國一數學探究教學之行動研究

林雅雯　宜蘭縣立頭城國中
張靜譽　國立彰化師範大學科學教育研究所

摘　要

本研究的目的在經由行動研究來改進本研究者的數學教學。改進策略是應用 PCDC 教學模式和 RME 理論於國中數學教室，試行探究取向的數學教學。質性資料以內容分析為主包含歸納和比較；量的資料則分別在實施教學前、後測試，並以 t-檢定進行分析考驗是否達到顯著差異水準。研究結果發現：PCDC 探究取向的教學模式實施原則乃把握教學環的四項要領，但要適當的融入探究的精神。經八個月的教學之後，受試班的改變主要有三：(一) 段考成績進步。(二) 教室氣氛大為改善。(三) 學生的信念有正向的改變。

關鍵字：真實情境、探究教學、數學信念。

壹、研究動機

在國中任教六年的前兩年(未到彰師進修之前)，本研究者上課方式完全採用傳統講述法。如此教學之下，學生時常先利用背誦記憶的方式來解題，結果能適應的人，會因分數提高而建立信心和成就感；但是適應不良的人則徒增挫折和失去信心。民國 92 年 6 月本研究者考上國立彰化師範大學科學教育研究所數理教學碩士班，致使本研究者得以接觸到 PCDC 教學，並在文獻中發現它很適合做為教師從事建構教學的導航圖(張靜譽，1995)。有許多教師利用 PCDC 來改進他們的教學，也獲到不錯的效果(蔡玉玲，2004；粘孝琿，2004；尤詩憶，2004)。

PCDC 教學是以問題為中心的教學模式，而在佈題的內容上，RME 理論提供了最多的啟示與靈感，應用「PCDC 教學」與「RME 理論」試行於數學課室中，藉由提供真實情境的問題，來進行數學活動，應是個不錯的教學模式。而探究是人類學習的基本方式(Suchman, 1966)，數學的學習應該是一個由學生自主產生的探究活動，不應是由教師傳輸知識的模仿活動。而數學的教學主要是在教學情境中，以教學方法引發學生對問題的好奇，並進一步引導學生加以探究，這應該是更積極的建構教學。在國中數學課室中如何實施探究教學？探究教學效果如何？將是研究者所要探討的問題。

貳、文獻探討

一、探究教學的探討

Haury (1993) 認為，探究是讓人類能合理的解釋他們好奇的現象。而探究法主要是旨在教學情境中，教師以教學方法引發學生對問題的好奇，並進一步引導學生加以探究和發現事物的真相及原理原則之教學方式。其較具代表性之理論依據有(引自張世忠，

1999)：(一) 蘇格拉底的「詰問」，蘇格拉底並不主動告訴學生答案，而是不斷得問學生問題，要學生自行去探究問題、發現答案，蘇氏極重視學生的思考過程。(二) 布魯納的「發現」，其基本觀點為若要使學生成為一個探究者或發現者，便需要給予學生機會去探究及發現。

二、現實數學教育

現實數學教育(RME)是依據 Freudenthal (1971) 的數學教育哲學理念所發展出的一門有關數學教與學的理論。數學教育的目標就是讓學生由真實環境中引發數學化的能力，促使學生在數學層次方面的提昇：情境的→對照的→一般化的→形式的。

三、PCDC 教學模式

問題雙環（PCDC）是一種符合社會建構主義和美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]）的標準及九年一貫新課程的教學模式（如圖 1）。此一模式包含有三個主要部分：

（一）核心：指圖形圓內部分，包含問題、小組、合作、對談、解題五個要素，構成了學生學習活動主要成份。（二）內環：內環表示學生的學習環或知識的創造環。（三）外環：外環表教師的教學環，採用任務、引導、環境、和分析四項教學要領組成的。

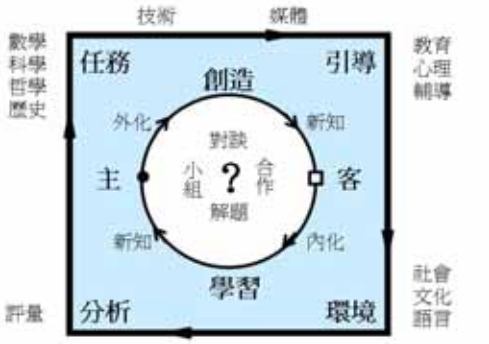


圖 1 PCDC 教學模式

因此，教師要把握教學環的四項要領，即，設計適當的任務讓學生個人或小組合作解題，引導學生朝向預定的教學目標前進，並創造有利於學生建構學習的教室環境。這種讓學生從做中學的教學經常會出現新的教學問題，教師要經由分析自己的教學，找出問題癥結所在，進行改進。

四、學生數學相關信念的研究

研究者依據數學信念研究的類型對數學本質，如何學及本科目如何教的信念等三類進行探討：(一) 數學本質信念：有許多學者提出各種不同的數學觀，莊淑琴（1998）分析了各學者對數學本質的看法，而分成動態觀與靜態觀兩種。(二) 數學教學信念，分為建構教學觀與傳統教學觀。(三) 數學學習信念，分為建構學習觀與傳統學習觀。

參、研究方法

本研究採取行動研究的方式，採「規劃」、「行動」、「觀察」、「反思」和「修正」等五個步驟 (Elliott, 1991) 的螺旋式循環來實施，於本研究者所任教台中市區某國中常態分班下的一年級班級，實施共約一學期半的 PCDC 探究教學，研究期間由民國 93 年 7 月初到 94 年 3 月，研究流程主要分三個階段：第一階段為嘗試改變期，將「老師講、學生聽」的教學模式改為 PCDC 教學模式。第二階段為修正期，參考第一階段收集的資料，並且持續文獻探討和參與國科會計劃，與指導教授和同儕進行密切的互動，針對實行教學時比較有問題的地方進行改進與修正。第三階段為去蕪存菁期，利用前兩階段較好的方式，再持續探索教學之成效。

本研究主要採取質性研究的方式，透過自我效化、同儕效化與學習者效化

(McNiff,1998)來提升效度。而量化部份所使用的學習氣氛量表，採前測與後測進行資料收集，並以 SPSS 進行 t 檢定，分析是否達到顯著差異水準。

肆、結論

一、數學課室中如何實施探究教學

PCDC 教學中，教師必須做好四項工作，即**設計探究取向的任務**、**採用探究取向的引導**、**創造開放的學習環境**及**採取多元化的分析與反思**。以下就這四方面來說明：

（一）任務：設計探究取向的任務

1.重點

在設計隱含探究問題的情境任務時應考慮：

(1)教學目標。教學目標是什麼？學生為何要學這個單元？為了解決什麼問題？學生的舊經驗在哪裡？有沒有生活化、有趣，能引發探索的例子？

(2)學生已有的智能。讓學生用他熟悉、有意義、有能力的方法來處理問題。

(3)核心概念。任務中應避免一次傳達太多的數學概念，應該有核心概念，待學生核心概念熟練之後，再加以推廣或綜合比較。

(4)發展順序。任務設計發展的過程應由圖形→數字→文字，先有圖形的引導，讓學生瞭解題意，再慢慢將圖形去除，讓學生自己建立解題模型。

(5)開放性。任務的問題宜開放些，以免剝奪學生探索的機會。如果實際運作時學生看不懂，老師再用口語、較封閉的問法來補強。

2.策略

(1)夠複雜。利用**現實問題情境**的複雜性來製造矛盾以利學生思考與辨證。

(2)利用**認知衝突**。製造含糊與衝突的問題，讓學生詢問「如果事情不是這樣，會發生何事？」，鼓勵學生追蹤這一些問題。

(3)鼓勵學生搜尋資訊。教導學生使用任何資訊來源。這將幫助學生成為獨立的學習者、問題解決者、批判思考者。

(4)善用來自學生的問題。利用**學生所提出的問題**，而有些情況下，學生並沒有直接提出問題，而是在小組討論時提出的問題，只要稍加修改，使之更為深入。

3.探究取向任務的特徵

本研究者從教學現場中也發現了會引發學生探究的問題特徵：

(1)非例行性的題目：非補習班或參考書上制式的題目。

(2)較生活化、較具體能感受得到的問題。

(3)會產生認知衝突的問題。

(4)開放性。具有較多可能和擴展空間的題目。

（二）引導：採用探究取向的引導

1.重點：

在進行數學解題探究活動中，教師利用PCDC架構教學時的四個的主要步驟：佈題、小組討論、全班討論、達成共識，並在RME理論的引導之下，教師讓學生經歷數學家發明數學的過程來發展數學知識。在教學中，讓學生投入解題工作，發展自己的解題策略。

再透過精緻化，漸漸地進入形式化數學的層次。

2.實例：學生重新發明數學的體驗-學生自行建構模式逐步發展形式化數學知識

學生在解題過程中會自行發展模式，做為非形式化知識與形式化數學之間的橋樑，它是由下而上的發展方式，學生自行建構模式，逐步去發展形式化數學知識。

在教學中可以觀察到：學生知道如何從情境(Situation)的層次，發展到情境的特殊脈絡模式(Model of Situation)，再到數學推理的模式(Model for Mathematical Reasoning)，最後發展出形式化的數學知識(Formal Knowledge)。

學生在**「青蛙跳跳跳」、「異性相吸」這幾個問題情境中，會應用一些自己的策略或操作來敘述（Situation 層次）**。接著小組討論時，學生在自己的學習單上或黑板上**寫下式子，將情境脈絡表示出來（Model of 的層次**，如下圖 2、圖 3），接著**利用數學推理去思考「a＋bx＝c＋dx」的關係（Model for 的層次**，如圖 4、圖 5），最後可以利用**以符號代表數等代數策略做「等量公理」的運算（Formal Knowledge 的層次**，如圖 6、圖 7、圖 8、圖 9）。

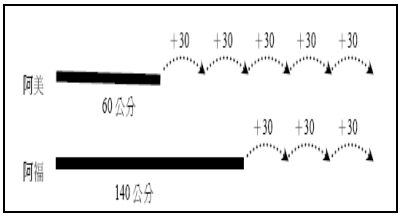


圖2

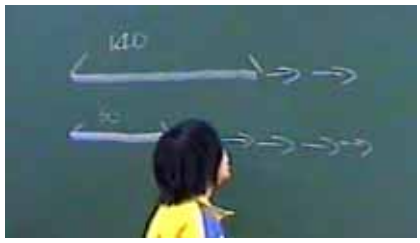


圖3

Model of 的層次



圖4

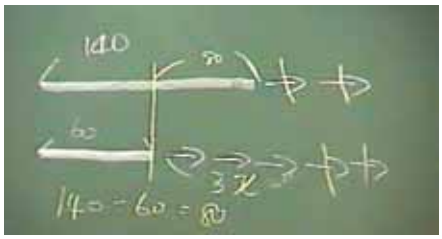


圖5

Model for 的層次

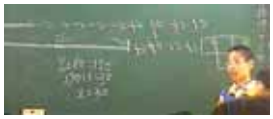


圖6

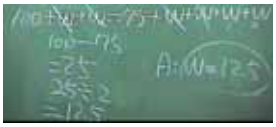


圖7



圖8



圖9

Formal Knowledge 的層次

如此結合 PCDC 教學與 RME 理論的教學模式與先前的研究者（蔡佩芬，2001；尤詩憶，2004），在此部分的教學並無不同。但是，PCDC 和探究還是有些不一樣的，PCDC 是以問題為中心，所以，偏重在解題的部分，較少有形成問題的部分。因為較開放的探究要有形成問題的步驟，所以，老師需要適時的引導學生去形成問題或發現問題。以下的一些策略頗為有用：

3.策略：

(1)將令人困惑的情境呈現給學生。透過所給予的資訊引導學生提出問題，發現答案。

(2)鼓勵由學生提出的問題。引導學生更加清楚地或更加完整地提出問題，並且要避免為學生回答問題，並且鼓勵學生「嘗試猜測」、「做中學」、「不要怕錯誤」。

(3)以問題回應學生的問題。不主動告訴學生答案，而是不斷得問學生問題。

(4)要有等待的時間。讓學生有獨力奮戰的機會，由學生去探究出自己的發現。

(5)具體化。當報告者說明不清楚時，儘量請學生用圖形、數學式子、符號來表示他口語的說明。

4.技巧

運用**不斷的「挑戰」與「提問」**可以幫助學生運用質疑來學習。本研究者從教學現場也利用了以下的問話技巧來引導學生：

(1)幫助學生學習數學推理問話：例如使用「**你能想個反例嗎？**」、「你如何證明它？」

(2)幫助學生學習猜測、發明和解題問話：例如「**如果...，會怎麼樣？如果不是又會怎麼樣？**」、「哪裡有問題？可能問題在哪裡？如何改進？」

(3)幫助學生運用質疑來學習，問話舉例：「**你同意？ 還是不同意？**」、「有沒有人答案相同但是解釋方法不同的？」、「你了解他們在說什麼嗎？」

（三）環境：創造開放的學習環境

在需要形成問題的探究中，師生要有共識：形成問題或發現問題是學習的一部份，教師要提供機會讓學生去探索和形成問題、表達想法和為他們自己的想法辯護。因此，教師應該注意：

1.尊重。盡可能站在學生的角度來思索他們要的是什麼？

2.放心。不需花費太多心思在如何調整分組，當學生認為需要透過討論方可解決問題時，自然會去找同伴。

3.設計學習環境吸引學生。利用**故佈疑陣**的手法，設計的環境與學習的資源以引起學生學習的動機。

5.學生自主。將**討論進度和主持讓給學生來規劃和安排**。

6.好玩。**符合好用、好玩的原則，**如評量方式採遊戲式數學化的練習。

7.多元學習。利用**網路多元的學習平台**以促進學生主動學習。

（四）分析：採取多元化的分析與反思

1.分析學生學習狀況的資訊：

利用多元化的方式，如網路、e-mail等，瞭解學生的想法、對不同的教學策略的反應等，以作為教學改進的參考。

2.對照理論來反思教學：

利用對照文獻、與指導教授接觸、與同儕團體討論、觀摩同儕的教學演示、參與教學模組研習、觀看教學影帶等方式，作學習及反思本研究者自身的狀況，及改進的方向。

3.利用撰寫日誌來分析教學：

寫教學日誌一方面是自我反省，一方面是日後論文寫作的原始資料。

二、實施成效

（一）輕鬆應付學校考試

研究對象在入學分班時是屬於普通班但學業成就後段的班級，在歷經三次教學改變及師生適應後，該班有較明顯的進步，排名到了全年級中間。另外，明顯發現研究班級裡低成就學生的人數卻有愈來愈少。本研究者由學生的反應與教室觀察發現，在PCDC教學之下，學生喜歡來學習數學，且不認為數學的學習是枯燥乏味的。

（二）班級氣氛大為改善

探究學習提升低成就組學生的信心，增加學生的成就感，帶動全班同學的學習態度。因為沒有傳統教室的高壓管理，師生關係非常溫馨。

研究者分別於學生入學前及學期末進行學習氣氛的前後、測，發現學生的四個層面：教師支持、同儕支持、滿意程度、內聚力上均呈現正成長，表示班級氣氛皆呈現正向的改變。再利用統計分析（表1），發現研究班級在接受教學前、後班級氣氛呈現5%顯著差異，亦即表示本行動研究所採用的教學方式呈現出良好的氣氛。

表 1 學習氣氛分析成對樣本 T 檢定表

層面分析	各向度平均數			題數	各題平均		T 值
	前測	後測	後測－前測		前測	後測	
教師支持	22.26	44.44	22.18	10	2.23	4.44	*20.56
同儕支持	30.38	37.32	6.94	10	3.04	3.73	*8.23
滿意程度	25.30	43.03	17.73	10	2.53	4.30	*10.6
內聚力	28.61	41.77	13.16	10	2.86	4.18	*12.1

* p<.05.， ** p<.01.

（四）對數學信念的改變

由問卷分析（表 2）歸納結果看來，學生對於數學教學的信念，從原來只有 26.5% 持動態觀，到後來高達 79.4%的學生持動態教學的看法，也就是說有絕大多數的學生從靜態教學觀轉向動態教學觀；而關於數學學習觀也從原先只有 2.9 %的學生認同動態學習，到後來增加到 52.9%的學生持動態學習觀點。由此可看出，學生在教學前後，對於數學所呈現的信念皆有明顯的改變，由原先抱持靜態教學觀、靜態學習觀，經過一學期多的教學改變，轉向抱持動態教學觀與動態學習觀。

表 2 學生數學信念前、後測比較表

	數學本質信念	數學教學信念	數學學習信念
前測	無	動態觀：9（26.5%） 靜態觀：12（35.3%） 無法分辨：6（17.6%） 不知道：7（20.6%）	動態觀：1（2.9 %） 靜態觀：19（55.9%） 無法分辨：4（11.8%） 不表意見：10（29.4%）
後測	動態觀：19（55.9%） 靜態觀：6（17.6%） 無法分辨：5（14.7%） 缺交：4（11.8%）	動態觀：27（79.4%） 靜態觀：4（11.8%） 缺交：3（8.8%）	動態觀：18（52.9%） 靜態觀：6（17.6%） 無法分辨：5（14.7%） 缺交：5（14.7%）

參考文獻

莊淑琴(1998)。**國小教師數學信念之研究**。嘉義市：國立嘉義師範學院碩士論文。

張靜嚞(1995)。問題中心教學在國中發展之經過、效果及可行性之探討。**科學教育學刊，3(2)**，139-164。

Ernest, P. (1989). The knowledge, belief and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching, 15(1),* 13-33.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(4),* 338-355.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Skemp, R.R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26(3),* 9-15.

Wheatley, G. H. (1991). Constructivist perspectives on science and mathematics learning. *Science Education, 75(1),* 9-21.