文字符號之語意理解研究：測驗取向

陳彥廷　柳賢
國立高雄師範大學科學教育研究所　國立高雄師範大學數學系
clief000@ms34.hinet.net

摘　要

這是一個植基於「測驗」的基礎，探究學生對文字符號語意理解的研究。研究工具是根據國內外學者的理論、九年一貫課程綱要編製，具內容效度、建構效度、專家效度與 K-R20 信度.9531 的測驗共 77 道題。屬個案研究。研究對象則選取研究者服務學校附近的國中一班七年級學生(38 位)進行施測。藉由施測結果進行計分與分析。研究結果顯示：從巨觀面向來看，學生在文字符號愈後面的層次通過率愈低，顯示本研究所獲致關於學生對於文字符號的語意認知具層次關係的臆測獲得暫時性的支持。從微觀面向來看，學生在文字符號各語意層次的表現共出現 23 個理解上的瑕疵。

關鍵詞：文字符號、青少年、語意理解

壹、研究動機與目的

在數學的學習過程中，「文字符號」對於學生從算術領域轉化為代數範疇的學習佔有很重要的關鍵地位。從許多國內外相關文獻(Collis, 1975; Kuchemann, 1981; Hart, 1980; Booth, 1984; 袁媛，1993；黃桂妮，1997；方吉雄，2001；陳慧珍，2001；謝和秀，2001；廖福彥，2002；謝宜玲，2003；許正諭，2005)分析發現：無論是國外或是國內國科會專題研究乃至於碩博士論文多承襲英國倫敦大學 CSMS 研究團隊所建立之文字符號試題進行探究。然而，多年來，國內的教育現場經歷了「八十二年數學新課程標準」、「建構主義觀點的數學」、「九年一貫課程的重新整合」等數學教育的思潮，學生對於「文字符號」的學習現況是否和過去的研究一致？此乃本研究之研究動機一。

Wagner(1981)於第五屆數學教育心理學會(PME)中提出一個探究學生對於「文字符號」理解的分析架構，此架構能被用以形成對「文字符號」理解的測驗。因此，本研究從 Wagner(1981)所提的語意與情境的觀點，立基於 CSMS 研究團隊研究的基礎上重新建構一套學生對於「文字符號」語意理解的測驗，以區辨青少年(國一學生)對「文字符號」語意的理解與認知現況，進而提供進一步教學之參考。此乃本研究之研究動機二。鑑於上述之研究動機，本研究之目的即在探討青少年在本研究所自行編製具信效度的文字符號測驗中語意理解的表現。

貳、理論基礎

一、小學算術與中學代數：一道學生學習的鴻溝

中學課程中的代數通常被視為「一般化的算術」(Leitzel, 1991)，也就是將算術上的

規則和運算以一般化的寫法來表示(Booth, 1984)。然而，代數和算術兩者之間有許多共用的符號，例如「＝」、「＋」、「－」…。然而，也有些符號在算術與代數間的意義並不相同(English & Halford, 1995; 戴文賓、邱守榕，1999)。Harper (1979)指出：算術與代數的區別在於文字符號所代表的意義而定。當文字符號代表某一個未知數的時候，仍然可將其視為算術；但如果文字符號是代表有些數字時，則稱之為代數(謝宜玲，2003)。Hibertt (1988)呼應了這樣的說法，他指出：算術與代數的區分，是根據文字符號所扮演的角色而定。如果它所扮演的角色是「未知數」，就屬於算術；如果它所扮演的是「任意數」，則屬於代數的範疇了(戴政吉、侯美玲、詹勳國，2002)。而 Vygotsky (1962)指出：代數之於算術，就如同文字之於說話。代數就好像是語言，兩者各有其語彙、語法、語意，由特別的結構法則支配著，其中有一部分規則是相通的，但也有一些相異點，這些相異點往往成為認知鴻溝(戴政吉、侯美玲、詹勳國，2002)。

Leitzel (1991)的研究發現：有些學生即使他們在中學已經學習了兩年的代數，他們仍然無法使用基本的代數。由此可見，學生由算術進入以文字符號表徵的代數範疇時，確實遇到了數學學習的一個瓶頸—一個影響後續數學學習是否成功的的關鍵。

二、文字符號分析架構的另一視野：語意與情境觀點

Wagner (1981)指出：文字符號在數學中有許多使用方式。依據它們出現的情境和它們所指的元素，文字符號有不同的名稱，如未知數、一般數、不定數、自變數或應變數、常數或參數等。一般來說，相同的文字符號可代表相同的事物，不同的文字符號也可代表相同的事物，只有在特定情境下，文字符號才有固定的意義。以下，將敘述 Wagner (1981a)對文字符號整體架構的觀點：如同語言的文字一樣，數學語言中的文字符號，唯有在某些情境和代表某些指示對象時才有意義。在口說的語言中，符號和指示對象(指示對象的集合就是真實集合，也就是符合題意的解所乘的集合)決定了文字符號的語意角色。而符號和情境(如一元一次方程式、二元一次方程式…)決定文字符號的語法角色。與口說語言不同的是，數學中的文字符號除了在某些情境外，是自由可替換的。舉例來說：學生可以用不同的文字符號 x、y…代表父親的年齡。因為這些文字符號可任意替換，情境與指示對象湊在一起，除了特殊符號之外，決定了文字符號的數學角色。這三個成分—符號、指示對象和情境；以及三個觀點—語意角色、語法角色以及數學角色，形成學生對文字符號的解釋。以下，研究者將此理念以圖 1 表徵符號、指示對象和情境間的關係，而本研究所自行編製的文字符號測驗即是基此理念，在圖 1 中三個元素的交集範籌生成測驗。

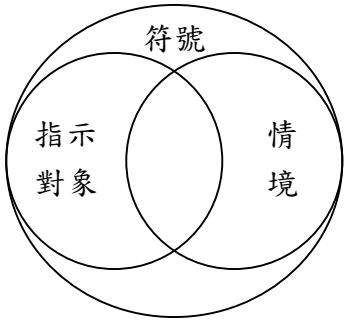

圖 1　文字符號的三成分

參、研究設計與方法

一、研究架構與流程

以下，首先提出本研究之研究架構與流程圖如下（圖 2）。接續，再依研究進行之順序說明各步驟之內容：

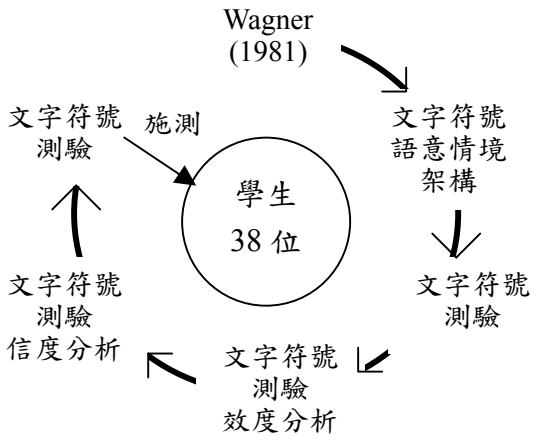

圖 2　研究架構與流程圖

（一）文字符號語意測驗之編製

基於 Wagner (1981)所提關於「文字符號」理解的分析架構，研究者鑑於 Kuchemann (1981)探究學生對文字符號理解的研究發現，界定文字符號的語意類別，依指示對象的數量(即真實集合中指示對象的個數)分為常數(N＝0)、特定數(N＝1)、特定未知數(含未被使用、物件、特定未知數，N=1,2,… finite)、一般數(含無限個數數值、有規律性的無限個數數值，N=infinite)。而情境的部份則依九年一貫的課程內涵分為一元一次多項式、二元一次多項式、一元一次方程式、二元一次方程式等四個類別。據此，形成文字符號的語意與情境二維面向，進而為每一個向度進行試題的編寫，以進行五位數學教育學者與二位第一線教師的專家審查。完成專家審查並做修訂後，接著，再請一位具多年實務經驗的中學教師，依其對學生的瞭解，將初稿內的文字敘述作語句上的修正，以符合學生的語文程度。完成修改後即進行預試，以進行 K-R20 信度考驗與難易度、鑑別度分析。本測驗之 K-R20 信度為.9531；難度 0.15～0.9；鑑別度 0.2～0.9。

（二）文字符號語意測驗之施測

在完成文字符號語意理解測驗工具之編製與效化後，研究者選取一班七年級學生(38 位)進行施測。該班的學生是研究者服務學校附近的一所明星國中，全年級共有 26 班，屬大型學校。而該學校採常態編班，因此該班的學生屬常態分佈。

二、資料的分析

在參與測驗的學生完成測驗後，研究者即展開測驗之計分與審閱。測驗共有 77 道題目，答對者給予 1 分，答錯者則給予 0 分。接續，再以描述統計描繪參與受測的學生其在測驗上各題通過的百分比與答題情形，以達成本研究之研究目的。

三、研究的信度考驗

在研究的過程中，我們必須考驗所下之定義或所貼之標籤是否適切。而本研究的信度，主要採用評分者信度與三角校正的方式處理。評分者信度，是研究者邀請另外一位數學教育碩士(R2)對於相同的一份資料進行分析，再比較兩人在分析上的異同。而三角校正，則是商請另外一位分析者(R2)重新審查研究發現，務求兩人的判定達成一致才下結論。

肆、研究結果分析

本研究將從巨觀與微觀兩個面向分析學生對文字符號的語意理解情形：

一、巨觀：學生對文字符號理解的整體表現

首先，研究者依據試題結構分析學生在每一道題目的通過率[1]，再計算每一個代數情境中每一個文字符號的語意層次之通過率[2]。得到以下之分析(如表 1)。

表 1　學生對文字符號語意理解情形分析

情境 \ 語意		常數	特定數	特定未知數	一般數
一元一次多項式	列式	0.97	0.97	0.84	0.92
	單一運算	0.93	0.83	0.66	0.76
	混合運算	0.84		0.84	0.53
	代換	0.92	0.89	0.24	0.68
二元一次多項式	列式				0.16
	單一運算				0.89
	混合運算		0.84	0.39	0.49
	代換		0.96	0.13	0.55
一元一次方程式	列式		0.79	0.79	0.42
	式子的了解		0.78	0.76	0.71
	不等式			0.11	0.03
	解方程式		0.97	0.76	0.65
	應用問題		0.79		0.62
二元一次方程式	列式		0.82	0.53	0.56
	式子的了解		0.34	0.42	0.39
	不等式			0.61	0
	解方程式			0.61	0.35
	應用問題		0.82	0.87	0.13

接續，研究者再計算每一個文字符號的語意層次通過率[3]。結果顯示：在常數運算的層次中，學生的通過率為 0.92；在文字符號代表特定數的層次中，學生的通過率為 0.82；在文字符號代表特定未知數的層次中，學生的通過率為 0.57；而在文字符號代表一般數的層次中，學生的通過率為 0.49。研究者將此結果表徵如下圖(圖 3)所示。

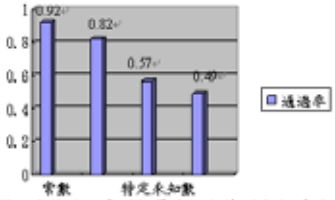

圖 3　學生對文字符號語意理解層次認知情形分析（通過率）

表 1 的結果顯示：學生在「文字符號代表特定未知數」與「文字符號代表一般數」的語意認知層次的通過率降低了許多。且隨者愈後面的層次其通過率就愈低，因此，本研究從文獻探討中所獲致關於學生對於文字符號的語意認知具層次關係的臆測獲得暫時性的支持。

再從另一個角度—「文字符號的情境」來看學生的表現，無論是在多項式或方程式的情境中，學生在情境中包含二個文字符號的題幹表現相較於包含一個文字符號題幹的表現差。可見，情境中文字符號的數量會影響學生的表現。

二、微觀：學生對文字符號理解的各層次表現

接續，從學生的解題表現依各層次整理出他們的理解情形彙整如下表(表 2)：

表 2　文字符號語意內涵各層次學生表現之特質

層次	表現特質
常數	1-1 不瞭解算式結構
	1-2 不熟悉文字符號的運算法則
特定數	2-1 不瞭解文字符號代表特定數
	2-2 對式子解讀不完備
特定未知數	3-1 將文字符號代表特定物件
	3-2 無法貼切說明異文字符號式子的意義
	3-3 以低理解層次認知處理高理解層次問題
	3-4 不熟悉文字符號的運算法則
	3-5 無法以數學的語言符號表達字意
	3-6 擁有錯誤的文字符號運算法則
	3-7 無法考量條件周延性
	3-8 擁有不完備的不等式概念
	3-9 不熟悉給予條件下的文字符號運算
一般數	4-1 幾何圖形的迷思概念
	4-2 以完形概念處理不完整的圖形
	4-3 將文字符號視為特定未知數
	4-4 將文字符號視為物件
	4-5 不熟悉文字符號運算規則
	4-6 固著於文字符號的表徵方式
	4-7 以特例詮釋通則
	4-8 不熟悉文字符號的列式
	4-9 將文字符號視為特定數
	4-10 無法依題意完整切割數量

[1] 在此通過率的計算是 P1=（每一道題目答對的人數）/（全體人數=38）。
[2] 在此通過率的計算是 P2=（情境中所包括的各題通過率總和）/（情境中所包括的題數）。
[3] 在此通過率的計算是 P3=（層次中所包括的各情境通過率總和）/（層次中所包括的情境數）。

以下，將逐項說明學生在每一個文字符號語意理解層次的表現：

（一）學生在常數運算層次的表現

在本層次下的試題共有八道題。整體而言，學生的通過率為 0.92。學生在「n 加 4 可記成 $n+4$，求 8 ***加 4*** 的結果」與「4 乘以 n 可記成 $4n$，求 *4 乘以 8* 的結果」題目中，有 2 位學生將「被加數」誤認為「和」；將「乘數」誤認為「積」。而在題目「梯形面積＝(上底＋下底)×高÷2，若梯形上底＝2；下底＝6；高＝5，那麼梯形面積＝？」中，有 2 位學生將 $(2+6)\times5\div2$ 誤用為 $(2\times6)\times5\div2$ ；有 2 位學生忽略了 $(2+6)\times5\div2$ 式子前面的 2 而直接以 $6\times5\div2$ 運算而得到答案。可見：有部分學生在常數運算的層次上顯現不熟悉「算式結構」與「運算法則」之現象。

（二）學生在特定數層次的表現

在本層次下的試題共有十五道題。整體而言，學生的通過率為 0.82。學生在題目「有一魚販賣兩種魚，甲魚和丁香魚，甲魚每斤賣甲元，丁香魚每斤賣丁元。如果我買 4 斤甲魚和 5 斤丁香魚，共付 4×60＋5×30＝390 元，那麼這式子的意思是什麼？」中，有 2 位學生將算式詮釋為「4 斤甲魚和 5 斤丁香魚的總價 390 元」。他們忽略了文字符號「甲」與「丁」在 4×60＋5×30＝390 式子中扮演「特定數」的角色。有 1 位學生錯寫了物品的單位。其餘的學生都沒有完備地解讀式子。在題目「王先生在一家電子工廠上班，每個月的基本工資是 15000 元，加班的話，每小時的加班費是 80 元。如果王先生上個月所獲得的工資是 15000＋5×80，那麼這式子的意思是什麼？」中，也有 2 位學生雖然掌握了文字符號代表特定數的意義，但仍然無法完備地解讀式子。而有 1 位學生卻直接地運算而得到答案。其餘的，都無法瞭解題意而留下空白。在題目「圓周長＝直徑×圓周率。如果有一個圓，它的半徑是 2：如果圓周率＝3.14，那麼圓周長 p＝？」中，有許多學生運算錯誤而得到錯誤的答案。但有 1 位學生寫出「$2\times3.14\times r=6.28r$ 」。這顯示：學生多能背誦圓周的公式($2\pi r$)，但在使用上卻無法將文字符號視為一個特定數，而成為機械性的理解。也有 1 位學生寫出「 $p^2\times3.14$ 」誤將「周長視為半徑」且誤記「圓面積公式為圓周長公式」。其餘的，都無法瞭解題意而留下空白。可見：有部分學生在特定數運算的層次上顯現不瞭解「文字符號代表特定數」與「式子解讀不完備」之現象。

（三）學生在特定未知數層次的表現

在本層次下的試題共有十四道題。整體而言，學生的通過率為 0.57。明顯地，學生通過本層次的比率顯著地降低。這意味著大體學生在本層次的學習出現了困難。學生在題目「有一魚販賣兩種魚，甲魚和丁香魚，甲魚每斤賣甲元，丁香魚每斤賣丁元。如果我向他買 2 斤甲魚，3 斤丁香魚，那麼 2 甲＋3 丁的意思是什麼？」中，有 10 位學生將「2 甲＋3 丁」視為「2 斤甲魚與 3 斤丁香魚」的物件。明顯地，他們是位階於「文字符號代表特定未知數」的層次，但並未完全發展成熟。而更明顯的是 1 位學生將「2 甲＋3 丁」視為「全部的魚」，呼應了研究者認為他們將「文字符號代表特定物件」的看法。此外，有 1 位學生無法完整詮釋「2 甲＋3 丁」的意義，而只是將「2 甲＋3 丁」記為「魚的總價」。在題目「當 $x=6$，$(x+1)^3+x=349$ 。那麼當 x 值為多少時，能使得 $(5x+1)^3+5x=349$ ？」中，只有 5 位學生能完成正確作答。其他的學生，有 1 位學生受

到$x=6$的影響，因此，認為第二式「$(5x+1)^3+5x=349$」中的x值也是6，因此發現無法滿足第二式的要求。顯然的，此位學生是以「文字符號代表特定數」的認知去處理「文字符號代表特定未知數」的問題。再者，有1位學生試圖化簡$(5x+1)^3+5x=349$而找到答案，但是，他卻將「5」三次方得到125，「x」則未加以處理，且「1」的三次方運算成1×3而得到「125x+3+5x＝349」的結果。顯然的，他對於文字符號的運算是不清楚的。

在題目「比較$2n$和24，哪個比較大？請說明你的理由。」中，解決此問題的最大關鍵點是學生能否知道決定$2n$和24大小的關鍵值12。這些無法答對學生的表現有以下之特質：(1)瞭解$2n$和24會隨著n值的大小而有所不同，但無法以數學式呈現(如：不一定，因為n可以代任意數。)；(2)舉一例說明(如：設n＝13，$2n$=26，26＞24。$2n$＞24。設n＝-13，$2n$=-26，-26＜24，$2n$＜24、n假如是4，4×2＝8，24＞8。但n假如是16，2×16＝32，32＞24。n假如是12，12×2＝24，24＝24)；(3)無法完全分割數系(如：只要n比12大，$2n$就比較大。n只要比12小，24就比較大、n＝＋，$2n$＞24或n＝－，$2n$＜24)；(4)文字符號代表的數系不完備(如：若n＝1~11則24＞$2n$。若n＝12則24＝$2n$。若n＞12則24＜2n)。在題目「梯形面積＝(上底＋下底)×高÷2，小華將上題上底以a表示；下底以3a表示；高則以b表示，那麼梯形面積」中，大多數未答對的學生擁有以下的特質：(1)不會文字符號的運算法則(如：$(a+3a)\times b\div 2=\frac{4ab}{2}$、$\frac{(a+3a)\times b}{2}$等)；(2)擁有錯誤的運算法則(如：$(a+3a)\times b\div 2=2a\times\frac{b}{2}$即是擁有了錯誤的分配率，他將$(a+3a)$和$b$都除以2。也有學生將$(a+3a)$化成$3a^2$運算)。在題目「康康班上有男生$x$（$10\leqq x\leqq 15$）人，女生$y$（$10\leqq y\leqq 15$）人。如果男生人數比女生的2倍少9人，問男生、女生各有多少人？」中，學生必須考量所有符合題意之條件才能解出所有答案。因此，有7位學生只計算出一組答案便以為完成(如：$x=2y-9$，男13女11或男15女12)。這種「無法考量條件周延性」的特色，大多發生在中層次的樣本學生群。其次，有些學生具有「不完備的不等式概念」(如：$x=2y-9$，$10\leqq 2y-9\leqq 15$，$19\leqq 2y\leqq 24$，$\frac{19}{2}\leqq y\leqq 12$，$y$＝10,11,12)，因此，在他們運算完不等式後，並不知道答案是所有不等式的交集，而他們卻以所有不等式範圍的聯集作為答案。最後，有些學生只列出符合條件的方程式，但未進一步地運算，顯現他們對於給予條件的運算是不熟悉的。在題目「再過2年爸爸年齡就是媽媽的2倍。用x表示爸爸現在的年齡，y表示媽媽現在的年齡。試以y列出爸爸的年齡。」與「試以x、y列出爸爸和媽媽的年齡關係。」中，需要藉由列出爸爸和媽媽年齡上的關係($x+2=2(y+2)$)再進行運算化簡的工作，才能得到$x=2y+2$。然而，研究發現：(1)學生在列式的能力上顯示出無法以數學的語言符號表達字意(如：$x+2=2y$)；(2)將文字符號視為代表父母親年齡的物件(如：$x=2y$)。(3)視父母親年齡的比值不變(如2：1)。可見：學生在文字符號代表特定未知數的層面上顯現「將文字符號代表特定物件」、「無法貼切說明具文字符號式子的意義」、「以低理解層次認知處理高理解層次問題」、「不熟悉文字符號的運算法則」、「無法以數學的語言符號表達字意」、「擁有錯誤的文字符號運算法則」、「無法考量條件周延性」、「擁有不完備的

不等式概念」以及「不熟悉給予條件下的文字符號運算」等特質。

（四）學生在一般數層次的表現

在本層次下的試題共有四十六道題。整體而言，學生的通過率為 0.49。明顯地，學生通過本層次的比率還是偏低。這也意味著大體學生在本層次的學習出現了困難。在題目「L＋M＋N＝L＋P＋N。上式□一定成立 □一定不成立 □有時成立，有時不成立。你認為哪一選項為對的敘述？你的理由是？」中，學生仍習慣於將文字符號視為「物件」，符號不同即代表不同的「物件」。因此，有 18 位學生認為：∵M≠P，∴一定不成立。在題目「設 $f=3g+1$，當 g 增加 2 時，f 有什麼變化？」中，有 1 位學生化簡 $3(g+2)+1$ 後得到 $f+6=3g+6+1$ 的式子。此時 $f+6$ 才是後來的 f，但是，學生卻還認定 $f+6$ 中的 f 是後來的 f。可見，學生還是將文字符號視為「物件」處理。其次，有 12 位學生以「$3g+2$」處理「g 增加 2」而造成錯誤，這顯示學生對於文字符號的運算規則不熟悉。在題目「某家俱店上個月賣出的椅子為桌子的 9 倍。以**桌子數**代表賣出去的桌子數量，以**椅子數**代表賣出去的椅子數量，試列出**桌子數**和**椅子數**的關係式。」中，有 16 位學生「固著於文字符號的表徵方式」，認為文字符號的式子非得以「x」、「y」表徵才行，因此另自行為椅子數與桌子數命名，才列出方程式(如：設椅子數為 x，桌子數為 y，$x=9y$)。然而，其中也有一部分 6 位同學無法將題意適切以文字符號列式，而造成文字符號間關係的錯誤。在題目「如果 甲＋乙＝丙，那麼 甲＋2 乙＝？」與「如果 甲＋乙＝丙，那麼 甲－乙＝？」中，有些學生能了解題意，但無法列式(如：＞丙)。有許多學生為文字符號代入符合方程式條件的一組數值，再以這些數值去拼湊文字符號答案的組合(如：3＋1＝4，3－1＝丙－2)。但也有些學生自行賦予文字符號間的關係，再執行運算而得到答案(如：甲＋乙＝丙，甲＝乙＝$\frac{1}{2}$丙，∴甲－乙＝$\frac{1}{2}$丙－$\frac{1}{2}$丙＝0)。這種「以特例詮釋通則」的特質顯示學生將文字符號視為「特定數」去處理。在題目「設 $c+d=10$，且 $c<d$，則 $c=$？」中，有 12 位學生能夠理解文字符號代表很多符合條件的數，但是他們無法將 $c+d=10$，$c<d$ 結合成 $c+c<c+d=10$。這顯示學生具有「文字符號代表一般數」的概念，但卻不熟悉該如何去表徵(如：無限多解、無限多：小數、分數、負數)。另外，有一些學生仍將文字符號視為整數(如：4,3,2,1,0)。換言之，即是無法完備地視「文字符號代表一般數」。在題目「比較 $2n$ 和 $n+2$，哪個比較大？請說明你的理由。」中，許多學生「無法依題意完整切割數系」，以進行 n 值變化時 $2n$ 與 $n+2$ 大小的比較。也有一些學生以舉例的方式進行判斷，但這都顯示其將文字符號視為「特定數」處理。可見：學生在文字符號代表一般數的層面上顯現出「幾何圖形的迷思概念」、「以完形概念處理不完整的圖形」、「將文字符號視為特定未知數」、「將文字符號視為物件」、「不熟悉文字符號運算規則」、「固著於文字符號的表徵方式」、「以特例詮釋通則」、「不熟悉文字符號的列式」、「將文字符號視為特定數」以及「無法依題意完整切割數系」的特質。

伍、結論

綜合來說，學生在較高層次的理解情形愈顯不穩定。這些結果，將能提供本研究在未來以例子引導學生對文字符號理解時的佈題參考，也能提供教師在教學時特別留心注意之要項。

參考文獻（略）