國一學生在情境與純數字問題之估算策略的研究

吳心馨[1]、楊德清[2]
國立嘉義大學數學教育研究所
s0930952@mail.ncyu.edu.tw[1]、dcyang@mail.ncyu.edu.tw[2]

摘　要

本研究旨在比較國一學生面對「情境」與「純數字運算」時使用估算策略之差異性，並探討學生回答估算問題時所使用之估算策略。本研究以彰化縣公立國中一年級兩班共 69 名學生為樣本，採用問卷調查的方式蒐集資料，分析學生的解題策略。結果顯示樣本學生較習慣使用傳統算則的方式解題，少用估算策略解題。由 t-考驗顯示其在整體表現及「轉化」題型之情境與純數字題的估算表現達顯著差異，即純數字題的表現優於情境題。此外，學生常用的估算策略包含「再形成」、「轉化」、「補償調整」三大類。

關鍵字：估算策略、純數字題、情境題

一、背景

美國數學教師協會(NCTM)強調「估算是學校數學教育中不能忽視的一環」(2000, p.47)，同時在國際數學與科學研究 TIMSS 中亦加入估算向度，更加顯示「估算」在現今數學教育中是不可或缺的教學主題之一，亦是學生必備之基本能力。Reys, Nohda,Ishida,Yoshikawa,和 Shimizu (1991)在日本五年級和八年級學生的估算研究，發現日本學生在數學計算能力優於美國，但兩國學生的估算能力卻無顯著差異，顯示「計算」與「估算」之間並無高度相關性。相較於國內的傳統教學，學生習慣使用紙筆運算求出精確的答案，一看到特定題型，就不假思索，習慣性模仿老師的算法或套入公式算出答案，在此環境下的學生能否跳脫算則的限制，彈性地運用估算的方式求出答案，是值得探討的問題。

Sowder（1992）認為提供情境可能會減輕或增加估算的難度，若情境題採用不常見的字詞，會增加估算的困難；另一方面，加入情境也可能讓學生更瞭解題目的意義。而 Reys, Rybolt, Bestgen和Wyatt(1982)則提出口語的情境題比純數字問題容易估算。有鑑於此，到底學生容易在情境或純數字題型估算呢？本研究欲探討情境與純數字題，對學生採用估算策略的影響。

本研究參考 Reys 等人(1982)將估算之主要解題策略分為再形成（reformulation）、轉化（translation）和調整補償（compensation）等三大面向，以探究在此三向度下情境和純數字題型學生所使用估算策略之差異，本研究欲以上述三向度作為設計研究工具的主要依據。以下分別說明三種策略的意義：

（一）再形成

用合適的數代替原本數值或是數字形態以方便進行計算的過程。如問題 1 設計取 0.525 的近似值 0.5，取 987.6 的近似值 1000，再進行估算，必須運用取大約值來運算的技巧。如：0.525x987.6＝51849？，請選出大約值。（1）5.1849（2）518.49（3）51.849（4）5184.9。

（二）轉化

指改變原本問題的數學算式結構或運算順序以利計算。如問題 9 請求出 24.987×893.5×4 的大約值？（1）93000（2）79000（3）89000（4）85000。需改變乘數順序，以利計算。

（三）調整補償

經過「再形成」或「轉化」的策略後，學生稍微調整答案的大小，並參考問題情境以及題目所提供的數值進行修正，以減少誤差。解題者察覺 98％接近 100％，所以答案接近 12110227，12110227÷98％答案會比 12110227 大一點點，運用補償的估算技巧來解題。例如問題 12：12110227÷0.98＝？，請選出大約值。（1）6055114（2）12357000（3）10899000（4）24220454。

本研究之主要研究目的為：

（一）比較國一學生面對「情境」與「純數字問題」時使用估算策略之差異性。

（二）探討學生回答估算問題時所使用之估算策略。

二、研究方法

（一）研究樣本

本研究採取便利取樣，以彰化縣某國中兩班共 69 名國一學生為樣本，採用問卷調查的方式蒐集資料，以分析學生的解題過程。

（二）研究工具

本研究依據 Reys 等人（1982）之研究發現：學生常用之估算策略為「再形成」、「轉化」、「補償調整」等三大向度，以此作為本研究測驗設計之基礎，並參考國一教科書來設計符合學生程度的估算問題。為了比較學生處理「情境」和「純數字運算」問題時之估算能力的差異，乃依「再形成」、「轉化」、「補償調整」三大向度設計試卷，每個向度各為 4 題，每份試卷各有 12 題，一份為情境、另一份為純數字估算問題，兩份試卷同題號之題目算式和數字相同。先進行情境試題，隔 2 週後再施測純數字題，一方面增加重測信度，另一方面減低學生對試題內容保留的情況，因此二份試卷施測的先後也不影響研究結果。

（三）信度與效度

情境試題的 Cranbach α 值為 0.7703，純數字試題的 Cranbach α 值為 0.8010，說明此測驗具備良好的信度。此外，邀請數學教育相關之專家和有多年數學教學經驗之中學老師，針對測驗試題內容之周延性與代表性進行討論，參與者皆同意本工具之內容足以反應估算之意義，同時內容亦符何國一學生之學習內容。因此，本測驗具備良好的專家效度與內容效度。

（四）資料處理

1.資料蒐集

本研究採用半開放式紙筆測驗的方式(除了答案的選取外，並要求受測者寫下其解題策略和理由)進行資料之蒐集。由於本研究包括「情境」和「純數字運算」問題共2份測驗卷，分為兩次施測，每次約需一節課的時間。

2.資料分析

本研究的評分標準分為答案選項與策略使用兩部分，策略的評分方式分為：「完全估算、部分估算、少量估算、傳統算則和錯誤作答」五大類，為了比較紙筆解法與估算解法的差異，因此採用傳統算則解題給分最低，而估算解題則依估算程度給分（完全6分、部分4分、少量2分）。估算以下舉例說明：　解題策略計分方式舉學生的作答為例，「轉化題型」問題5 請求出24.987×893.5×4的大約值？（1）93000（2）79000（3）

89000（4）85000。

（1）傳統算則：若學生算出 24.987x893.5x4＝89303.538，得分 1 分；

（2）少量估算：若學生回答 24.987 大約 25，而，25x893.5＝22337.5，22337.5x4＝89350，運用取概數之「再形成」估算策略，但未察覺先 893.5 取 900 來計算較容易，所以解法屬於少量估算，得 2 分；

（3）部分估算：若學生回答 24.987 大約 25，而 893.5 大約 890，25x890＝22250，22250 x4＝89000，運用取概數之「再形成」估算策略，但未察覺先計算 25x4 較容易，所以解法屬於部分估算，因此給 4 分；

（4）完全運用估算：若學生回答 24.9 接近 25，先算 25x4＝100（比較好算），而 893.5 大約 890，相乘後得到答案大約 89000，使用取概數之「再形成」策略，接著改變運算順序，先處理容易計算的部分，屬「轉化」策略，完全運用估算來解題，因此得 6 分。

三、結果與討論

（一）情境與純數字題之估算整體表現達顯著差異

表1呈現學生在「情境」與「純數字」題型的平均總分、標準差以及進行t-考驗的統計結果，結果表示情境和純數字題之成績達顯著差異（p=.031＜0.05），亦即本學生於純數字題型的表現明顯優於情境題。此外，由答對率（情境約20%，純數字約23%）可知，樣本學生的估算能力相當低落。

表1 *國中一年級學生在估算題型之成對樣本檢定*（N＝69人）

題型	平均數(答對率%)	標準差	t	顯著性
情境	19.39（20.20%）	12.55	-2.21	.031 *
純數字	22.59（23.53%）	17.27		

註：α=.05

由於整體表現具差異性，因此，以下將針對四種不同的策略進行 t-考驗，以檢驗其差異性。

1.轉化題型之情境與純數字題之估算表現達顯著差異

表2分別呈現學生在「再形成」、「轉化」、以及「補償調整」問題之「情境」與「純數字」題型的T-考驗結果。結果顯示只有「轉化」題型達顯著差異（p＜.05）。同時結果顯示學生於「再形成」、「轉化」以及「補償調整」題型的平均分數偏低，顯示樣本學生的估算能力相當弱，此與Reys等人(1991)的發現「學生不喜歡或拒絕估算」相呼應。此外，三類題型之成對變異數差異平均數皆為負數，顯示學生在純數字題的估算表現較情境題優異。

表2 *國中一年級學生在估算三題型之成對樣本檢定*（N＝69人）

估算題型	題型	平均分數	成對變異數差異平均數	T	顯著性 (雙尾)
再形成	情境－純數字	5.28－5.99	-.710	-.945	.348
轉化	情境－純數字	7.96－9.52	-1.565	-2.304	.024
補償調整	情境－純數字	6.10－7.09	-.986	-1.770	.081

註：滿分為32分（每題八分，每一題型各有四題）α=.05

(二)學生回答三類估算問題所使用的解題策略

依研究工具的三個題型分析樣本學生的解題策略：

1.再形成題型

（1）學生回答「再形成」問題之表現差異。

表 3 國一學生回答「再形成」問題所使用的解題方法（N＝69）

題號	1	2	3	4
情境題				
再形成	11（15.9%）	1（1.4%）	14（20.3%）	11（15.9%）
轉化	0（0%）	0（0%）	0（0%）	0（0%）
補償調整	0（0%）	0（0%）	0（0%）	0（0%）
傳統算則	30（43.5%）	41（59.4%）	6（8.7%）	8（11.6%）
錯誤	28（40.6%）	27（39.2%）	49（71%）	50（72.5%）
純數字題				
再形成	6（8.7%）	8（11.6%）	18（26.1%）	18（26.1%）
轉化	1（1.4%）	1（1.4%）	1（1.5%）	0（0%）
補償調整	0（0%）	0（0%）	0（0%）	0（0%）
傳統算則	50（72.5%）	46（66.7%）	26（37.7%）	24（34.8%）
錯誤	12（17.4%）	14（20.3%）	24（34.7%）	27（39.1%）

從表 3 獲知以下特點：

①資料顯示在情境題大部分學生最常使用「傳統算則」或解題「錯誤」，少有估算策略的運用。例如：4 題中使用再形成估算策略來解題的比例，皆低於 21%，其中以第 2 題 1.4%最低。

②在純數字題「傳統算則」仍為大部分學生的最愛，而解題「錯誤」比例較情境題降低。

③整體看來，除第 1 題外，樣本學生於純數字題以估算策略解題的比例高於情境題，顯示其在純數字題較易發揮估算解題的能力。

（2）學生回答問題1所使用的估算策略

①運用「再形成」估算策略解題

先對 0.525 和 987.6 取概數得到 0.5 和 1000，接著計算 0.5×1000，求得答案大約值為 500，最後選擇和 500 最相近的項目，屬於「再形成」策略，其回答如圖 1，

②運用「轉化」估算策略解題

學生調整運算結構，認為：「乘以 0.525 等於除以 2，估算出的答案必定為百位數」，過程如圖 2，首先把 987.6 看成 988，對數字取概數是「再形成」策略，接著將乘以 0.525「轉化」成除以 2，屬於「轉化」的估算策略，以有意義的方式找出 988 的一半，最後以「必定為百位數」評估答案的合理性。

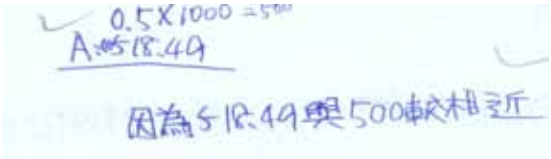


圖 1. 再形成估算策略

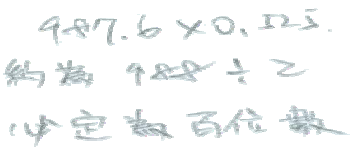


圖 2. 轉化估算策略

2.轉化題型

（1）學生回答「轉化」問題之表現差異。

表 4 *國一學生回答「轉化」問題所使用的解題方法*（N＝69）

題號	5	6	7	8
情境題				
再形成	16（23.2%）	0（0%）	3（4.3%）	6（8.7%）
轉化	7（10.1%）	22（31.9%）	25（36.2%）	18（26.1%）
補償調整	0（0%）	0（0%）	0（0%）	0（0%）
傳統算則	18（26.1%）	12（17.4%）	24（34.8%）	23（33.3%）
錯誤	28（40.6%）	35（50.7%）	17（24.7%）	22（31.9%）
純數字題				
再形成	2（2.9%）	1（1.4%）	2（2.9%）	5（7.2%）
轉化	20（29%）	29（42%）	17（24.6%）	14（20.3%）
補償調整	0（0%）	0（0%）	0（0%）	0（0%）
傳統算則	26（37.6%）	20（29%）	37（53.6%）	29（42%）
錯誤	21（30.5%）	19（27.6%）	13（18.9%）	21（30.5%）

從表 4 獲知以下特點：

①資料顯示在情境題學生最常使用「傳統算則」或解題「錯誤」。

②在純數字題「傳統算則」仍為大部分學生的最愛，而解題「錯誤」比例降低。

（2）學生回答問題5所使用的估算策略

①運用「再形成」估算策略解題

學生對893.5和24.9取大約值得到900和25，先算出900x5，最後再將乘積乘以4，取便於計算的概數屬於「再形成」策略，未察覺可使用「轉化」策略以進行更有效率地估算，其結果顯示此類學生之估算策略仍停留在「再形成」階段。

②運用「轉化」估算策略解題

學生改變運算的順序，察覺25和4相乘會得到大約值100，再乘上893.5，過程如圖4，為了方便估算而調換運算的順序，此解法屬於「轉化」的估算策略。



圖3. 再形成估算策略

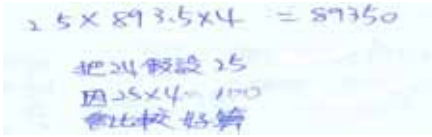


圖4. 轉化估算

3.補償調整題型

（1）學生回答「補償調整」問題之表現差異。

表 5 *國一學生回答「補償調整」問題所使用的解題方法*

題號	9	10	11	12
情境題				
再形成	3（4.3%）	0（0%）	6（8.7%）	20（29%）
轉化	0（0%）	0（0%）	0（0%）	0（0%）
補償調整	1（1.4%）	2（2.9%）	4（5.8%）	2（2.9%）
傳統算則	37（53.6%）	3（4.3%）	7（10.1%）	11（16%）
錯誤	28（40.7%）	64（92.8%）	52（75.4%）	36（52.1%）
純數字				
再形成	0（0%）	0（0%）	15（21.7%）	19（27.5%）
轉化	1（1.4%）	0（0%）	0（0%）	1（1.4%）
補償調整	0（0%）	3（4.3%）	5（7.2%）	3（4.3%）
傳統算則	54（78.3%）	30（43.5%）	27（39.1%）	26（37.7%）
錯誤	14（20.3%）	36（52.2%）	22（32%）	20（29.1%）

從表 5 獲知以下特點：

①資料顯示在情境題大部分學生最常見的表現為解題「錯誤」，少有估算策略的運用。而所運用的估算策略，以「再形成」策略佔較高的比例，「補償調整」次之。

②在純數字題「傳統算則」仍為大多數學生的最愛，而「錯誤」比例較情境題降低。

③整體看來，除第 1 題外，樣本學生以估算策略解題的比例在純數字題明顯高於情境題，顯示其在純數字題型較易使用估算解題技巧。

（2）學生回答問題11所使用的估算策略

①運用「再形成」估算策略解題

學生先取0.98的概數1進行運算，過程如圖5，接著根據估算的結果選取最接近的答案，屬於「再形成」策略。未察覺可使用「補償調整」策略以進行更有效率地估算，其結果顯示此類學生之估算策略仍停留在「再形成」階段。

②運用「補償調整」估算策略解題

學生取概數後，察覺實際值 0.98 比大約值 1 小，所以答案會比估算值還大，過程如圖 6，透過後設認知在估算後彈性調整估算結果的大小，以減少誤差，其解法歸類為補償調整的估算策略。

圖5. 再形成估算策略

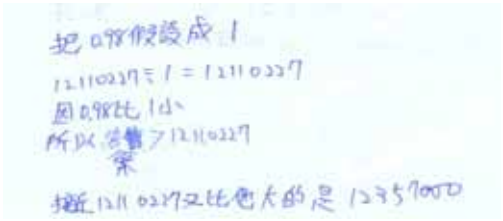


圖6. 補償調整估算策略

（三）樣本學生的整題估算表現

由表 3、表 4 和表 5 可發現，學生習慣運用傳統算則來解題，少用估算策略解題，在純數字題之估算表現明顯優於情境題。此外，分析學生的解題情形可察覺成功的估算者會根據題型彈性選擇估算策略，歸納樣本學生之估算解題表現如下：

1.運用研究者期望的估算策略解題，包括再形成、轉化和補償調整。

2.不一定使用研究者期望的估算策略，如運用「再形成」策略解「補償調整」題型。

四、結論

本研究只針對兩班學生進行取樣，基於此限制，並不期望對所有的國一學生做推論，而盡量就兩班的估算表現提供學生學習和教師在教學上一些建議，期望有助於估算的推廣。根據研究結果提出以下結論：

1.樣本學生少用估算策略解題，在「總分」和「轉化」題型之情境與純數字題的估算表現具顯著差異。

由資料分析可知，樣本學生使用估算策略的比例低落，在本估算測驗的得分不佳。透過成對樣本t考驗結果顯示三類估算題型皆為純數字題表現優於情境題，其中由顯著性得知「總分」和「轉化」題型之情境與純數字的表現達顯著差異。

2.部分學生能根據題目彈性選擇估算策略。

學生取便於計算的概數，能彈性調整運算的順序或數字的結構以簡化算式，也會調整估算答案的大小以減少估算誤差。總之，成功估算的學生依據不同的題型選擇適合的估算策略，進行有效率地解題。

參考文獻

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1982) Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 13*,pp. 183-201.

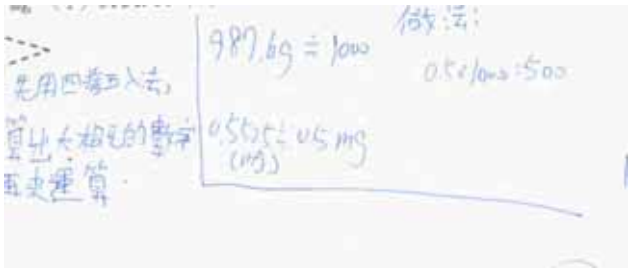
Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In Douglas .Grouws(Ed.),Handbook of research on mathematics teaching and learning(pp.371-389). New York: Macmillan.

附錄

情境題原案

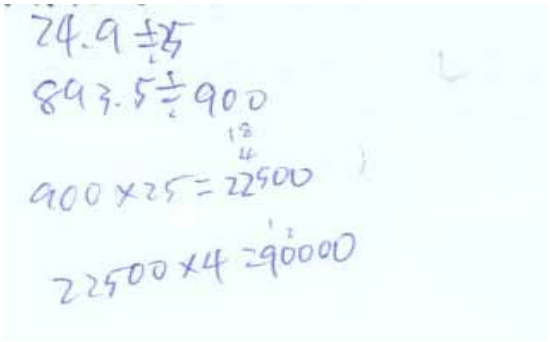
1.問題 1

以「再形成」估算策略解題原案（與內文圖 1 對照）

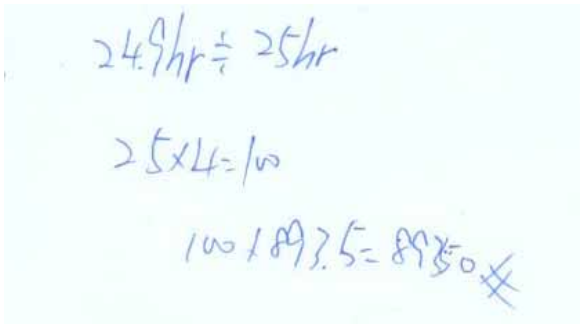


2.問題五

以「再形成」估算策略解題原案（與內文圖 3 對照）

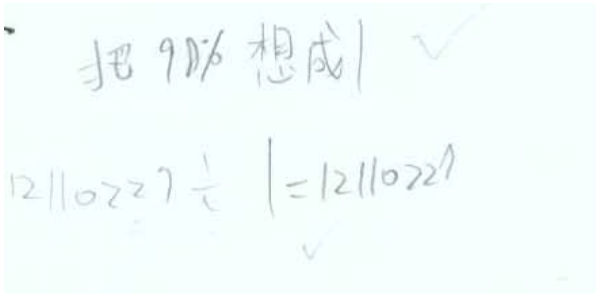


以「轉化」估算策略解題原案（與內文圖 4 對照）



問題十一

以「再形成」估算策略解題原案（與內文圖 5 對照）



以「補償調整」估算策略解題原案（與內文圖 6 對照）

