國小學童幾何論證表現之初探

李梓楠　鄭英豪*
國立台北教育大學心理與諮商學系碩士班
中國科技大學通識教育中心*
tedbob51@yahoo.com.tw、yhjeng@cute.edu.tw*

摘　要

本研究以 34 名國小六年級學童為對象,主要探討國小階段學童其幾何論證能力的表現。研究者發展以國小所學幾何知識為範圍的測驗試題，將試題以亂數排序進行團體施測,檢驗學童根據圖形憶取正確幾何性質以及以幾何性質進行論證(連結給定訊息與欲證結論)的表現。研究結果發現學童面對幾何論證時，憶取正確性質能力表現偏低，面對幾何圖形時無法適時將已學過的幾何知識提取與使用；多數學童無法將已知訊息與欲證目標兩者相互連結；但在幾何概念題中學童較能利用性質對於欲證目標加以說明，也就是說幾何計量題對於學童而言在論證的學習上並不一定比幾何概念題簡單。

關鍵字：幾何學習、幾何論證

一、研究問題與目的

（一）問題背景

我國現行中小學數學課程中，圖形與空間單元的學習在各階段中都有明顯的圖形論證(argumentation)活動（教育部，2003），包括第一階段要求學生透過視覺判斷與操作觀察進行圖形推理；第二、三階段則包含察覺形體的組成要素、以及組成要素間的關係與性質、察覺圖形特徵與定義、利用圖形性質解題等論證活動，並佔據了能力指標的大部份；第四階段則有非形式演繹、幾何定義與包含關係、應用性質解決問題、尺規作圖等，皆為典型的論證活動，並且是這個階段能力指標的全部，這種設計顯示出圖形論證乃是中小學幾何課程的主要目標。

國小階段的幾何論證學習主要採用操作取向，學童直接操作具體物件，辨認幾何圖形，透過測量、摺疊找到角度與邊長的性質，並運用上述性質找到面積與體積的算則。教學時教師通常介紹圖形的正規名稱，並以形式化的表徵將面積與體積的運算過程帶入。到了國中階段，課程則著眼於發現幾何物件之構形間的不變性(invariant of properties)，並且應用這些不變性解決問題。學生在國二下開始學習三角形全等性質，之後就開始學習演繹推理，課程亦開始進入幾何證明活動，在國三上，學生將學習如何建構幾何證明，換言之，國中階段幾何學習的最後一階段就是形式證明(Lin, Chen, Cheng & Lin,2004)。

根據國內學者的研究指出，在學完幾何證明單元之後，國三學生僅 24.6%能建構出

考試中可以得滿分的證明 (Lin and Cheng, 2003)，由此可知，幾何論證涉及許多複雜的學習因素，即使在國三專門學習也不一定能有實效，以我國如此重視幾何論證，並以形式證明為目標的課程設計來說，如何增進學生幾何證明的學習成效是重要的研究議題。這個問題可以從國三學習形式證明的方式切入，以更有效的教學策略來提昇學生的幾何證明能力（鄭英豪，2006），也可以從學習幾何論證的起點：運用幾何性質解決問題切入，探討引發更高層次論證的可能方式。本研究採用後者觀點，以國小六年級學童為研究對象，探討學童在學習幾何論證之初的表現，藉以提供中學幾何論證學前之基礎。而本研究以國小六年級不以國中生為研究對象的原因在於依照九年一貫的課程證明概念是在國中階段才開始涉及的，如果以國中生做為研究對象是比較適合的，但研究者想要瞭解在完全未接觸幾何證明的國小階段學童的表現是如何，藉以瞭解在國中階段之前，學童起始點是如何，透過教學瞭解國小學童其論證表現的極限，並給予國中課程一些啟發。

（二）我國學生的幾何證明表現

幾何論證是將已知訊息與欲證目標兩者透過某種合理的方式（如：操作或是說理）相互連結。國內探討學生幾何論證表現的研究多以國高中生為主，例如 Lin and Cheng(2003)以全國抽測的方式調查我國論證能力，將國中生的幾何論證品質分為直觀反應、不當的、不完備的與可接受的四種層次，分別為直觀反應：包括直覺、感覺、視覺；質疑或忽略問題所提供資訊；覆述問題、訴諸權威，例如「書上說的」、「老師說的」。不當的論證：包括實測、估測、操作；舉例證明，或只說出命題不一定對；非關鍵因素的論說，例如用錯誤的性質或非關鍵性質來論述。不完備的論證：包括察覺需證明的關鍵，但做出不完備的論說，例如無圖形的反例、圖示而無說明、缺乏某些必要步驟等。可接受的論證：包括完備而嚴密的形式化演繹；明確的反例與說明；洞察關係的動態解釋；掌握要點的解析說明等，而全國調查的結果發現，學完幾何證明單元的國三學生有約四分之一可作出可接受的證明，約三分之一的證明是不完備的，有三分之一是空白或無關的敘說，不當的與直觀反應的表現非常少，而不完備證明主要是缺少其中一個必要步驟(Lin and Cheng, 2003)。後續的研究發現國中生在面對幾何訊息時論證很難覺察隱性訊息；傾向思考「憶取腦中滿足給定條件的圖形」，也就是用所想出的圖形當作問題中的對象，而不是「從問題的給定資訊來造出對應的圖形」；許多學生邊讀題目就會邊將推論做出，並不是把題目全部讀完後才依欲證去組織資訊推論（鄭英豪，2004、Lin,2005）。對此現象 Lin(2005)認為可能是學生無法組織演繹推理的步驟、無法理解問題內容、無法憶取相關知識或是個人自身的信念問題，例如：倚賴視覺所導致。

全國性調查顯示不同年級學生的證明品質類型差異極大，顯示學生並沒有穩定的論證能力，不過從能做出不完備或可接受證明的學生比例來看，國一學生已有超過三成（36.7%）能解決一步驟問題，同時國二比國一稍高，而國三則明顯高於國二。同時，直觀反應的比例則依年齡遞減，顯示我國學生的圖形論證能力有逐年脫離直觀而朝向完備演繹發展的傾向(Lin and Cheng, 2003)。

（三）研究問題與目的

本研究目的主要探討國小學童幾何論證能力的表現，瞭解學童在未接觸幾何論證前

最原始的表現與學習問題，作為後續研究之參考。

二、研究設計

（一）研究對象

研究對象為大台北地區（土城）的國小高年級學童，抽樣學校為立意取樣，抽樣一個六年級班級，總共一班，計 35 名學童，剔除無效樣本，進入分析的有效樣本為 34 名。這群九十四學年度的六年級學童所接受的數學課程，包含八十二年版的數學課程標準以及九十二年版的九年一貫課程綱要之教材。本研究實施於九十四學年度上學期的十二月底，該群學生已經學習完國小階段的所有平面幾何教材。

（二）研究工具

本研究之研究工具是參考李梓楠（2006）針對國小學童設計的論證試題，依解題時所需使用的幾何性質分為 1.幾何概念題：正方形對角線問題（兩對角線為何相等）、菱形對角線問題（對角線形成的底角為何相等），與 2.與幾何計量題：三角形外角和問題（為何外角相加為 360 度）及多邊形公式問題（六邊形內角和為何 720 度）兩類，每類兩題（試題如附錄），其中試題編製完成後與數位現場教師、數學教育及教育心理學專家討論。研究結果的編碼由於本研究為一個初始的探究，因此採用開放性編碼廣納各種不同的論證方式以做為後續研究的啟發。

（三）研究流程

施測時間共計 40 分鐘，並將試題以亂數處理。試題的測驗方式為團體施測，作答前再次告知學童可以利用任何已知方法或工具說明原因。指導語的提供為：「這是一份有關於推理的趣味測驗，這份試卷不是考試，與小朋友的成績不會有任何關係，請盡量發揮自己的想像力，必要時可以使用任何的工具作為輔助」。

（四）資料分析

研究者以鄭英豪（2004）的分類架構為基礎，將國小學童的幾何論證分為七種類型，依據學童所講述的理由充分性加以分類，所謂的充分性是指不容易被同儕間所反駁，層次如表 1。

表 1　**學童表現分析架構**

表現類型	內涵
1	空白
2	視覺：用看的；訴諸權威：以前教過、老師說的
3	測量
4	僅使用已知性質，且有包含無關性質；套公式
5	能正確使用已知性質說明，但缺少關鍵性質說明
6	能正確完整使用已知性質說明，但無法將欲證目標與已知訊息相連結
7	完整正確的論述

三、研究結果

研究者依據表 1 的分類方式將學童的書面表現加以分析，其結果如表 2。

表 2　**學童表現類型分佈**

試題 / 表現類型	幾何概念題		幾何計量題	
	正方形對角線	菱形對角線	三角形外角和	多邊形公式
2	26.5（9）	32.4（11）	55.9（19）	23.5（8）
3	2.9（1）	5.9（2）	14.7（5）	8.8（3）
4	50.0（17）	17.6（6）		35.3（12）
5	11.8（4）	26.5（9）	5.9（2）	
6	5.8（2）	11.8（4）	2.9（1）	5.9（2）
7	2.9（1）	5.9（2）	20.6（7）	26.5（9）
註：百分比（人數）				

（一）學童在幾何概念題的表現方面

正方形對角線問題上，50%的學童都是將已知性質寫出來，例如：正方形四邊等長，或是四個角都是直角，對於性質間的關係並未作任何說明與解釋；26.5%的學童則是利用工具測量或是倚賴視覺進行論述；11.8%的學童能正確使用已知性質說明，但缺少關鍵性質說明，能留意已知訊息與欲證目標間的關係，但缺乏關鍵性質間的連結。

在菱形對角線問題上，學童表現主要分布在兩種類型，其一有 32.4%的學童倚賴視覺感官進行論述，其二則有 26.5%的學童是能正確使用已知性質說明，但缺少關鍵性質說明，無法利用已知的方式將起始目標與欲證目標兩者相互連結。但亦有 17.6%的學童屬於僅描述已知性質而未對性質間的關係加以論述。

進一步分析兩題間表現的異同發現，學童在憶取菱形與正方形的性質時有顯著差異 ($t_{.05(33)}$ =2.47, p＜.05)，且菱形表現優於正方形，但在兩圖形的論證表現上並沒有差異。整體而言，僅 32.4%（兩題共 22 人次）能憶取正確性質，而能運用過去學習經驗（如操作）說明性質間的關係也僅 4.4%（共 3 人次），顯示在幾何論證中所需的基本能力在概念題中皆無較好的表現。

（二）學童在幾何計量題的表現方面

在三角形外角和問題上，高達 55.9%的學童使用視覺感官進行推理，藉由視覺論述，而 20.6%的學童為完整且正確的論述；亦有 14.7%運用測量說明欲證目標。根據學童表現研究者認為學童無法利用性質進行論述，有很高比例的學童僅能運用視覺進行推理，而運用視覺推理的學童紛紛表示因為三角形外角和就是 360 度、他看起來就像 360 度，顯示學童對於已經學過的幾何性質不知何時必需使用，何時使用會比較恰當，而本題與幾何性質的論述方式不同於除了要憶取相關幾何性質之外，仍須將性質加以運算。故，學童必須知道哪些是可用的性質還需將性質加以運算，研究者就學童表現認為其難度比幾何概念題為高，學童須掌握性質與運算關係才能推得結論，由學童表現顯而易見普遍都不知如何使用幾何性質，甚至能說出正確性質的學童亦僅 8.8%（不包含完整論述者），由此看來，學童在面對沒學過的計量試題，會依賴學童的本能，過去的學習經驗運用視覺進行推理。

在多邊形公式問題上，有 35.3%的學童直接將數據帶入公式當中，對於公式並未做任何說明，將其當成計算題進行運算，而忽略題目的敘述「請你說明你的理由」，此現象研究者認為學童對輿論證概念仍不清楚，學童認為有計算過程即為理由，認為都算出來了還需要說明理由嗎？但仍有 26.5%的學童清楚表達為何六邊形內角和為 360 度。除此之外，亦有 23.5%或許忘記計算公式，因此倚賴視覺推理。故，研究者認為學童在面對熟悉的題目時，會利用過去的解題經驗表示，但轉換方式以逆向詢問學童理由，普遍學童都無法正確回答，仍以過去方式回答或選擇視覺推理。此外，學童在兩個幾何計量題上憶取性質與進行論述的表現上都無顯著差異。

（三）幾何概念題與幾何計算題的比較

整體來說，學童能說明性質間關係的比例，幾何計算題(23.5%)高於幾何概念題，而以視覺判斷論述者，幾何計量題的比例(39.7%)也高於幾何概念題(29.4%)。

四、結論與討論

（一）學童面對幾何論證時，憶取正確性質能力表現偏低。

由結果顯示學童無論在概念題或是計量題的表現上運用正確幾何性質進行論述的人數皆偏低，研究者認為本研究所設計的題目皆為學童所熟悉的基本性質，學童作答時，不會因為性質不熟悉而無法作答，因此研究者推論在幾何論證的學習上，學童不會主動將過去學習過的幾何知識提取出來使用，同時也有可能是學童不知道過去舊有的幾何知識要如何使用，另一方面亦有可能是學童不知道幾何論證的概念，因此不會主動憶取幾何性質作答。但無論是何種情況，對照國中生的論證表現，研究者認為國中生面對幾何證明時，無法主動憶取正確性質進行論述，其學習問題早在國小階段就已產生，並非在國中時才產生。

（二）多數學童無法將已知訊息與欲證目標兩者相互連結。

在國中階段，學生進行幾何證明必須以演繹的方式，依步驟依序推理論述，將已知訊息與欲證目標兩者相互連結。然而，在國小時期，學童未接觸過幾何證明，故，在論述的方式上與國中階段有所區隔，只要學童能利用過去所學的經驗（例如：操作說明），進行論述即可，不需以演繹的方式進行。但研究者發現學童很難主動將已知訊息與欲證目標相互連結，特別是概念題方面，能加以連結的學童僅 3 人次，比計量題的 16 人次相差頗多。由此可知，計量題方面能憶取正確性質的比例與概念題不相上下，但在計量題方面，只要學童能憶取正確性質進行論述者即能將已知訊息與欲證目標相互連結。

（三）幾何概念題中學童已經能利用性質對於欲證目標加以說明。

根據學童表現研究者認為在正方形題中學童有六成的學童已經會利用幾何性質對欲證目標加以說明，雖然學童沒有學習過任何有關論證概念，但從學童的表現中研究者認為學童已經能主動利用性質進行論述，知道單純倚賴視覺或是藉由操作進行論述是不可行的，顯示在國小階段學童在幾何論證的表現已有初步的能力。菱形與正方形的表現相差無幾，但能利用性質進行說明的，則較正方形少（減少 11.8%），研究者認為這是由於菱形能論述的性質遠少於正方形，依照學習經驗而言，國小學童接觸正方形的機會也遠比菱形為多，倘若學童無法憶取與菱形相關的幾何性質則轉而使用過去所熟悉的方式進

行論述，但相反的如果學童能憶取菱形的性質，則此題的困難度就會降低，這是由於正方形涉及較多性質的論述，但菱形僅需憶取四邊等長之幾何性質進行論述即可。

參考文獻

李梓楠（2006）。*國小高年級學童平面幾何論證之試驗性教學研究*。國立台北教育大學心理與諮商學系碩士論文。（未出版）

林福來、陳創義、吳家怡、譚克平、鄭英豪、陳英娥、楊凱琳、秦爾聰、林佳蓉、郝曉青、梁蕙如、張瓊華（2003）。*青少年的數學概念學習研究－子計畫十四:青少年數學論證能力發展研究（3/3）*。國科會專題研究計畫期末報告（計畫編號 NSC 89-2511-S-003-103-）。

教育部（2003）。*國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域*。台北：教育部。

鄭英豪（2004）。*青少年數學論證學習與教學的理論之研究：子計畫三－青少年圖形命題論證教學的研究（1/4）*。國科會專題研究計畫期末報告（計畫編號 NSC 92-2521-S-163-001-）。

鄭英豪（2006）。*青少年數學論證學習與教學的理論之研究：子計畫三－青少年圖形命題論證教學的研究（3/4）*。國科會專題研究計畫期末報告（計畫編號 NSC 94-2521-S-163-001-）。

Lin, F. L. (2005) .Modeling students' learning on mathematical proof and refutation. Plenary speech in *Proceedings of the 29th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*.

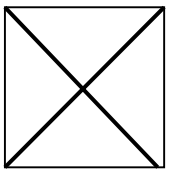
Lin, F. L., Cheng, Y. H., & linfl team (2003).The Competence of Geometric Argument in Taiwan Adolescents. *International Conference on Science & Mathematics Learning*. NTNU, Taipei, Taiwan.

Lin, F. L., Chen, C.Y., Cheng Y.H., & Lin J.R(2004). Taiwanese Junior high students' performance of Geometric Argumentation. *Conference on geometric proof in Taiwan and German*. Universitat Augsburg,German.

附錄

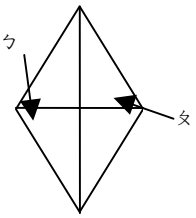
正方形試題

大雄和靜香去公園，兩人測量正方形公園的對角線距離，發現一樣長，但是大雄卻不知道為什麼正方形對角線會一樣長，聰明的你（妳）說說看你的想法讓大雄知道吧！



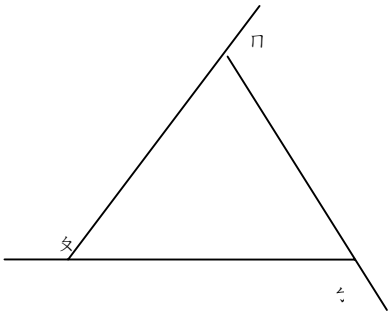
菱形試題

奇犴跟小傑去游泳池，這個菱形的游泳池被兩條繩子分成四小塊游泳池，奇犴發現角ㄅ、角ㄆ竟然一樣大，他們兩個人想了很久可是都想不出來，小朋友幫奇犴小傑想想看為什麼角ㄅ跟角ㄆ一樣大，說說你們的理由吧！



三角形試題

魯夫與喬巴去探險，發現一個三角形噴水池，喬巴向魯夫打賭說三個角（角ㄅ、ㄆ、ㄇ）加起來一定是 360 度，但是魯夫不信，聰明的小朋友幫魯夫解決這個疑惑吧，說說看為什麼三個角（角ㄅ、ㄆ、ㄇ）加起來是 360 度的理由。



多邊形試題

小丸子上自然課，老師要求測量蜜蜂窩（正六邊形）的角度，大家答案都不盡相同，有人認為是『720 度』，有人認為是『540 度』，聰明的你（妳）幫助小丸子解決這個麻煩的問題，到底蜜蜂窩的內角和是多少，說看看你的理由。

