從青少年國際城市數學競賽分析中學生之數學能力

柳　賢　國立高雄師範大學數學系教授
李浩然　高雄市光華國中數學科教師
lieddy.tw@yahoo.com.tw

摘　要

本研究藉 2005 年青少年國際城市數學競賽，瞭解參賽各地區學生數學表現。研究對象以加拿大、泰國、香港等 11 個地區 136 位學生，針對學生的答題表現進行比較，並從數學內容與數學能力兩個面向加以分析。研究結果發現，整體而言台灣、香港與泰國在此次數學競賽中表現較為突出；數論方面學生在位值概念與除法原理表現不錯，但是將數概念轉換成代數表徵進行歸納推理的能力需加強；代數方面能適當的應用乘法公式，不過對於代數輔助元素的使用並不理想；幾何上學生能理解畢氏定理等基本幾何概念，而在平行、垂直與三角形內外心概念的連結上仍須努力。

關鍵詞：數學解題、數學競賽

壹、研究動機與目的

數學能力是國民素質的重要指標之一，它可藉由評量進行國際的評估（教育部，2003）。有鑑於此高雄市政府教育局與國立高雄師範大學，結合國內中學以及大學等學界力量，辦理國際青少年數學競賽，提供國中學生數學國際活動交流的機會，並了解各國青少年數學解題策略及特性，帶動我國中學學生數學學習，以提昇我國數學教育水準；同時能聯繫國際數學教育人士，增進我國國際數學學術活動，並促進世界各地中學學生在數學領域的交流，且有助於啟發國內各地區國中學生數學的潛能。

人類從出生後即具備嘗試錯誤、尋求策略及解決問題的本能，並具備形成與數的初等直覺，透過文明的累積使這些本能得以具體的延伸為數學知識（教育部，2004）。目前九年一貫課程在數學領域中，強調學生獨立思考問題，發展推理問題策略的能力，而數學的發展也就在發現問題、思索問題和解決問題的歷程中逐漸形成；所以要瞭解學生的數學學習狀況，可從觀察學生的解題行為著手；美國數學教師協會（NCTM）在 1989 年的中小學課程及評量標準中亦提到，解題活動是學校數學的主要課題；因此可經由學生解決數學問題的表現，評估學生在數學概念的學習之外，還可藉由解題的歷程瞭解學生抽象思考與推論的能力。據此，研究者提出本研究之目的：

1. 瞭解學生在「2005 年青少年國際城市數學邀請賽」的整體表現情形。
2. 比較台灣與參賽地區學生在「2005 年青少年國際城市數學邀請賽」中不同數學內容的解題差異。

貳、文獻探討

一、 數學的內容

數學學習涵蓋了數學能力與數學內容兩個部份，NCTM（2000）在學校數學原則與標準中提到，數學的內容包含數論、代數、幾何、測量以及資料分析與機率，目前國內九年一貫課程則將數學的內容分成數與量、幾何、代數、統計機率與連結等五個部分(教育部，2003)；若以概念型態加以區分，可將數學內容分為數論、代數、幾何、測量與統計機率五個部份。此次競賽因測量和統計與機率，其概念涉及日常生活經驗與自身感覺，為了降低環境與文化所造成的干擾，所以此次題目以數論、幾何與代數為主。

（一）數論

從歷史的角度來看，數字是數學課程之基礎（Reys&Nohda,1994 轉引自 NCTM,2000)，整數的概念與運算是國小數學課程的核心，從代數的解方程式中具有與數論相同的數字結構系統，而幾何也運用數字的系統加以描述（NCTM,2000)，由此可知數論概念是數學學習的基礎；其主要概念的形成與運算能力的培養均奠基於國小，而國中是延伸至負數的整條數線教學（教育部，2003)，因此中小學數論內容中，包含對數概念的瞭解與數運算的理解，且需提升流暢的數運算技能。

（二）代數

一般提到代數就會想到解方程式，從 NCTM（2000）的數學標準中提到，代數包含了 1.型態、關係與函數的了解 2.運用代數符號分析數學的情境與結構 3.使用數學模型呈現和了解數量之間的關係 4.分析和轉換各種背景關係。因此代數重視數量間的關係，並運用函數來結構數學的關係，以及分析其轉變情形；其次代數也強調邏輯的推理，培養學生抽象思考的能力,在幾何推理上常需藉由代數推導出新的概念,創造出新的結果(教育部，2003)，所以代數是將數型關係轉化為符號表徵，進行推理的關鍵課程。

（三）幾何

幾何是關於形體之間的構造、關係與性質的數學內容，因此國小的幾何課程中，強調從操作中了解幾何形體的性質，國中階段的幾何學習則是強調觀念的定義、幾何量的代數運算，與簡單的幾何推理（教育部，2003)；NCTM（2000）在幾何的標準中提到中學數學課程中包含 1.分析二維和三維的幾何形體特性並發展幾何關係的數學證明 2.利用座標幾何或其它呈現方式說明位置與型體關係 3.運用轉換與對稱分析數學方位 4.使用想像、空間推理和幾何模型去解決問題。因此中學幾何課程中幾何推理能力是很重要的，也就是培養學生能經由圖像與形體關係，轉換為形式化的推理過程。

此次數學競賽，數論方面包含位值概念、除法原理、數列與級數求和等數的基本概念與技能，代數方面則有方程式求解、不等式、乘法公式與代數輔助元素的使用，幾何方面提到三角形內外心性質、平行、垂直與角平分線等相關幾何性質的推理之應用。除單一概念的理解外，同時還強調概念之間相互連結，以及數學內容間的表徵轉換。

二、數學能力

學生數學能力的發展始於概念知識的理解與流暢的演算技能，然而才懂得運用推理解決數學問題（教育部，2003)，NAEP（1988）也指出將數學能力分為概念理解、程序性知識與問題解決；因此若要分析學生的數學能力，可以從概念知識與理解、技能的學習及解題能力三個面項加以探討：

（一）概念知識與理解：

數學學習的過程中，學生往往會運用先前的學習與經驗來建立數學知識，因此學生對於正確概念的理解是很重要的；從許多的研究中可以發現，概念理解能促進學生熟練的運用實際的數學知識與程序性事實，當學生記得數學事實或程序，若沒有理解其中的概念，則往往無法正確的運用已知概念（Bransford,Brown& Cocking,1999），因此數學能力的培養首重學生的概念理解，進而才能發展問題解決和推理的能力（NCTM,2000）。

（二）過程技能：

Gange 曾提到數學的學習，分為概念的學習與技能的學習。現今國內九年一貫及 NCTM (2002)在數學學習指標中，重新重視數學技能的發展。技能實際上是由概念和原理發展出來，同時能提供其他概念原理的發展基礎。一般而言技能具有兩種特色 1.是熟練與準確性 2.是效率與速度(Suydam＆Dessart,1980 轉引自 NCTM,2000)。教師和學習者以往將技能學習誤以為學生計算能力的發展，導致過分強調公式的背誦與機械化的訓練。

（三）數學解題能力：

在九年一貫與 NCTM (2000)的整體數學學習與教學目標中，提到除了培養學生數學概念技能的能力與數學態度外，還包含了數學解題能力的提升。Lester（1980）認為解題是指面臨一種情境，沒有一種保證可以解決的算則，個人必須運用所有可獲得的資源去完成解答。Mayer（1985）將問題界定為從一「給定狀態」要到達「目標狀態」，其間沒有明顯的路徑可以利用，於是就覺得遇到障礙，這就產生了問題。

因此概念理解是解決數學問題的先決必要條件，而技能強調的不應只是程序性的練習，更需瞭解程序中所隱含的概念和原則，所以在此數學解題能力也就是應用數學的概念與技能解決非例行性的思考問題，就是從「給定狀態」到達「目標狀態」的思維歷程。

參、研究步驟

一、研究歷程

本研究屬於調查研究，希望能從此次國際城市數學邀請賽，瞭解台灣地區與各參賽地區中學生數學表現及彼此差異；首先依據數學內容與數學能力兩個維度設計評量工具，將施測結果進行單因子變異數分析後，評估台灣與各地區的總分平均，進而比較台灣與各參賽地區數學內容的差異；並將試題中所涵蓋的基本數學概念與能力加以解析。

二、研究對象

本研究以參加競賽的所有學生為樣本，其中包含加拿大、泰國、香港、印度、印尼等 11 個地區共 136 位學生；以城市為單位每個城市 1 隊 4 位學生，除地主地區外每個地區約有 3 隊參加；各參賽地區選手均經由初賽、複賽及決賽三個階段選拔產生。因此本研究僅限於描述參加競賽的樣本，並不做過度的推論。

三、 研究工具

由競賽評審委員會負責工具的編製與審定，以試題的類型而言，個人賽的部分包含 12 題填充題與 3 題計算證明題，將試題依數學的內容可分成數論、代數與幾何三大部分，並針對數學的能力將題目分成，概念知識與理解、過程技能與解題能力三個層次，

數論部分有 6 題，代數部分有 4 題，以及幾何部分有 5 題共 15 題如表一。

表一 國際城市杯數學邀請賽競賽試題之雙向細目表

	數論	代數	幾何
概念知識與理解	1，4，11	7	2，9
過程技能	5，10	3，8	
解題能力	應 3	應 1	6，12，應 2

四、資料分析與整理

從各參賽地區學生在此次競賽中的答題現況，針對各地區的競賽總分平均，及數論、代數與幾何上的表現，進行單因子變異數分析，藉此了解各地區在這幾個項度的整體表現與離散情形，並比較其它參賽地區與台灣的差異；進一步分析各參賽地區學生在不同數學內容間，概念知識與理解、過程技能與解題能力三個層次的學習表現。

肆、研究結果：

一、台灣與各地區學生的整體比較表現如下表二

表二　台灣與參賽地區學生整體表現比較表

地區	總分平均	標準差	0~20	20~40	40~60	60~80	80~100	100~120
加拿大	19.50	11.39	50.0%	50%				
（Edmonton）	39.75	12.45		50%	50%			
大陸（福州）	66.17	29.00		25.0%	16.7%	16.7%	33.3%	8.3%
香港	5.00	7.19	91.7%	8.3%				
印度（Lucknow）	19.00	12.80	62.5%	25.0%	12.5%			
印尼（Jatarta）	44.19	22.73	18.8%	31.3%	31.3%	6.3%	12.5%	
澳門	28.88	11.13	37.5%	43.8%	18.8%			
菲律賓（Lozon）	46.50	21.16	12.5%	37.5%	12.5%	37.5%		
新加坡	20.50	3.11	75.0%	25.0%				
南非（Durban）	65.33	17.14		8.3%	16.7%	66.7%	8.3%	
泰國	72.75	18.42		2.5%	22.5%	35.0%	32.5%	7.5%
台灣（北中南）	48.24--	29.15-						
整體平均								

以個人賽總分而言，台灣 72.75 分、香港 66.17 分與泰國 65.33 分比全體平均分 48.2 高出約 17 分，於此次競賽地區中分居前三名表現最為突出，以學生的成績分佈而言台灣的分佈偏常態分佈，香港的分佈則較為分散，泰國的學生則集中在 60~80 分的比率較高；新加坡 46.50 分、澳門 44.19 分這兩個地區的總分與全體平均總分 48.2 分最為接近，且澳門的學生在答題的分佈情形比較廣；此外南非 20.50 分、加拿大 19.50 分與印尼 19.00 分這三個地區的總分平均非常接近，在成績上的表現偏低且集中。從學生表現的離散情形分析從對變異數的觀察中可發覺，台灣地區變異數 18.42 遠比香港的 29 要小，這表示台灣地區的學生在總分表現上比香港一致；而以所有地區而言香港學生彼此間的總分落

差較大，而南非的學生變異數僅只有 3.11 在總分上的差異最小。

二、各地區學生在不同數學內容上的分析與比較如下表三

表三　台灣與參賽地區學生不同數學內容的分析比較表

地區	Mean(N)	SD(N)	Mean(A)	SD(A)	Mean(G)	SD(G)
加拿大（Edmonton）	7.50	6.45	1.25	2.50	10.75	10.69
大陸（福州）	14.25	4.35	8.75	2.50	16.75	11.62
香港	22.50	9.21	19.42	13.30	24.25	11.58
印度（Lucknow）	2.08	3.96	2.25	3.55	.67	1.61
印尼（Jatarta）	12.13	7.59	3.25	6.25	3.63	3.29
澳門	14.38	4.41	16.00	10.17	13.81	10.24
菲律賓（Lozon）	13.81	4.43	8.50	7.63	6.56	7.69
新加坡	20.75	10.65	7.88	5.08	17.88	11.08
南非（Durban）	12.50	2.89	1.25	2.50	6.75	2.75
泰國	19.50	5.99	20.42	11.77	25.42	9.02
台灣（北中南）	23.40	8.91	23.33	9.53	26.03	9.02
整體平均	17.03-	9.58-	14.44-	11.93-	16.76-	12.65-

註: Mean(N)表示數論試題總分平均，Mean(A)表示代數試題總分平均，Mean(G)表示幾何試題總分平均
SD(N) 表示數論試題的變異數，SD(A) 表示代數試題的變異數，SD(G) 表示幾何試題的變異數

（一）在數論上的表現如：

以數論來說台灣、香港與新加坡在數論總分上的表現優於其它地區的學生，其中新加坡在數論上的平均表現不錯，達 20.75 分高居第三並優於代數和幾何上的表現，但變異數 10.65 卻高於其它地區，這表示該地區學生的數論表現較為分散。從數學能力來分析，各地區對於數概念知識的理解表現差異性較小，大部分的學生在位值概念的應用上比其它數概念要好，但是大陸與南非這兩個地區的學生則在除法原理中餘數概念的運用表現不錯；過程技能方面以等比級數與無窮等比級數求和的表現較差；而解題能力的部份，在觀察數列從中尋找規律的表現並不理想，這可能與教材內容的編排有關，以台灣而言等比級數是被安置於高中教材中，因此學生對於等比級數概念則較為生疏。

（二）在代數上的表現

台灣、泰國與香港在代數主題表現不錯，不過香港學生在代數上的表現較為分散（*SD*=13.30）；新加坡在代數的整體表現比數論和幾何要差，以平均而言排名第七；而澳門在代數的整體排名第四高於數論和幾何。在數學能力方面加拿大、印尼、新加坡與南非在方程式求解的概念表現上不足；過程技能方面大陸、澳門與泰國在乘法公式的變換與運用上表現非常好尤其是大陸；但是在利用輔助元素進行方程式的分解技能上略顯不足，這可能是因為在處理方程式分解問題時，受固有方程式結構的影響，忽略了可利用輔助元素進行方程式的分解。此外加拿大、大陸、印度、印尼新加坡與南非等地區的學生，從等價方程式之間推理出未知數的關係表現上較不理想。台灣雖在乘法公式的轉換上不如大陸地區的學生，不過代數輔助原素的應用與藉由方程式之間的等價關係，進行方程式的合成與分解的代數解題表現最為突出。

（三）在幾何上的表現

幾何主題上台灣、香港與泰國分別位居前三名，但在平均分數上的差異不到 2 分；此外加拿大地區在幾何上雖與台灣達顯著性差異，整體排名第七明顯的優於其本身在數論與代數上的排名。從數學能力的角度分析，台灣雖然在幾何的排序是第一，但是在三角形內心、外心性質的連結上仍有進步的空間；其實一般學生在幾何基本概念如畢氏定理的運用，以及利用三角形與矩形的幾何形體關係測量面積的整體表現不錯，但是在三角形三心性質、平行和垂直等幾何性質的連結應用則不如預期的理想，這表示各地區雖強調基本的幾何概念，對於學生在幾何性值之間的連結和應用須再努力。此外加拿大、南非與新加坡在幾何上的表現，雖比代數上的表現要好，但對於需將幾何性質轉換成代數表徵，進行思考與推理的能力仍不足。而印度與印尼在幾何的表現上則較差，尤其在運用基本幾何性質推理幾何問題的表現上。

整體而言此次國際數學邀請賽，台灣、香港與泰國在整體總分與各數學內容上的表現，較其他地區突出，而學生在數學概念知識與理解上的表現，相較於數學技能與解題能力上的表現較為穩定，這說明了各地區的數學教學活動，仍是以數學基本概念的理解與應用為主軸。此外大部分學生在數論基本概念的應用表現不錯，不過在等比級數求和的部份則不理想，這可能是教材編排有關。代數學習上，一般學生在乘法公式等數學技能的轉換與運用上表現不錯，但是在代數輔助原素的應用，與從等價方程式中尋找未知數的關係則表現稍差；另一方面學生夠理解與應用幾何的基本概念，但是對於幾何性質的延伸與概念間的連結表現較差，這可能是因為在數學教學中，對於幾何性質的推理與概念間關係的引導不足。再者從學生的解題表現中不難看出，大部分學生對於如何將數論或是幾何概念轉換成代數式進行推理，的概念與表徵之間的轉換是有待加強的。

三、綜合討論

表四　台灣地區學生與參賽所有學生不同數學內容的數學能力比較表

	數論能力表現			代數能力表現			幾何能力表現		
	台灣平均	總平均	分項和	台灣平均	總平均	分項和	台灣平均	總平均	分項和
概念知識與理解	14.18	11.94	15	4	2.72	5	8.88	6.18	10
過程技能	5.13	2.87	10	7.45	5.19	10			
解題能力	4.10	2.22	20	11.88	6.53	20	17.15	10.58	30
總分	23.4	17.03	45	23.33	14.44	35	26.03	16.76	40

由上述可知台灣在數論、代數與幾何等數學內容的表現所有參賽地區最好的；並從表四可以瞭解台灣在概念知識與理解的表現，接近分項的總分，且和整體學生的表現差異並不大；在過程技能方面，數論方面的分數雖高於所有參賽學生的平均分數，但是在此部分仍有進步的空間；在解題能力方面，以幾何上的表現較好比整體學生平均高出約 7 分，不過在數論的解題能力的培養上則有待加強。

針對數學內容中所蘊含的概念加以分析，數論方面台灣學生將完全平方數的概念，轉換成符號進行解題的表徵轉換上表現良好，但是將數列與級數轉換為文字符號進行歸納，繼而推理出一般性的能力需再加強；代數問題上表現在方程式求解與乘法公事的應

用上表現平穩，但是從等價方程式間尋找未知數的關係上則略顯不足。在幾何表現上，雖然台灣學生在平行、分角線與三角形內、外心性質的應用上比其它地區的學生要好，但從整體的表現看來對於幾何性質的連結與推理上仍有進步的空間。

伍、結論與建議

一、研究結論

研究結果發現，學生在位值關係與除法原理的數論基本概念表現不錯，因為數概念與運算是數學學習的基礎（Reys & Nohda,1994），且在代數與幾何方面仍需運用到數概念與數運算技能；但是將數列與級數轉換為代數表徵後，進行歸納推理尋找其一般化的表現並不理想；而台灣在將數論概念轉換為符號表徵進行推理，的表現比其它參賽地區要好。代數方面，雖然大部分學生在代數技能上的表現不錯如乘法公式的應用與變換；不過在利用輔助性元素進行方程式的重組與分解，以及從等價關係式中探索未知數之間關係的問題表現上，學生受到方程式結構與解方程式之固有型態影響，導致思維型態固著無法轉變。幾何方面，一般學生在基本幾何概念的表現不錯，如商高定理與形體面積的應用，但是在平行、垂直與三角形幾何性質連結，以及將這些概念轉換成代數式，進行推理的表徵轉換過程仍須再加強。整體而言，學生在單一數學概念或技能的理解與應用上表現不錯，但是在概念與概念間的連結表現則需再加強；此外將不同的數量與幾何形體概念轉換為符號表徵進行形式推理，則是解題成功的關鍵，而台灣學生在這兩個部份的表現比其它地區的學生稍好，從這些結果中可以佐證，九年一貫的數學能力指標中，在內部的連結強調概念間的連結，外部的連結中強調問題的轉化能力之重要性。

二、研究建議

從研究結果加以分析，數論方面除了數概念的理解外，還需引導學生從圖形與數列中歸納數形關係；解代數問題時需理解與熟悉基本方程式的解法外，並能藉由代數輔助元素拓展學生的思考型態；在幾何方面除基本幾何概念的理解外，還需進一步協助學生對於相關的幾何性質進行分析與比較，如此才能更深入了解幾何形體間的關係促進幾何性質的連結與應用。此外在數學解題上，除了重視概念的理解與技能的應用，還需引導學生察覺已知條件與未知數之間的聯結關係，有時應打破固有形式的固著想法轉換思維型態，進而將已知與未知的關係轉換成符號表徵，促進學生進行數學推理。

這次的國際數學競賽題目包含數論、代數與幾何三種數學內容，但統計與機率方面並沒有納入試題範圍；而等比級數求和的概念，目前不屬於國中教材，但此次的考題中有所呈現，因此未來在試題的編製上，需加以評估其適切性或轉換試題形式再加以呈現。此外本研究只有初步的分析學生，在不同數學內容的答題概況，未來研究可以從學生的解題歷程切入，探討不同文化背景與數學學習環境，所產生思維與解題型態的差異。

參考書目

一、中文部分

教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程綱要-數學領域。台北市：教育部。

二、英文部分

Mayer,R.E.(1992). Thinking,Problem solving,cognition.New York:W.H.Freeman and Company.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principle and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM