計十二個班級，進行施測。

(三)彈珠機率測驗及其四個解題規則

研究者參考彈珠機率問題的相關文獻 (Sigeler, 1981; Bart & Orton, 1991)，編製彈珠機率測驗共 24 題，並經過二位具豐富教學經驗的國小高年級數學科教師和一位數學教育專家審核，以確定測驗內容適合國小高年級的學童。

本測驗第 1 題舉例如圖 1。在圖 1 中，有 A、B 二堆彈珠，● 表示黑彈珠，◯表

示白彈珠。每一堆裡面都可能出現黑彈珠或白彈珠。如果你閉上眼睛去選，而且一次只能拿一顆彈珠時(有可能拿到黑彈珠，也有可能拿到白彈珠)，請受試者判斷那一堆比較容易拿到你想拿的黑色彈珠(選擇 A 或 B，在前面括號中打勾)，若機會一樣，則在「A、B 的機會一樣」的選項中打勾。圖 1，A 堆放了 1 顆黑彈珠及 2 顆白彈珠；B 堆放了 2 顆黑彈珠及 4 顆白彈珠，為簡化問題表示，題目用(1,2) v.s. (2,4) 的組合表示。



A　　B

(　　) A
(　　) B
(　　) A、B 的機會一樣

圖 1 彈珠機率測驗例題

Bart 和 Orton (1991) 指出 Siegler 在檢查機率問題的反應模式是根據四個規則，規則 1 指向最低的認知發展層次，而規則 4 是指向最高的認知發展層次。

Siegler (1981) 提到彈珠機率問題的四個解題規則，其規則的意義如表 3 所示。

表 3　彈珠機率測驗的四個解題規則

規則名稱	規則意義	圖 1 中(1,2) v.s. (2,4)的答案
規則 1	根據何者有較多黑彈珠來判斷機率，因此： (1)若 $LB=RB$，則選擇「A、B 的機會一樣」。 (2)若 $LB>RB$，則選擇 A。 (3)若 $LB<RB$，則選擇 B。	B
規則 2	根據何者「有較多黑彈珠」或「黑彈珠一樣，較少白彈珠」來判斷機率，因此： (1)若 $LB=RB$ 且 $LW=RW$，則選擇「A、B 的機會一樣」。 (2)若 $LB=RB$ 且 $LW<RW$，則選擇 A。 (3)若 $LB=RB$ 且 $LW>RW$，則選擇 B。 (4)若 $LB>RB$，則選擇 A。 (5)若 $LB<RB$，則選擇 B。	B
規則 3	根據何者「黑彈珠與白彈珠的差值大」來判斷機率，因此： (1)若 $LB-LW=RB-RW$，則選擇「A、B 的機會一樣」。 (2)若 $LB-LW>RB-RW$，則選擇 A。 (3)若 $LB-LW<RB-RW$，則選擇 B。	A

表 3　(續)

規則名稱	規則意義	圖 1 中(1,2) v.s. (2,4)的答案
規則 4 (正確的規則)	根據何者「黑彈珠在該堆的比例大」來判斷機率，因此： (1)若 $\frac{LB}{LB+LW}=\frac{RB}{RB+RW}$，則選擇「A、B 的機會一樣」。 (2)若 $\frac{LB}{LB+LW}>\frac{RB}{RB+RW}$，則選擇 A。 (3)若 $\frac{LB}{LB+LW}<\frac{RB}{RB+RW}$，則選擇 B。	A、B 的機會一樣

註：(1)*LB*：左邊(A 堆)黑彈珠的數量。(2)*LW*：左邊(A 堆)白彈珠的數量。
(3)*RB*：右邊(B 堆)黑彈珠的數量。(4)*RW*：右邊(B 堆)白彈珠的數量。

四、結果分析與解釋

本研究以不同總分的受試者及總分相同但反應組型不同之受試者，分析其解題規則階層結構的差異。研究者隨機抽取受試者並進行說明探討，本研究設定閾值 ε=.1。

(一)不同總分受試者的解題規則階層結構

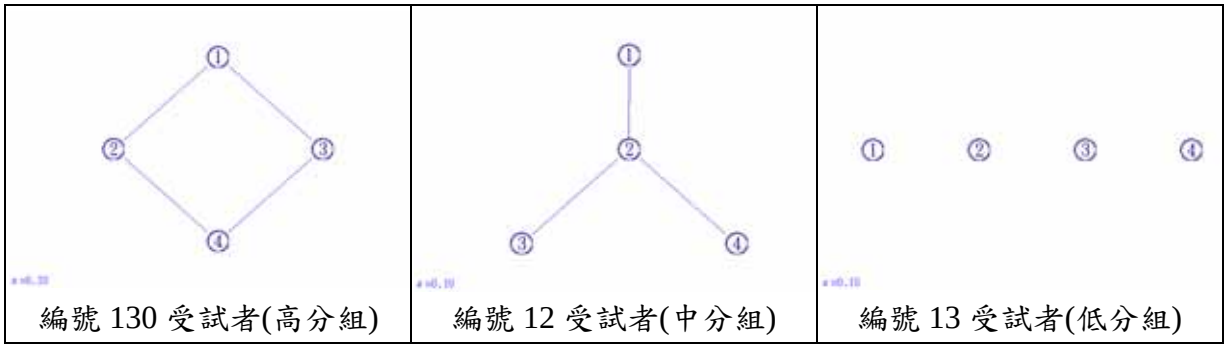
以正確規則(即規則四)之總分來計分，區分受試者為高、中、低三組，以最高分的 27%為高分組，最低分的 27%為低分組，其餘為中分組。在每組中隨機抽取一位受試者來進行分析，共計三位受試者。

依高、中、低三組、隨機選取而得的受試者編號分別為 130、12 和 13，其 (m_{01}/M) 係數矩陣分別為 OR_{130}、OR_{12}、OR_{13}，且解題規則次序關係矩陣分別為 R_{130}、R_{12}、R_{13}，分別表示如下：

$$OR_{130}=\begin{bmatrix} - & .25 & .25 & 1 \\ 0 & - & 0 & .75 \\ 0 & 0 & - & .75 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \quad OR_{12}=\begin{bmatrix} - & .25 & .5 & .75 \\ 0 & - & .25 & .5 \\ 0 & 0 & - & .5 \\ 0 & 0 & .25 & - \end{bmatrix} \quad OR_{13}=\begin{bmatrix} - & .08 & .37 & .37 \\ .08 & - & .29 & .29 \\ .25 & .16 & - & .29 \\ .25 & .16 & .29 & - \end{bmatrix}$$

$$R_{130}=\begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \quad R_{12}=\begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 0 & - \end{bmatrix} \quad R_{13}=\begin{bmatrix} - & 0 & .0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

根據解題規則次序關係矩陣，三位受試者的解題規則階層結構圖如圖 2 所示。



編號 130 受試者(高分組)	編號 12 受試者(中分組)	編號 13 受試者(低分組)

圖 2　不同總分之三位受試者的解題規則階層結構圖

圖 2 所呈現的三位受試者其解題規則的次序性不同，可歸納如下：

1. 編號 130 受試者最先使用規則 4，當不使用規則 4 時，則使用規則 2 或規則 3；當不使用規則 2 或規則 3 時，則使用規則 1。

2. 編號 12 受試者最先使用規則 3 或規則 4，當不使用規則 3 或規則 4 時，則使用規則 2；當不使用規則 2 時，則使用規則 1。

3. 編號 13 受試者使用規則 1、規則 2、規則 3 和規則 4，且其使用的規則間無次序性，即其規則的出現是隨機的。

4. 三位受試者的解題規則階層結構有差異，不同總分的受試者，其解題規則的次序性不同，所蘊含的認知結構也不相同。

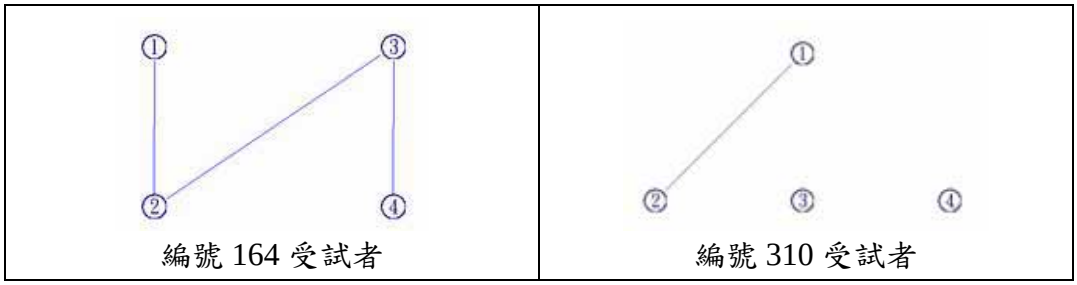
(二)總分相同但反應組型不同之受試者其解題規則階層結構

隨機選取兩位總分相同但反應組型不同的受試者，其編號分別為 164 和 310，總分同為 15，其 (m_{01}/M) 係數矩陣分別為 OR_{164}、OR_{310}，且解題規則次序關係矩陣分別為 R_{164}、R_{310}，分別表示如下：

$$OR_{164}=\begin{bmatrix} - & .25 & .25 & 1 \\ 0 & - & 0 & .75 \\ 0 & 0 & - & .75 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \quad OR_{310}=\begin{bmatrix} - & .25 & .5 & .75 \\ 0 & - & .25 & .5 \\ 0 & 0 & - & .5 \\ 0 & 0 & .25 & - \end{bmatrix}$$

$$R_{164}=\begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \qquad R_{310}=\begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 0 & - \end{bmatrix}$$

根據解題規則次序關係矩陣，此二位受試者的解題規則階層結構圖如圖 3 所示。



編號 164 受試者　　編號 310 受試者

圖 3　總分相同但反應組型不同之二位受試者其解題規則階層結構圖

圖 3 所呈現的二位受試者其解題規則的階層數相同，但其呈現的次序性不同，可歸納如下：

1. 編號 164 受試者最先使用規則 2 或規則 4；當不使用規則 4 時，則使用規則 3；當不使用規則 2 時，則使用規則 1 或規則 3。

2. 編號 310 受試者最先使用規則 2、規則 3 或規則 4，但規則 3、規則 4 與其他規則無次序性，即規則 3、規則 4 的出現可能是隨機的；當不使用規則 2 時，則使用規則 1。

3. 二位受試者的解題規則階層結構差異頗大。雖然總分相同，但是由於其反應組型不同，其解題規則的次序性不同，所蘊含的認知結構也不相同。

五、結論與建議

(一)結論

本研究根據 Bart 和 Krus (1973) 的次序理論來分析高年級學童在彈珠機率問題上的解題規則次序，所獲得的結論如下：

1. 總分不同的受試者在彈珠機率測驗，其解題規則結構性有差異，解題規則的次序性亦不同，能呈現個別受試者解題規則次序性之特色。
2. 總分相同的受試者，由於其反應組型不同，在解題規則階層結構圖中，其解題規則的次序性不同，所蘊含的認知結構也不相同。

(二)建議

1. 本研究僅就個別受試者的解題規則次序性做分析，至於跟受試者晤談，來加以佐證，是重要的研究主題。
2. 本研究應用次序理論於彈珠機率問題解題規則的分析，至於其他領域的解題規則亦是值得探討與分析之主題。

六、參考文獻

林原宏(2005)。次序理論。*教育研究月刊*，134，142-143。

Airasian, P. W., & Bart, W. M. (1973). Ordering theory: A new and useful measurement model. *Educational Technology, May*, 56-60.

Bart, W. M., & Krus, D. J. (1973). An ordering-theoretic method to determine hierarchies among items. *Educational and Psychological Measurement, 33*, 291-300.

Bart, W. M., & Orton, R. (1991). The cognitive effects of a mathematics in-service workshop on elementary school teachers. *Instructional Science, 20,* 267-288.

Siegler, R. S. (1981). Developmental sequences within and between concepts. *Society for Research in Child Development Monographs, 46* (Whole No. 189).